

que es un tipo de ecuación que ya se conoce, como por ejemplo:  $m\ddot{x} = -kx + mg$ . Su solución general es,

$$w(\phi) = A \cos(\phi + \delta) + \frac{GMm^2}{\ell^2} \quad (6.2.3)$$

donde  $A$  y  $\delta$  son las dos constantes de integración. Siempre se puede escoger el eje a partir del cual se mide  $\phi$  de tal modo que  $\delta = 0$  que es lo que se hace a partir de ahora. Tal elección corresponde a cónicas orientadas en forma simétrica con respecto al cambio  $y \rightarrow -y$ .

Puesto que el inverso de  $w$  es  $r$ , (6.2.3) implica que

$$r(\phi) = \frac{\frac{\ell^2}{GMm^2}}{1 + \frac{A\ell^2}{GMm^2} \cos \phi} \quad (6.2.4)$$

Antes de continuar se hace un repaso de la forma como se puede escribir una cónica.

## 6.2.2. Cónicas

A continuación se va a demostrar que  $r(\phi)$  dado por

$$r(\phi) = \frac{R}{1 + e \cos \phi} \quad (6.2.5)$$

define diversas cónicas según el valor de la *excentricidad*  $e$ . El parámetro  $R$  define la escala de longitud de la cónica.

Si (6.2.5) se escribe como  $r + e r \cos \phi = R$  o equivalentemente como  $x^2 + y^2 = (R - ex)^2$  donde se ha usado

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (6.2.6)$$

se obtiene

$$(1 - e^2)x^2 + 2eRx + y^2 = R^2 \quad (6.2.7)$$

que es una de las formas conocidas que describe cónicas. En efecto, todo polinomio cuadrático  $\text{Pol}_i(x, y) = 0$  representa una cónica en el plano  $XY$ .

Si en (6.2.7) se hace el desplazamiento (válido tan solo si  $e^2 \neq 1$ )

$$x = \bar{x} - \frac{eR}{1 - e^2} \quad (6.2.8)$$

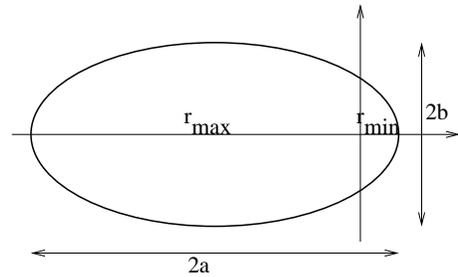
la ecuación puede ser reescrita como

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{R^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{1-e^2}} = 1 \quad (6.2.9)$$

Esta forma describe elipses e hipérbolas centradas en el origen. En efecto, si  $e^2 < 1$  esta es fácilmente reconocible como la ecuación de una elipse. En particular, si  $e = 0$  se obtiene una circunferencia. Si  $e^2 > 1$  lo es de una hipérbola. La ecuación (6.2.7) en cambio deja a uno de los focos de la cónica en el origen.

**Elipses:**  $e^2 < 1$ 

Una elipse es una curva que se caracteriza porque la suma  $L_1 + L_2$  de las distancia de cualquier punto  $P$  de la elipse a dos puntos especiales llamados *focos*, vale siempre lo mismo. Estos dos focos están en el interior de la elipse sobre su eje mayor. El caso particular en que los dos focos se funden en un solo punto produce una circunferencia.



En la forma original descrita en (6.2.7) esta es una elipse con uno de sus focos en el origen y tiene sus radios mínimo y máximo sobre el eje  $X$ . Se tomará el caso  $e > 0$ .

Para  $\phi = 0$  se obtiene  $r_{\min}$  y para  $\phi = \pi$  se tiene  $r_{\max}$

$$r_{\min} = \frac{R}{1+e} \quad r_{\max} = \frac{R}{1-e} \quad (6.2.10)$$

Los semiejes mayor y menor son

$$a = \frac{R}{1-e^2} \quad b = \frac{R}{\sqrt{1-e^2}} \quad (6.2.11)$$

**Hipérbolas:**  $e^2 > 1$ 

Una hipérbola es una cónica disconexa, constando de dos ramas. Al igual que en el caso de una elipse, hay dos puntos especiales llamados focos. Esta vez la diferencia de las distancias:  $|L_1 - L_2|$  entre cualquier punto  $P$  de la hipérbola y los dos focos es una constante. Las hipérbolas son curvas infinitas que tienden, a grandes distancia, a coincidir con dos rectas llamadas las *asíntotas*. La distancia entre ambos focos es  $2eR/(e^2 - 1)$ . La menor distancia entre las dos ramas de una hipérbola es  $2R/(e^2 - 1)$ .

**Parábola:**  $e^2 = 1$ 

Una parábola tiene un solo punto llamado foco, el cual está sobre el único eje de simetría de la curva. La distancia entre el punto de máxima curvatura y el foco es  $R$ .

Si en un punto  $P$  de la parábola se traza la recta hasta el foco y la paralela al eje de simetría, la bisectriz es perpendicular a la tangente a la parábola. Esta propiedad es la que hace tan útiles los espejos parabólicos para hacer desde focos de linterna hasta telescopios y antenas.

El caso  $e^2 = 1$  debe ser analizado antes de dividir por  $e^2 - 1$ . Por ejemplo de (6.2.7) se tiene con  $e = \pm 1$

$$y^2 = R^2 \pm 2Rx \quad (6.2.12)$$

que son ecuaciones para dos parábolas.

### 6.2.3. El caso planetario

Ahora que se sabe la forma de describir las cónicas se puede identificar

$$R = \frac{\ell^2}{GMm^2}, \quad e = \frac{A\ell^2}{GMm^2} \quad (6.2.13)$$

A continuación se verá cómo relacionar  $A$  con la energía total  $E$  y el momento angular  $\ell$ .

La energía está dada por

$$E = \frac{m}{2} v^2 + U_G(r) \quad (6.2.14)$$

pero de (6.1.2) y luego de (6.1.19)

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^4} (r^2 + r'^2) \quad (6.2.15)$$

entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{\ell^2}{2mr^4} (r^2 + r'^2) - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{\ell^2}{2m} (w^2 + w'^2) - GMmw \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Al reemplazar la forma explícita de la función  $w$  se obtiene

$$E = \frac{\ell^2 A^2}{2m} - \frac{m}{2} \left( \frac{GMm}{\ell} \right)^2 \quad (6.2.17)$$

lo que permite establecer que  $A$  depende de  $E$  y  $\ell$  en la forma

$$A = \pm \frac{GMm^2}{\ell^2} \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{(GMm)^2 m}} \quad (6.2.18)$$

De todo lo anterior se reconoce que

$$\boxed{R = \frac{\ell^2}{GMm^2}, \quad e^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{(GM)^2 m^3}} \quad (6.2.19)$$

Si se reemplaza el valor (6.1.17) de la energía de una órbita circunferencial se comprueba que  $e = 0$ .

	excentricidad $e$	radio medio de la órbita [ $10^8 \times \text{Km}$ ]
Mercurio	0.206	0.58
Venus	0.007	1.08
Tierra	0.017	1.50
Marte	0.093	2.28
Júpiter	0.048	7.78
Saturno	0.056	14.27
Urano	0.047	28.89
Neptuno	0.008	44.98
Plutón	0.249	59.00
Sedna	0.857 <sup>(?)</sup>	1367.00
Cometa Halley	0.967	

Cuadro 6.1: Los planetas, las excentricidades de sus órbitas y el radio medio de las respectivas órbitas. Sobre Sedna aun no se tiene datos muy seguros.

Para elipses,  $e^2 < 1$  y entonces  $E < 0$ .  
 Para parábolas,  $e^2 = 1$  y entonces  $E = 0$ .  
 Para hipérbola,  $e^2 > 1$  y entonces  $E > 0$ .

EJEMPLO: Desde una distancia  $r_0$  del centro de fuerza se lanza un satélite con velocidad  $\vec{v}_0$ , perpendicular al vector posición inicial  $\vec{r}_0$ .

La energía es  $E = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$  y  $\ell^2 = m^2 r_0^2 v_0^2$ .

El caso límite es el de la parábola, es decir, el caso con  $E = 0$ ,

$$v_0^2 = v_P^2 \equiv 2GM/r_0.$$

Si  $v_0 < v_P$  la órbita es una elipse. Para el caso particular  $v_0 = \sqrt{GM/r_0}$  se obtiene una circunferencia. Para  $v_0 > v_P$  la órbita que resulta es una hipérbola. ◀

### 6.2.4. La tercera ley de Kepler

De la segunda ley de Kepler, (2.5.4), se desprende que el período  $T$  del movimiento planetario se relaciona al área de la elipse,  $S = \pi ab$ ,

$$T = \frac{2mS}{\ell} = \frac{2m\pi ab}{\ell} = \frac{2m\pi}{\ell} \frac{R^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

pero se sabe que  $\ell^2 = GMm^2R$ . Calculando  $T^2$  se puede reemplazar  $\ell^2$  por la relación recién escrita, resultando

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

que es la tercera ley de Kepler expresada con el semieje mayor,  $a$ .

### 6.3. Problemas

6.1 Determine la fuerza  $\vec{F}$  que implica la función de energía potencial

$$U = \frac{k}{2}(r - B)^2$$

donde  $B$  es una constante positiva. ¿En qué situación realista se puede tener una fuerza como esta?

6.2 Una partícula se mueve sin roce por la superficie interior de un cono de eje vertical, vértice abajo y ángulo  $\alpha$  entre una generatriz y la vertical. Demuestre que la energía potencial efectiva  $U^*$  es

$$\frac{\ell^2}{2m\rho^2} + mg\rho \cotan\alpha$$

donde  $\rho$  es la coordenada radial de coordenadas cilíndricas. Encuentre la frecuencia de las pequeñas oscilaciones cuando  $\rho$  oscila levemente en torno a un valor  $\rho_0$ .

6.3 Se tiene en órbita geoestacionaria una gran esfera hueca. Al centro de esa esfera flota una pequeña masa. Si se le da un pequeño impulso, ¿cuál es su frecuencia de oscilación en torno al centro de la gran esfera?

6.4 Un satélite artificial tiene una distancia máxima y mínima a la superficie terrestre de  $R$  y  $3R$ , siendo  $R$  el radio de la Tierra. Determine el período de rotación en función de la masa de la Tierra y de su radio. Suponga que en el momento en que el satélite está en su punto más bajo se activa su sistema de propulsión que lo deja en órbita circular. ¿Cuál es el período de esta nueva órbita?

6.5 Una partícula  $P$  está sometida a la fuerza central dada por

$$\vec{F}(r) = -12B \left( \frac{a^6}{r^7} - \frac{a^{12}}{r^{13}} \right) \hat{r}$$

donde  $B$  y  $a$  son constantes positivas conocidas. Si ésta es la única fuerza sobre  $P$  determine, a) cuál es la rapidez mínima que debe tener  $P$  en  $r = a$  para que la partícula pueda escapar sin retorno; b) cuál es la distancia máxima (o mínima) entre  $P$  y el centro de fuerzas si  $P$  se está moviendo radialmente de tal modo que pasa por  $r = a$  con una rapidez que es la mitad de la encontrada en la pregunta anterior.

- 6.6 Un satélite está describiendo una órbita circular de radio  $R$  alrededor de la Tierra. En cierto momento los cohetes del satélite se encienden brevemente dándole una aceleración puramente tangencial. Si el período de la nueva órbita es  $\frac{27}{8}$  del período que tenía antes, determine la rapidez de la nave cuando pasa por el punto en que se encuentra más alejada de la Tierra (apogeo).
- 6.7 Un satélite es colocado en órbita alrededor de la Tierra desde una altura de 600 Km sobre la superficie con una velocidad inicial de 30 mil kilómetros por hora, paralela a la superficie terrestre. Suponiendo que el radio de la Tierra es de 6378 kilómetros y su masa es de  $5,976 \times 10^{24}$  Kg, determine la excentricidad de la órbita y la velocidad del satélite en su apogeo.
- 6.8 Desde muy lejos y con rapidez  $v_0$  se dispara una partícula de masa  $m$  contra un blanco que está definido como un campo de fuerza central repulsiva de magnitud  $A m/r^2$ . La recta en la que la partícula inicia su movimiento pasa a distancia  $b$  del centro de fuerza. Calcule la distancia  $r^*$  mínima que logra tener la partícula con el centro de fuerza.
- 6.9 Dos satélites de la Tierra,  $S_1$  y  $S_2$ , cada uno de masa  $m$ , están describiendo órbitas cerradas en un mismo plano y en el mismo sentido.  $S_1$  está en una órbita circunferencial de radio  $R$  y  $S_2$  está en una órbita elíptica caracterizada por  $r_{\min} = R$  y  $r_{\max} = 8R$ . En un cierto instante ambos satélites se acoplan (la duración del proceso de acoplamiento se supone nulo) formando un satélite compuesto  $S_{12}$ . Durante el acoplamiento se conserva el momentum total pero no la energía. Determine a) el cociente entre la suma de las energías cinéticas  $K_1 + K_2$  y  $K_{12}$ . b) Determine las características de la órbita de  $S_{12}$ .
- 6.10 Sea  $R_0$  el radio de la Tierra. Una nave espacial gira en torno a la Tierra en órbita elíptica de radio mínimo  $8R_0$  y radio máximo  $16R_0$ . Para regresar a la Tierra procede como sigue: en  $t = 0$  se encuentra en su apogeo ( $r_A = 16R_0$ ). Al llegar a su perigeo ( $r_B = 8R_0$ ) enciende sus cohetes por un instante para frenar tangencialmente quedando en una órbita elíptica con radios máximo y mínimo:  $8R_0$  y  $4R_0$ . Tan pronto alcanza por primera vez  $r = 4R_0$  nuevamente frena de igual manera quedando en una tercera órbita elíptica caracterizada por  $4R_0$  y  $2R_0$ . Finalmente, la primera vez que se encuentra en  $r = 2R_0$  frena para estar en una órbita  $[2R_0, R_0]$  con lo que logra terminar su misión. Obtenga las variaciones de energía cinética cada vez que frena y obtenga el tiempo que tarda en llegar a la Tierra.
- 6.11 Un satélite está en órbita circunferencial de radio  $r_0$  sometida a una fuerza central que implica la función de energía potencial  $U(r) = -k/r$ . En un instante recibe un impacto que produce un cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar su magnitud. El cambio de dirección es en un ángulo  $\pi/3$ . Determine las distancias mínima y máxima que el satélite pasa del centro de fuerzas en su nueva órbita.

# Capítulo 7

## Movimiento relativo

### 7.1. Cinemática relativa

#### 7.1.1. Fuerzas inerciales y no inerciales

Las fuerzas que se han estudiado hasta ahora son: las de contacto (que abarcan normal, roce estático, roce dinámico, roce viscoso, tensión), elásticas y gravitacional. Y se podría agregar fuerzas eléctricas, magnéticas, nucleares y unas pocas más. Se conocen relativamente pocas fuerzas en la naturaleza y de ellas sólo tenemos acceso directo a las fuerzas: gravitacional y electromagnéticas (se deja afuera las fuerzas nucleares y subnucleares que sólo se pueden observar en laboratorios muy especializados).

Casi todas las fuerzas mencionadas en el párrafo anterior son consecuencias de las interacciones electromagnéticas entre las moléculas que componen la materia. Tan sólo la gravitación es una fuerza aparte. Todas las fuerzas de contacto se deben a las fuerzas intermoleculares que ocurren en el contacto. La tensión en una cuerda es una fuerza debida a la cohesión electromagnética entre las moléculas que constituyen la cuerda. La fuerza elástica que ejerce, por ejemplo, un resorte, se debe a estas fuerzas intermoleculares que tratan de mantener el orden en que están las moléculas en el sólido.

No hay más fuerzas en los sistema de referencias que se denominan *inerciales*. Sin embargo, la experiencia en un vehículo que aumenta o disminuye fuertemente su velocidad es de una fuerza que no está entre las anteriores. El pasajero también siente una fuerza cuando el vehículo toma una curva a cierta velocidad. Estas fuerzas son propias de los *sistemas de referencias no inerciales*. Ellas no se deben a fuerzas moleculares o gravitaciones, sino a que nuestro sistema de referencia no tiene una velocidad uniforme. En un sistema de referencia no inercial ya no vale la ley

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{inercial}}^{\text{tot}}$$

La aceleración definida con respecto a un sistema de referencia no inercial obedece una ley más complicada y este capítulo describe esta nueva ley y sus usos.

### 7.1.2. Sistemas de referencia y su relación

Siempre un sistema de referencia será descrito por su origen de coordenadas y por *ejes cartesianos* asociados a él.

No importa qué sistema de coordenadas (cartesianas, cilíndricas, esférica...) se use, un sistema de referencia está definido por su origen  $\mathcal{O}$  y sus ejes cartesianos  $X, Y, Z$ , es decir, por definición los ejes cartesianos  $X, Y, Z$  son fijos en el sistema de referencia en el cual se definen. Lo mismo se puede decir de los vectores unitarios asociados ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ) a los ejes.

Si los ejes  $X', Y', Z'$  de un sistema de referencia  $S'$  están rotando con respecto a los ejes  $X, Y, Z$  de un sistema  $S$ , entonces, por ejemplo, el vector  $\hat{k}'$  asociado al eje  $Z'$  de  $S'$  cambia en el tiempo con respecto al sistema  $S$  pero, como ya se dijo, no cambia con respecto a  $S'$ . Formalmente esto se expresa

$$\left(\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)_S \neq 0$$

pero, por definición

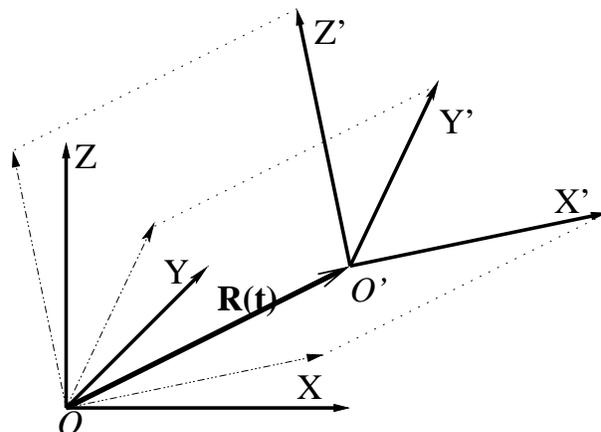
$$\left(\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)_{S'} = 0$$

Esto ilustra que las derivadas temporales calculadas en sistemas de referencia distintos pueden ser diferentes.

Para definir la relación entre un sistema de referencia  $S$  y otro  $S'$  se utilizan dos vectores:

- el vector  $\vec{R}(t)$  que va desde el origen de  $S$  al origen de  $S'$  y
- el vector  $\vec{\Omega}(t)$  que describe cómo giran los ejes de  $S'$  con respecto a los ejes de  $S$ .

Una buena forma de comprender el significado de  $\vec{\Omega}$  se logra considerando una réplica de los ejes  $\{X', Y', Z'\}$  que se obtiene por traslación paralela de los ejes de  $S'$  hasta  $\mathcal{O}$ . El vector  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular de estos ejes (representados con líneas a trazos



en la figura adjunta) con respecto a los ejes de  $S$ .

**EJEMPLO:** Se puede tener ejes fijos a una mesa (sistema  $S$ ). El sistema  $S'$  puede ser un libro que es movido en círculos sobre la mesa, manteniendo sus aristas siempre paralelas a las de la mesa. En tal caso  $\vec{\Omega} = 0$  porque los ejes de  $S'$  no rotan con respecto a los ejes de  $S$ . El movimiento circular del libro es descrito por  $\vec{R}(t)$ .

Una notación compacta es

$$(S, S') \sim [\vec{R}(t), \vec{\Omega}(t)] \quad (7.1.1)$$

Los vectores  $\vec{R}$  y  $\vec{\Omega}$  están definidos en  $S$ . Por otro lado, desde  $S'$  los ejes de  $S$  rotan en  $-\vec{\Omega}(t)$  y la posición de  $\mathcal{O}$  con respecto a  $\mathcal{O}'$  es  $-\vec{R}(t)$ . Entonces

$$(S', S) \sim [-\vec{R}(t), -\vec{\Omega}(t)]$$

### 7.1.3. Derivadas temporales en distintos sistemas de referencia

En esta sección se define movimiento entre sistemas de referencia que tiene movimiento relativo muy general.

Se hace notar que la derivada con respecto al tiempo depende del sistema de referencia. Un caso obvio en que se aprecia esta afirmación es el caso de dos sistemas de referencia que difieren tan solo en que  $S'$  se mueve con velocidad  $\vec{V} = v_0 \hat{i}$  con respecto a  $S$ . Un cuerpo que está en reposo en  $S'$  se mueve con velocidad  $\vec{V}$  con respecto a  $S$ , es decir, mientras  $(dx'/dt)_{S'} = 0$ , se tiene que  $(dx/dt)_S = v_0$ .

La aplicación más sencilla de la ley (1.3.6) es la de variación de los vectores cartesianos  $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$  propios de  $S'$  con respecto al sistema de referencia  $S$ . El resultado es

$$\left( \frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_S = \vec{\Omega}(t) \times \hat{i}' \quad (7.1.2)$$

y relaciones similares para los otros vectores base en  $S'$ .

Una vez que se tiene esta relación resulta fácil obtener la derivada de una función vectorial cualquiera

$$\vec{B}(t) = b_1(t) \hat{i}' + b_2(t) \hat{j}' + b_3(t) \hat{k}'$$

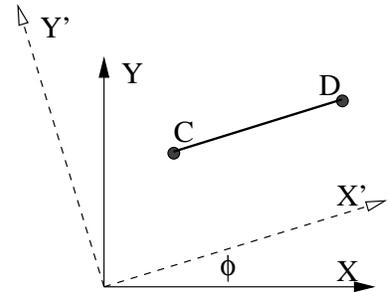
Al hacer la derivada de este vector hay dos tipos de términos: aquellos en que aparecen las derivadas de los coeficientes  $b_a(t)$  y otros en que aparece la derivada de los vectores unitarios. Al agruparlos se obtiene

$$\left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_S = \left( \frac{db_1}{dt} \hat{i}' + \dots \right) + \vec{\Omega} \times (b_1 \hat{i}' + \dots) \quad (7.1.3)$$

pero el primer paréntesis a la derecha es la derivada de  $\vec{B}$  en  $S'$  ya que en  $S'$  los vectores unitarios prima son fijos. De aquí que el resultado final sea

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{B}} \quad (7.1.4)$$

Por ejemplo: el vector  $\vec{CD}$  que describe la longitud de un sistema de dos partículas unidas por un resorte que se mueve en el plano  $XY$  de  $S$  girando con velocidad angular  $\dot{\phi}(t)$ . Este vector tiene longitud variable  $h(t)$ . Este vector también puede ser descrito con respecto a un sistema de referencia  $S'$  que tiene el mismo origen que  $S$  pero cuyo eje  $X'$  se mantiene paralelo al sistema, es decir,  $\vec{CD} = h(t)\hat{i}'$ . En  $S'$  por definición el vector es siempre paralelo a  $X'$ , y solo su longitud cambia en el tiempo,  $(d\vec{CD}/dt)_{S'} = \dot{h}\hat{i}'$ , mientras que en  $S$  también cambia su orientación.



**AFIRMACIÓN:** Si  $(S_0, S_1) \sim [\vec{R}_1, \vec{\Omega}_{01}]$  y  $(S_1, S_2) \sim [\vec{R}_2, \vec{\Omega}_{12}]$  se puede afirmar que  $(S_0, S_2) = [\vec{R}_1 + \vec{R}_2, \vec{\Omega}_{02} = \vec{\Omega}_{01} + \vec{\Omega}_{12}]$ . En palabras: si la velocidad angular de  $S_1$  es  $\vec{\Omega}_{01}$  con respecto a  $S_0$  y la velocidad angular de  $S_2$  es  $\vec{\Omega}_{12}$  con respecto a  $S_1$  entonces la velocidad angular de  $S_2$  con respecto a  $S_0$  es

$$\vec{\Omega}_{02} = \vec{\Omega}_{01} + \vec{\Omega}_{12} \quad (7.1.5)$$

Lo anterior se puede resumir diciendo que las velocidades angulares relativas se suman vectorialmente.

Para demostrar esto se hace uso de (7.1.4) con  $\vec{B}$  un vector variable cualquiera

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{S_0} &= \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{S_1} + \vec{\Omega}_{01} \times \vec{B} \\ &= \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{S_2} + \vec{\Omega}_{02} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

pero también es cierto que

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{S_2} + \vec{\Omega}_{12} \times \vec{B} \quad (7.1.7)$$

Si esta última relación se reemplaza en la primera y el resultado se compara con la segunda relación se concluye (7.1.5).

## 7.2. Velocidad y aceleración en un sistema no inercial

La fórmula general (7.1.4) será utilizada para relacionar la cinemática descrita desde dos sistemas de referencia diferentes.

Consideremos la descripción del movimiento de un punto  $P$  visto desde los sistemas de referencia  $S$  y  $S'$  que tienen una velocidad angular relativa  $\vec{\Omega}$ . La posición de  $P$  es  $\vec{r}(t)$  con respecto a  $S$  y es  $\vec{r}'(t)$  con respecto a  $S'$  y la relación entre ambos vectores posición es

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t) \quad (7.2.1)$$

El vector  $\vec{R}$  es el que va desde  $\mathcal{O}$  a  $\mathcal{O}'$ .

Directamente de (7.1.4) se obtiene que

$$\left( \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \right)_S = \vec{v}'(t) + \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}'(t) \quad (7.2.2)$$

Combinando las dos últimas relaciones se deduce que

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{R}} + \vec{v}'(t) + \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}'(t) \quad (7.2.3)$$

Al tomar la derivada de la relación anterior con respecto al tiempo en el sistema  $S$  se debe calcular primero

$$\left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{v}' \quad (7.2.4)$$

El primer término de la derecha es la aceleración  $\vec{a}'$  en  $S'$ . La derivada del segundo término en (7.2.3) es

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{\Omega} \times \vec{r}'}{dt} \right)_S &= \left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_S \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S \\ &= \ddot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \left( \vec{v}' + \left( \vec{\Omega} \times \vec{r}' \right) \right) \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

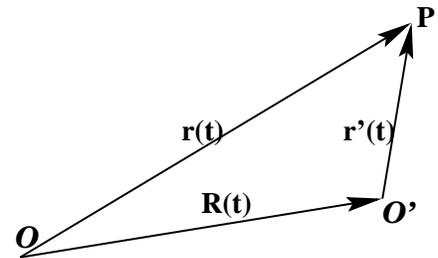
Entonces la aceleración es

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_S \\ &= \ddot{\vec{R}} + \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_S + \left( \frac{d\vec{\Omega} \times \vec{r}'}{dt} \right)_S \\ &= \ddot{\vec{R}} + \vec{a}' + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \ddot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{r}' \right) \end{aligned}$$

que se puede ordenar para obtener finalmente

$$\vec{a}' = \vec{a} - \ddot{\vec{R}} - \ddot{\vec{\Omega}} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{r}' \right) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' - \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (7.2.6)$$

De los cinco términos del lado derecho, el tercero,  $-\ddot{\vec{\Omega}} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{r}' \right)$ , se llama *aceleración centrífuga* y el cuarto,  $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}'$ , se llama *aceleración de Coriolis*.



El punto móvil  $P$  es visto desde un sistema de referencia  $S$  con origen en  $\mathcal{O}$  y desde un sistema de referencia  $S'$  con origen en  $\mathcal{O}'$  tal que el vector posición  $\vec{R}$  de  $\mathcal{O}'$ . Los ejes de  $S'$  rotan con respecto a  $S$  con velocidad angular  $\vec{\Omega}$ .

## 7.3. La ecuación de movimiento en un sistema no inercial

La ecuación de Newton  $m\vec{a} = \vec{F}$ , válida en el sistema de referencia inercial  $S$ , toma en el sistema de referencia arbitrario  $S'$ , la forma

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' \quad (7.3.1)$$

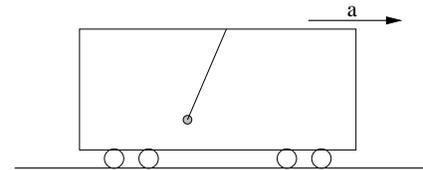
El primer término de la derecha es la fuerza total que se tiene en el sistema de referencia inercial  $S$ . Los cuatro términos restantes a la derecha se les suele llamar *seudo fuerza* o también *fuerzas no inerciales*. De ellos, aquel que es cuadrático en  $\vec{\Omega}$  es la *fuerza centrífuga* y el que sigue es la *fuerza de Coriolis*. El último término se denomina *fuerza transversal*.

En un sentido estricto la Tierra no es un sistema inercial y se verá algunos ejemplos que muestran los efectos de esto. Sin embargo para muchos otros fenómenos los efectos noinerciales de la Tierra son tan pequeños que es razonable despreciarlos.

EJEMPLO: El sistema de referencia  $S'$  de un ascensor al que se le acaban de cortar los cables es no inercial. Cae a lo largo del eje  $Z$  con aceleración  $\ddot{\vec{R}} = \vec{g}$ . Respecto al edificio  $S$  no hay rotación, esto es,  $\vec{\Omega} = 0$  por lo que la ecuación de movimiento de un objeto  $P$  soltado dentro del ascensor  $S'$  que cae es  $m\vec{a}' = m\vec{g} - m\vec{g} = 0$ , es decir,  $P$  se mueve con velocidad  $\vec{v}'$  uniforme. En  $S'$  el cuerpo flota libremente. ◀

EJEMPLO: Normalmente una plomada es un péndulo en reposo y sirve para determinar la dirección vertical: la dirección de la tensión—péndulo en reposo—define la vertical.

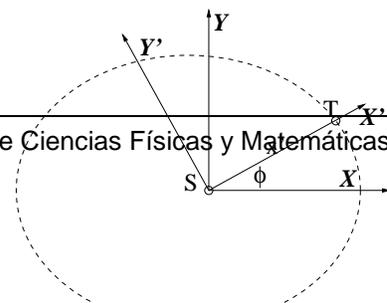
En el caso de un vehículo  $S'$  con aceleración horizontal constante  $\ddot{\vec{R}} = \vec{a} = a\hat{i}$ , con respecto a un suelo  $S$  inercial, la masa en el extremo del hilo de un péndulo en reposo—con respecto al vehículo—está sometida a las fuerzas inerciales de la tensión  $\vec{T}$  del hilo y a su propio peso,  $m\vec{g} = -mg\hat{k}$ . La ecuación (7.3.1), tomando en cuenta que  $\vec{a}' = 0$  se reduce a  $\vec{T} = -m(\vec{g} - \vec{a})$ . Es decir, la plomada



determina una “vertical” que apunta en diagonal hacia atrás si  $a > 0$ . Si alguien camina hacia adelante dentro del vehículo tendrá la sensación de estar subiendo por un plano inclinado caracterizado por una pendiente  $\alpha$  tal que  $\tan \alpha = a/g$ . ◀

EJEMPLO:

Consideremos un sistema  $S'$  de ejes coordenados con origen en el centro del Sol y tal que un satélite (puede ser la Tierra) está siempre sobre el eje  $X'$ .



Este sistema  $S'$  está rotando a la velocidad angular  $\dot{\phi}$  del satélite. Esta vez  $\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{k}$  mientras que  $\vec{R} = 0$  todo el tiempo. Entonces  $\vec{r}' = x' \hat{i}'$ , pero es natural llamar  $r$  a  $x'$ , por lo cual  $\vec{r}' = r \hat{i}'$ ,  $\vec{v}' = \dot{r} \hat{i}'$  y  $\vec{a}' = \ddot{r} \hat{i}'$ , es decir, por elección de las coordenadas en el sistema  $S'$  la aceleración sólo apunta en la dirección del eje  $\hat{i}'$ .

Trabajando la ecuación (7.3.1) se obtiene que

$$m\ddot{r}\hat{i}' = \vec{F}_{\text{gravit}} + m\dot{\phi}^2 r \hat{i}' - \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (\dot{\phi} r^2) \hat{j}' \quad (7.3.2)$$

Al igualar separadamente los coeficientes de los dos vectores unitarios se obtiene que  $\frac{d}{dt} (\dot{\phi} r^2) = 0$ , es decir,  $m\dot{\phi} r^2 = \ell$  es constante y la ecuación de movimiento en  $S'$  se reduce a

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} \right) \quad (7.3.3)$$

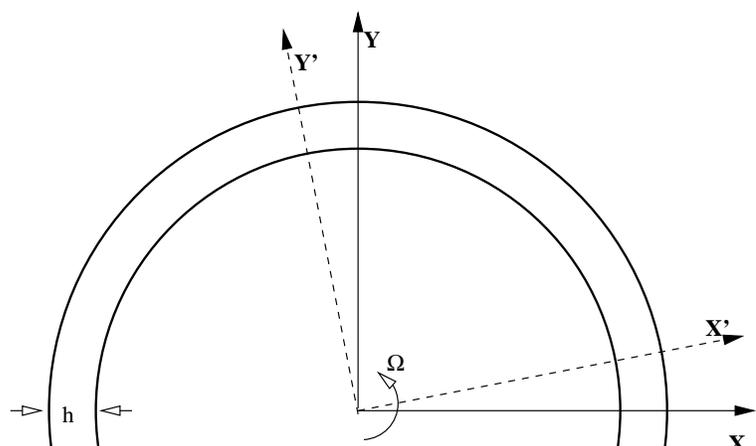
Así se ha obtenido la ecuación de movimiento unidimensional de una partícula sometida a un potencial  $-\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$  que contiene al potencial gravitacional y al potencial asociado a la fuerza centrífuga. ◀

## 7.4. Nave espacial que rota

Para hacer largos viajes espaciales parece conveniente que los astronautas vivan en un ambiente que simule la gravedad terrestre. Esto se logra con una nave que esté rotando. Consideremos una nave que se mueve en el espacio interestelar con velocidad uniforme, esto es con  $\vec{R} = 0$ , que tiene forma de un gran anillo de radio  $r_0$  como la que se describe en la figura adjunta.

Se considerará ejes cartesianos  $X Y$  para el sistema inercial y ejes  $X' Y'$  fijos a la nave. Ambos sistemas de ejes tienen su origen en el centro de giro de la nave. La velocidad angular de la nave, con respecto a un sistema de referencia inercial, es  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$ .

Sobre un cuerpo soltado muy cerca del suelo no está actuando fuerza inercial alguna. Le ecuación de movimiento (7.3.1) para



este caso es

$$\dot{x}' = \Omega^2 r_0 \quad (7.4.1)$$

y numéricamente se desea que esta sea precisamente la aceleración de gravedad terrestre, es decir, el diseño tiene la condición

$$\Omega^2 r_0 = g \quad (7.4.2)$$

Puede verse que si  $r_0$  es de alrededor de un kilómetro entonces la nave debe girar aproximadamente dando una vuelta por minuto.

Un cuerpo que se mueve por el “corredor central” de la nave mantiene  $\rho = r_0$  constante ( $\dot{\rho} = 0$ ) y tanto la fuerza centrífuga como la de Coriolis apuntan radialmente:

$$\vec{F}_{\text{centrof}} + \vec{F}_{\text{Coriolis}} = m\Omega r_0 (2\dot{\phi} + \Omega) \hat{\rho}$$

y puede hacerse cero. La ecuación de movimiento completa tiene aceleración y fuerzas solo en la dirección  $\hat{\rho}$ , incluyendo la normal  $\vec{N} = -N \hat{\rho}$ , y es

$$-m (r_0 \dot{\phi}^2) = -N + m\Omega r_0 (2\dot{\phi} + \Omega) \Rightarrow N = mr_0 (\dot{\phi} + \Omega)^2$$

de donde se ve que la normal se anula cuando  $\dot{\phi} = -\Omega$ .

## 7.5. Efectos de la rotación de la Tierra

### 7.5.1. Cuestiones generales

Si un sistema  $S' = \{\mathcal{O}, (X', Y', Z)\}$  (Tierra) rota con velocidad angular  $\vec{\Omega}$  constante con respecto al sistema inercial  $S = \{\mathcal{O}, (X, Y, Z)\}$ , y  $\vec{R} = 0$  y  $Z' = Z$ , entonces  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$ . Los vectores posición, velocidad y aceleración de un cuerpo  $P$  en la Tierra son, como siempre,

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= z \hat{k} + \rho \hat{\rho} \\ \vec{v}' &= \dot{z} \hat{k} + \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} \\ \vec{a}' &= \ddot{z} \hat{k} + (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

donde  $\rho$  es la distancia desde el punto móvil  $P$  y el eje de rotación de la Tierra y el ángulo  $\phi$  define el meridiano en el cual está  $P$ , es decir, es la coordenada cilíndrica  $\phi$  de  $P$  con respecto al eje  $X'$  fijo al sistema noinercial  $S'$ .