Ejercicio 3 - Pauta

FI34A - Física Contemporánea
Semestre Verano 2008
Profesor: Claudio Romero
Aux: Kim Hauser.

$\boxed{\text{P}}$ **En un buen conductor se encuentra que existen soluciones del campo eléctrico de la forma de ondas planas:**

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(kz-\omega t)}$$

donde k es un número complejo y la dirección de propagación se ha hecho coincidir con el eje z.

$\boxed{\text{(a)}}$ **Encuentre el valor del número complejo k.**

La ecuación de ondas para un material de alta conductividad g (otras veces llamado σ) es:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Y usando la solución de onda plana $\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(kz-\omega t)}$ se tiene:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = (ik)^2 \vec{E}$$

$$\text{y } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$$

Por lo tanto,

$$k^2 = i\mu g\omega \tag{1}$$

Importa destacar que, según la deducción que hemos hecho de la última igualdad, k^2 no representa el módulo del número complejo k, lo que sería $k \cdot k^*$. Si denotamos $k = k_r + ik_i$, entonces:

$$k^2 = (k_r + ik_i)(k_r + ik_i) = k_r^2 - k_i^2 + i2k_r k_i$$

Lo anterior, junto con (1), resulta:

$$k_r = \pm k_i \qquad k_r k_i = \frac{\mu g \omega}{2}$$

La segunda ecuación implica que, para que k_r sea real, se debe escoger $k_r = k_i$. Así, finalmente se tiene:

$$k_r = k_i = \sqrt{\frac{\mu g \omega}{2}}$$

Nota: se ha escogido $k_r, k_i > 0$, pues de otra manera la onda aumenta su amplitud al avanzar en el sentido de propagación.

$\boxed{\text{(b)}}$ **Encuentre el promedio temporal del vector de Poynting.**

Con lo anterior tenemos que:

$$\vec{E} = E_o e^{-k_i z} e^{i(k_r z - \omega t)} \hat{e}$$

Para seguir se debe notar que, en la forma polar, $k = \kappa e^{i\phi}$. Con $\kappa = \sqrt{k_r^2 + k_i^2} = \sqrt{\mu g \omega}$, y como $k_r = k_i$, entonces $k = \kappa e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Así:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{\kappa E_o e^{i\frac{\pi}{4}}}{\mu\omega} e^{-k_i z} e^{i(k_r z - \omega t)} \hat{b} \tag{2}$$

Por lo tanto:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\Re e(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2}\Re e(\frac{\kappa E_o E_o^* e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\mu\omega} e^{-2k_i z} \hat{z})$$
$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{\kappa E_o^2}{2\mu\omega} e^{-2k_i z} \cos\frac{\pi}{4} \hat{z}.$$

$\boxed{\text{(c)}}$ **Encuentre el promedio desfase entre los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$.**

Directamente a partir de la ecuación (2), en la parte (b), se tiene que el desfase entre $\vec{E}$ y $\vec{H}$, para un buen conductor, corresponde a $\pi/4$.

$\boxed{\text{(d)}}$ **Calcule cuánto debe avanzar la onda en el conductor (Δz) para que su amplitud decrezca a $1/e$ de su valor original. Este valor de $\Delta z \equiv \delta$ recibe el nombre de *longitud de penetración* del conductor.**

Es directo también, a partir de la expresión para el campo eléctrico, que cuando la onda ha avanzado $z = \frac{1}{k_i}$, su amplitud decrece a $1/e$ de su valor original. Así:

$$\delta \equiv \frac{1}{k_i} = \sqrt{\frac{2}{\mu g \omega}}$$

$\boxed{\text{(e)}}$ **Evalúe aproximadamente (el orden de magnitud debe estar correcto) de δ para una onda electromagnética de frecuencia $\nu = 3 \times 10^9\ Hz$ que se propaga en plata metálica, cuya conductividad es $g = 3 \times 10^7\ (\Omega m)^{-1}$.**

Con $\omega = 2\pi \cdot 3 \times 10^9\ rad/s$, $g = 3 \times 10^7\ (\Omega m)^{-1}$ y $\mu = \mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ Henry/m$,

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^7}{4\pi \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9}} = \frac{\sqrt{10}}{6\pi} 10^{-5}\ \delta \approx \frac{1}{6} 10^{-5} \approx 10^{-6}\ m.$$