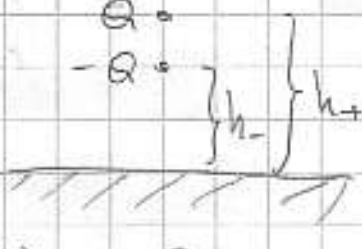
Pauta Ejercicio 5



Usando el método de imágenes, sabemos que cargas ubicadas en $-h_-$ y $-h_+$ de signo contrario solucionan la ec'n de Poisson $\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Esto cumple la CB y, además la ec'n de Poisson (pues no agrego carga en la zona de análisis) $\Rightarrow$ debe ser la solución (unicidad de la solución de la ec'n de Poisson).

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q(r\hat{r} + z\hat{k} - h_+\hat{k})}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + (z-h_+)^2)^{3/2}} = \frac{Q(r\hat{r} + (z-h_+)\hat{k})}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + (z-h_+)^2)^{3/2}}$$

Análogamente, para $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ y $\vec{E}_4$,

$$\vec{E}_2 = \frac{-Q(r\hat{r} + (z-h_-)\hat{k})}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + (z-h_-)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{Q(r\hat{r} + (z+h_-)\hat{k})}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + (z+h_-)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_4 = \frac{-Q(r\hat{r} + (z+h_+)\hat{k})^{3/2}}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + (z+h_+)^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \quad \text{(superposición)}.$$

Para la densidad, hay que evaluar el campo en el conductor ($z=0$)

$$\vec{E}_1(z=0) = \frac{Q(r\hat{r} - h_+\hat{k})}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+h_+^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_2(z=0) = \frac{-Q(r\hat{r} - h_-\hat{k})}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+h_-^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_3(z=0) = \frac{Q(r\hat{r} + h_-\hat{k})}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+h_-^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_4(z=0) = \frac{-Q(r\hat{r} + h_+\hat{k})}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+h_+^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z=0) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \frac{-Qh_+\hat{k}}{2\pi\varepsilon_0 (r^2+h_+^2)^{3/2}} + \frac{Qh_-\hat{k}}{2\pi\varepsilon_0 (r^2+h_-^2)^{3/2}}$$

Además

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}(s+)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{h_-}{(r^2+h_-^2)^{3/2}} - \frac{h_+}{(r^2+h_+^2)^{3/2}}\right]}$$

b) en el plano $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2h_+}{(r^2+h_+^2)^{3/2}} + \frac{2h_-}{(r^2+h_-^2)^{3/2}}\right]\hat{k} = 0$

$$\Rightarrow h_+^{2/3}(r^2+h_-^2) = h_-^{2/3}(r^2+h_+^2)$$

$$\left(\frac{h_+}{h_-}\right)^{2/3}(r^2+h_-^2) = (r^2+h_+^2)$$

$$r^2\left[\left(\frac{h_+}{h_-}\right)^{2/3} - 1\right] = h_+^2 - h_-^2 \cdot \frac{h_+^{2/3}}{h_-^{2/3}}$$

$$r^2\left[\frac{h_+^{2/3} - h_-^{2/3}}{h_-^{2/3}}\right] = \left[h_+^2 - h_-^{4/3}\cdot h_+^{2/3}\right]$$

$$r^2\left[\frac{h_+^{2/3} - h_-^{2/3}}{h_-^{2/3}}\right] = h_+^{2/3}\left[h_+^{4/3} - h_-^{4/3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 = (h_+h_-)^{2/3}\left(h_+^{2/3} + h_-^{2/3}\right)}$$