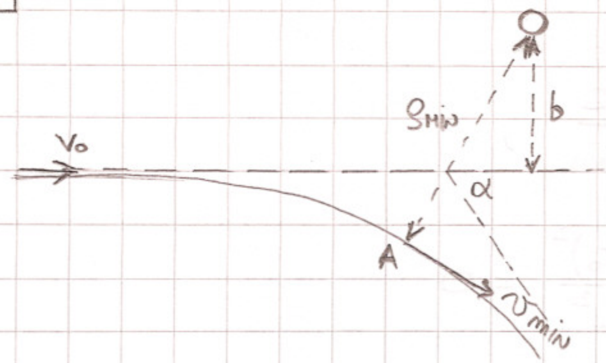
D8

GABRIEL CUEVAS
AUX FI21A



$$f(\rho) = \frac{cm}{\rho^2}$$

COMENZAMOS POR DEFINIR EL POTENCIAL ASOCIADO A LA FUERZA $f(\rho)$

$$\Rightarrow f = -\frac{\partial U}{\partial \rho} \Rightarrow \int f(\rho)\, d\rho = -\int dU$$

$$\Rightarrow U(\rho) = \frac{cm}{\rho}$$

ASÍ, PODEMOS ESCRIBIR LA ENERGÍA:

$$E_{INIC} = \frac{1}{2} m v_0^2$$: ASUMIMOS QUE LA PARTÍCULA VIENE DEL INFINITO $\Rightarrow U(\rho) \xrightarrow[\rho \to \infty]{} 0$

LUEGO LA ENERGÍA EN EL PUNTO MÍNIMO ESTÁ DADA POR:

$$E_A = \frac{1}{2} m v_{MIN}^2 + \frac{cm}{\rho_{MIN}}$$

CONSERVAMOS LA ENERGÍA:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_{min}^2 + \frac{cm}{\rho_{min}}$$

$$\Rightarrow v_{MIN}^2 = v_0^2 - \frac{2c}{\rho_{MIN}} \quad (*)$$

EN COORDENADAS POLARES SABEMOS QUE

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Y ADEMÁS, AL TRATARSE DE UNA FUERZA CENTRAL

$$\Rightarrow \vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = cte$$

INICIALMENTE $\vec{l}_i = m b v_0 \hat{k}$

PARA ρ_{MIN}: $\vec{l}_{MIN} = m \rho_{MIN} v_{MIN} \hat{k}$

$$\Rightarrow \rho_{MIN} v_{MIN} = b v_0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{MIN} = \frac{b v_0}{\rho_{MIN}}}$$

REEMPLAZAMOS v_{MIN} EN (*):

$$\Rightarrow \left(\frac{b v_0}{\rho_{MIN}}\right)^2 = v_0^2 - \frac{2C}{\rho_{MIN}}$$

$$\Rightarrow v_0^2 - \frac{2C}{\rho_{MIN}} - \frac{(b v_0)^2}{\rho_{MIN}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \rho_{MIN}^2 - \frac{2C}{v_0^2}\rho_{MIN} - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \rho_{MIN} = \frac{\frac{2C}{v_0^2} \pm \sqrt{\frac{4C^2}{v_0^4} + 4b^2}}{2}$$

$$\boxed{\rho_{MIN} = \frac{C + \sqrt{C^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2}}$$

AQUÍ ELEGIMOS LA SOLUCIÓN CON LA RAÍZ CON EL SIGNO MÁS, EL OTRO CASO (RAÍZ NEGATIVA) ENTREGA $\rho_{MIN} < 0$ LO CUAL NO PUEDE SUCEDER ($\rho > 0$).

PARA UNA FUERZA GRAVITACIONAL DEL TIPO:

$$f(\rho) = -\frac{GMm}{\rho^2}$$

SE TIENE QUE, SI $h = \rho^2\dot{\theta} = b v_0$

$$\rho(\theta) = \frac{1}{A\cos\theta + \frac{GM}{h^2}}$$

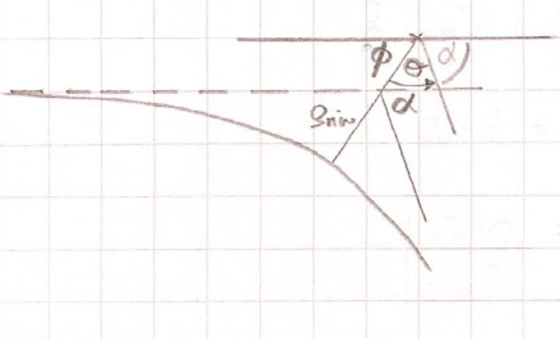
ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA OBTENIDA A TRAVÉS DE LA FORMULACIÓN DE BINET

EN NUESTRO CASO:

$$f(\rho) = \frac{Cm}{\rho^2} \Rightarrow C = -GM$$

$$\Rightarrow \rho(\theta) = \frac{1}{A\cos\theta - \frac{CM}{h^2}}$$

AHORA VEAMOS EL DIBUJO DE LA ÓRBITA:



DEBIDO A LA SIMETRÍA QUE SE PRODUCE CUANDO $\rho = \rho_{MIN}$, PODEMOS AFIRMAR QUE $\theta = \phi$ CUANDO θ ALCANZA A α.
ADEMÁS VEMOS QUE CUANDO $\rho = \rho_{MIN}$, $\theta = 0$.

$$\Rightarrow \quad \rho_{MIN} = \frac{1}{A\cos 0 - \frac{C}{h^2}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{\rho_{MIN}} + \frac{C}{h^2}$$

AHORA QUE TENEMOS DESPEJADO EL PARÁMETRO A, CALCULAMOS EL $\rho(\theta)$ PARA $\theta = \phi \Rightarrow \alpha = \pi - 2\phi$

$$\rho(\phi) = \frac{1}{A\cos\phi - \frac{C}{h^2}}$$

$$\Rightarrow A\cos\phi = \frac{1}{\rho(\phi)} + \frac{C}{h^2}$$

PERO VEMOS QUE EN EL LÍMITE DEL ÁNGULO, CUANDO ALCANZA EL ÁNGULO DE DISPERSIÓN, LA PARTÍCULA TIENDE A ESTAR EN EL PTO. MÁS LEJANO DE SU ÓRBITA:

$$\Rightarrow \quad \lim_{\theta \to \alpha} \rho(\theta) \longrightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{\rho(\phi)} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow A\cos\phi = \frac{C}{h^2}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{C}{Ah^2}$$

$$\Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{C}{Ah^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \pi - 2\arccos\left(\frac{C}{Ah^2}\right)}$$

GABRIEL CUEVAS
AUX. FI21A