que claramente muestra que $v_f^2 < v_0^2$. La igualdad se da tan solo si $\eta = 0$.

♠ *Deduzca que el viaje de regreso tarda un tiempo Δ,*

$$\Delta = \frac{v_\infty}{g} \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v_\infty^2}}\right) \tag{3.4.32}$$

3.5. Problemas

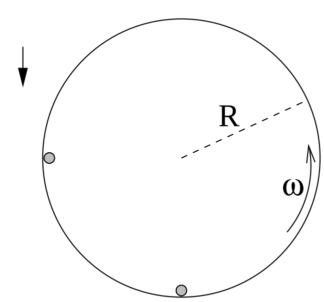
Este capítulo tiene varios problemas propuestos en medio del texto. Ellos están señalados con el signo ♠. Acá se ofrece otros más.

3.1 *Cuando comienza a girar un disco horizontal con aceleración angular $\ddot{\phi} = d\omega/dt = \alpha_0$ una hormiga se encuentra durmiendo a distancia R del centro de rotación. Cuando la velocidad angular alcanza el valor ω_0 la hormiga comienza a deslizar. Obtenga el valor de coeficiente de roce estático hormiga-disco.*

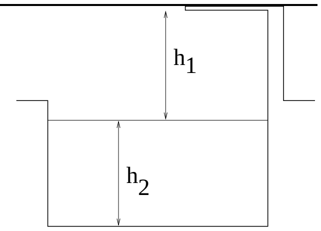
3.2 *Sobre una superficie horizontal hay un cuerpo de masa m unido a un resorte horizontal de contante elástica k y longitud natural D_0. El coeficiente de roce dinámico entre el cuerpo y la superficie es μ. Si desde el reposo el cuerpo es liberado cuando el resorte está estirado un largo $D(0) = D_0 + d$ discuta cuantas veces el cuerpo alcanza a oscilar antes de detenerse. Analice distintas situaciones.*

3.3 *Un anillo desliza, en ausencia de gravedad y con coeficiente de roce μ en un riel circunferencial de radio R. Si en $t = 0$, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, determine $\phi(t)$.*

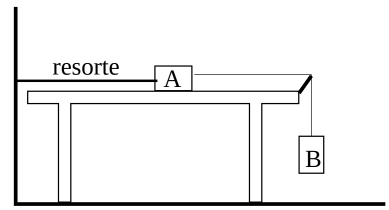
3.4 *Un cilindro de radio R y eje horizontal rota sobre su eje a velocidad angular constante ω. En el instante $t = 0$ están moviéndose solidariamente con el cilindro dos cuerpos de masa m, el primero está a la misma altura que el eje, en la zona descendiente y el segundo está en el punto más bajo. Determine los valores posibles para el coeficiente de roce estático para que estos cuerpos no deslicen en ese instante. Analice qué puede ocurrir en momentos posteriores.*



3.5 *Un cuerpo en reposo se deja caer al agua desde una altura h_1 por sobre la superficie. Desprecie las fuerzas de roce que pudiera haber con el aire. Cuando el cuerpo penetra el agua aparecen dos fuerzas, la de* *roce viscoso, $\vec{F}_{rvl} = -c\vec{v}$ y una fuerza llamada empuje, vertical hacia arriba de magnitud $\lambda\, m g$. Determine el valor máximo que puede tomar h_1 para que el cuerpo no toque el fondo, que está a distancia h_2 de la superficie.*

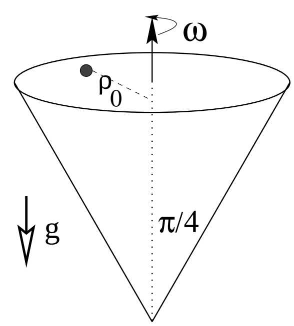


3.6 *Un cuerpo A de masa m está sobre una mesa, unido a la pared por un resorte de constante elástica k y largo natura D_0. De A sale un hilo tirante horizontal que pasa por un apoyo ideal (sin roce) y luego de este hilo cuelga un cuerpo B que también tiene masa m.*



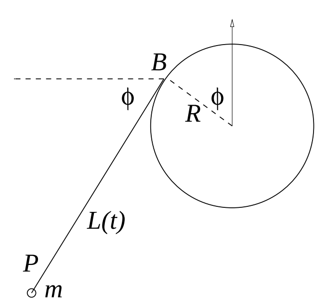
Se conoce los coeficientes $\mu_e < 1$ y μ_d de A con la mesa y el sistema se suelta desde el reposo en el momento en que el resorte tiene su largo natural. ***a)*** *Determine el largo máximo que alcanza el resorte;* ***b)*** *encuentre el valor máximo que toma la rapidez desde el instante inicial hasta el momento del estiramiento máximo;* ***c)*** *¿cuál es el valor mínimo de μ_d para que los bloques queden en reposo en el momento del estiramiento máximo?*

3.7 *Se tiene una superficie cónica que gira con velocidad angular contante ω en torno a su propio eje de simetría, que se mantiene vertical. El ángulo entre el eje y una generatriz es $\frac{\pi}{4}$. En la superficie interna está apoyado un cuerpo de masa m, a distancia ρ_0 del eje, el cual, debido al roce con coeficiente μ_e, no desliza a pesar de su peso.* ***a)*** *Obtenga la velocidad angular $\omega = \omega_c$ necesaria para que tal fuerza sea exactamente nula.* ***b)*** *Suponga que ahora $\omega > \omega_c$ y obtenga el máximo valor que puede tener ω para que el cuerpo no deslice.*



3.8 *Hay un hilo enrollado alrededor de un cilindro de radio R. En la punta del hilo hay un cuerpo de masa m que se suelta, cuando $\phi(0) = 0$, con velocidad inicial $\vec{v}_0$ perpendicular al hilo, lo que determina que el hilo se comienza a enrollar.*

La distancia inicial entre el cuerpo y el punto B de tangencia del hilo con el cilindro es L_0 (ver figura). **a)** Determine la ecuación de movimiento. **b)** Obtenga la velocidad angular $\dot{\phi}$ en función de ϕ. **c)** Suponiendo que el hilo se corta si la tensión sobrepasa el valor $T_{\max}$ obtenga el valor de ϕ en el momento del corte.



Indicación: Puede convenir tomar el origen en el eje del cilindro y escribir el vector posición del cuerpo en función de vectores unitarios $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ asociados al punto B de tangencia del hilo. Es decir, el vector posición del cuerpo masivo es suma de los vectores posición del punto B y el vector que apunta en la dirección del hilo y que es tangente al cilindro, en la dirección $\hat{\phi}$.

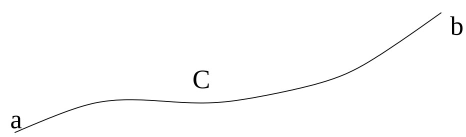
Capítulo 4

Trabajo y energía

4.1. Trabajo y energía cinética

El trabajo dW que efectua una fuerza apliacada $\vec{F}$ sobre un cuerpo P que se desplaza una distancia $d\vec{r}$ es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.1.1}$$



El trabajo de una fuerza $\vec{F}$ cuando el cuerpo se desplaza desde un punto a a un punto b a lo largo de un camino C. Sólo en casos especiales la integral (4.1.2) no depende del camino C seguido al hacer la integral.

Si no hay desplazamiento no hay trabajo.

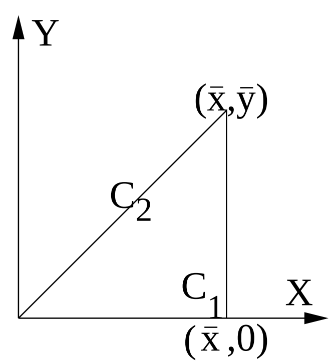
Si la fuerza varía de punto en punto: $\vec{F}(\vec{r})$ y el cuerpo P se mueve desde el punto a hasta el punto b, por el camino C, entonces el trabajo efectuado por la fuerza es

$$W_{a\to b}(C) = \int_{a\ (C)}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.1.2}$$

El trabajo se mide en `Joule`, que es una unidad de energía.

<u>EJEMPLO:</u> Considérese un cuerpo que se mueve en el plano XY debido a una fuerza dada por la expresión

$$\vec{F} = -\frac{Ax^2y^5}{5}\,\hat{\imath} - \frac{Bx^3y^4}{3}\,\hat{\jmath} \tag{4.1.3}$$



Se hará la integral de trabajo asociada a esta fuerza, entre los puntos $(0,0)$ y $(\bar{x},\bar{y})$ siguiendo dos caminos: C_1 es el camino que primero va en forma recta desde el origen hasta $(\bar{x},0)$ y luego en forma recta desde este último punto a $(\bar{x},\bar{y})$ y C_2 es el camino recto entre los dos puntos extremos.

La integral de trabajo por C_1 es

$$\begin{aligned} W(C_1) &= \int_0^{\bar{x}} \vec{F}\cdot\hat{\imath}\,dx + \int_{0\quad \mathrm{x}=\bar{\mathrm{x}}(y=0)}^{\bar{y}} \vec{F}\cdot\hat{\jmath}\,dy \\ &= 0 - \frac{\bar{x}^3}{3}\frac{B\bar{y}^5}{5} \\ &= -\frac{B\bar{x}^3\bar{y}^5}{15} \end{aligned}$$

Para poder hacer la integral por C_2 se debe tener claro que (a) la recta C_2 es descrita por la ecuación $\bar{x}y = \bar{y}x$, entonces se puede, por ejemplo, integrar con respecto a x usando un integrando donde se ha reemplazado $y = \bar{y}x/\bar{x}$; (b) se debe usar $d\vec{r} = \hat{\imath}\,dx + \hat{\jmath}\,dy = \left(\hat{\imath} + \hat{\jmath}\,\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) dx$. (c) Ahora es trivial hacer el producto punto $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ e integrar con respecto a x lo que da:

$$W(C_2) = -\left(\frac{A}{40} + \frac{B}{24}\right)\bar{x}^3\bar{y}^5$$

que no coincide con $W(C_1)$ salvo que $A = B$. ◄

♣ *Obtenga la forma de $d\vec{r}$ en el ejemplo anterior con $\bar{x} = \bar{y}$ para el caso en que se desee hacer la integral a lo largo de una semicircunferencia que parte del origen hacia arriba y tiene su centro en $(\bar{x}, 0)$. Calcule la integral de camino en el caso $A = B$.*

En la defincíón (4.1.2) no se ha dicho que $\vec{F}$ sea la única causa del movimiento. Cuando sobre el cuerpo P están actuando varias fuerzas $\vec{F}_k$, se puede definir un trabajo $W_{a\to b}^{(k)}(C)$ asociado a cada una de ellas usando el camino C de a a b,

$$W_{a\to b}^{(k)}(C) = \int_{a\ \ (C)}^{b} \vec{F}_k\cdot d\vec{r} \tag{4.1.4}$$

Si el desplazamiento es perpendicular a la fuerza considerada, esa fuerza no ejerce trabajo.

El *trabajo total* es el que efectua la fuerza total,

$$\begin{aligned} W_{a\to b}^{\mathrm{total}}(C) &= \int_{a\ \ (C)}^{b} \vec{F}^{\,\mathrm{total}}\cdot d\vec{r} \\ &= m\int_{a\ \ (C)}^{b} \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} \\ &= m\int_{t_a\ \ (C)}^{t_b} \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt \\ &= m\int_{\vec{v}_a\ \ (C)}^{\vec{v}_b} \vec{v}\cdot d\vec{v} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m}{2}\int_{v_a^2\ (C)}^{v_b^2} dv^2 \\
&= \frac{m}{2}v_b^2 - \frac{m}{2}v_a^2 \qquad (4.1.5)
\end{aligned}
$$

Se define la *energía cinética* K de un cuerpo de masa m y velocidad $\vec{v}$ como

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (4.1.6)$$

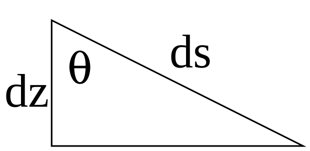
Y de aquí que el trabajo total pueda expresarse como la diferencia entre la energía cinética final menos la energía cinética inicial.

$$W_{a\to b}^{\text{total}}(C) = K_b - K_a \qquad (4.1.7)$$

El signo de W^{total} indica si el sistema ha ganado ($W > 0$) o perdido ($W < 0$) energía cinética. Por ejemplo, si una partícula es lanzada verticalmente hacia arriba con rapidez inicial v_0 y en algún momento se detiene, el trabajo efectuado por la fuerza total a lo largo de la trayectoria, sobre esa partícula, desde que fue lanzada hasta que se detiene, es $-\frac{1}{2}mv_0^2$.

El trabajo de la fuerza total en el caso de un cuerpo que se mueve con roce sobre una superficie a rapidez constante, es nulo. Pero, para comprender bien los conceptos es preferible separar el trabajo efectuado por la fuerza f que arrastra al cuerpo, W_f, del trabajo W_r asociado a la fuerza de roce. El trabajo W_f es positivo porque el desplazamiento apunta en la misma dirección que la fuerza, mientras que W_r es negativo y se cumple que $W_f + W_r = 0$.

> ≫ En un movimiento circunferencial con velocidad angular constante la fuerza total no efectua trabajo, por dos razones: ella es perpendicular al desplazamiento y la rapidez no cambia.
>
> Si un cuerpo desliza con roce sobre una superficie en reposo, la fuerza normal $\vec{N}$ no efectua trabajo, porque es perpendicular al desplazamiento.



Cuando un carro baja por una montaña rusa sin roce, ¿depende el trabajo que efectua el peso de la forma de la montaña? Al avanzar una distancia $ds = \|d\vec{r}\|$ en una zona en la cual el riel forma un ángulo θ con la vertical, el carro desciende una altura $dz = ds\cos\theta$. El trabajo infinitesimal es $dW = m\vec{g}\cdot d\vec{r} = mg\,dz$. Al integrar se obtiene que el trabajo solo depende de la altura descendida z: $W = mgz$, que no depende de la forma del riel.

<u>EJEMPLO:</u> Se ilustra una forma como se puede utilizar la relación (4.1.7) para resolver un problema. Se considerá el ejemplo visto en §3.3.2 de un péndulo de largo R apoyado en un plano inclinado, con el cual tiene roce, figura asociada a la ecuación (3.3.9). El desplazamiento es $d\vec{r} = \hat{\phi}\,R\,d\phi$. De las fuerzas, tanto la tensión $\vec{T}$ del hilo, como la normal

$\vec{N}$ son perpendiculares al desplazamiento, por tanto no efectuan trabajo. Las fuerzas que sí contribuyen son la fuerza de roce $\vec{F}_{\rm RD} = -\mu N \hat{\phi}$, (con $N = mg\cos\alpha$) y la componente del peso a lo largo de $\hat{\phi}$, que es $\hat{\phi}\, mg\sin\alpha\cos\phi$. El trabajo de la fuerza total, entonces, es el trabajo que efectuan estas dos fuerzas:

$$W^{\rm total}_{\phi=0\to\phi=\phi_1} = \int_0^{\phi_1} (mg\sin\alpha\cos\phi - \mu\, mg\cos\alpha)\, R\, d\phi \tag{4.1.8}$$

donde ϕ_1 es el ángulo en el cual el péndulo se detiene. Como ha partido del reposo el trabajo total tiene que ser cero y entonces la integral anterior debe ser nula

$$mg\sin\alpha\sin\phi_1 - \mu\, mg\cos\alpha\,\phi_1 = 0 \tag{4.1.9}$$

que implica la relación

$$\mu = \frac{\sin\phi_1}{\phi_1}\tan\alpha$$

que es (3.3.18).

4.2. Potencia

Se define la *potencia* como la variación del trabajo con el tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{4.2.1}$$

Si esta potencia es positiva se trata de potencia entregada al sistema y, si es negativa, es potencia que el sistema pierde. Cuando se trata de la potencia asociada a la fuerza total, P es energía cinética por unidad de tiempo que el sistema gana ($P > 0$) o pierde ($P < 0$).

Si una de las fuerzas actuando sobre un cuerpo es $\vec{F}$ y en ese instante su velocidad en $\vec{v}$ entonces

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt \tag{4.2.2}$$

y la potencia asociada a esta fuerza es

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \tag{4.2.3}$$

Si la dependencia de P en el tiempo es conocida, el trabajo puede calcularse como

$$W = \int_{t_0}^{t} P(t')\,dt'$$

≫ Un cuerpo en caida libre tiene velocidad $\vec{v} = -gt\,\hat{k}$ y la fuerza que está actuando es el peso $\vec{F} = -mg\hat{k}$. La potencia que el peso le está entregando al cuerpo que cae es $P = (-gt\hat{k})\cdot(-mg\hat{k}) = mg^2 t$.

Pero si el cuerpo ha sido lanzado hacia arriba, entonces $\vec{v} = (v_0 - gt)\,\hat{k}$ y, mientras $t < v_0/g$, se está perdiendo potencia: $P = -(v_0 - gt)\,mgt$, porque el trabajo de la fuerza peso en ese lapso es negativo.

≫ La fuerza efectiva que mantiene a velocidad constante a un automóvil es opuesta al roce viscoso cuadrático, y es $F=\eta\, v^2$. La potencia entonces es $P=\eta\, v^3$, lo que muestra lo rápido que aumenta la potencia consumida a medida que aumenta la velocidad.

4.3. La energía cinética de un sistema

Recordando que $\vec r_a = \vec R_G + \vec\rho_a$ se puede demostrar que la energía cinética puede ser separada en la energía cinética del sistema en su conjunto y la energía cinética total con respecto al centro de masa:

$$
\begin{aligned}
K^{\text{tot}} &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a {v_a}^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec V_G + \dot{\vec\rho}_a\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left(V_G^2 + \dot\rho_a^2 + 2\dot{\vec\rho}_a\cdot\vec V_G\right)
\end{aligned}
$$

pero el último término en el paréntesis es nulo debido a que $\sum_a m_a\vec\rho_a = 0$. De aquí que

$$
K^{\text{tot}} = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a\dot\rho_a^2 \tag{4.3.1}
$$

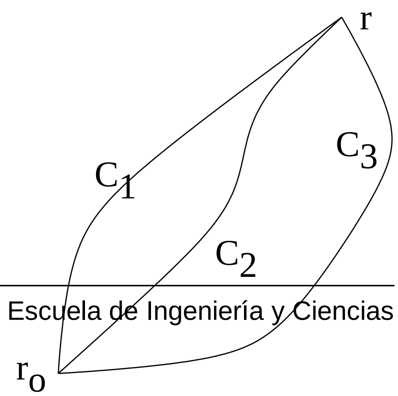
La energía cinética total se divide en la energía cinética asociada a la masa total con la velocidad del centro de masa más la energía cinética con respecto al sistema de referencia G.

4.4. Fuerzas conservativas y energía potencial

4.4.1. Energía mecánica

Se dice que una fuerza es *conservativa* cuando la integral de trabajo (4.1.2) que se le asocia no depende del camino C escogido. Si se integra—por diversos caminos—entre un punto $\vec r_0$, que se fija arbitrariamente, y un punto $\vec r$, siempre se obtiene el mismo valor $W(\vec r)$.

Resulta natural, entonces, definir la función asociada a la integral trabajo.



El trabajo de una fuerza $\vec F$ conservativa que se calcula con ca-

Supongamos que se escoge un punto arbitrario $\vec{r}_0$ y se hace la integral de trabajo desde este punto a un punto cualquiera $\vec{r}$. En general esta integral depende del camino escogido. Si la fuerza que se está considerando es tal que el trabajo que se le asocia no depende del camino de integración, sino que da el mismo valor cada vez que se integra desde $\vec{r}_0$ hasta $\vec{r}$, adquiere sentido definir una función

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.4.1}$$

a la que se llama *energía potencial* asociada a la fuerza $\vec{F}$. Estrictamente debiera decirse que U depende tanto de $\vec{r}$ como de $\vec{r}_0$, pero ya se verá que $\vec{r}_0$ siempre es dejado fijo mientras que el otro punto es variable y juega un papel interesante.

> $\gg$ En el párrafo anterior se ha dicho que existen fuerzas, llamadas *conservativas*, para las cuales la integral de trabajo no depende del camino de integración y para estas fuerza se puede definir una función escalar $U(\vec{r})$ llamada energía potencial.

Si la fuerza total $\vec{F}^{\text{total}}$, actuando sobre un cuerpo, es una fuerza conservativa, entonces el trabajo que esta fuerza efectua cuando el cuerpo se desplaza de a a b es

$$\begin{aligned} W_{a\to b} &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_0} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_b} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_a} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_b} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\ &= U(\vec{r}_a) - U(\vec{r}_b) \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

pero ya se sabe que también es

$$W_{a\to b} = K_b - K_a \tag{4.4.3}$$

lo que implica que

$$K_b + U(\vec{r}_b) = K_a + U(\vec{r}_a) \tag{4.4.4}$$

Pero los puntos a y b son arbitrarios, por lo cual se puede afirmar que la *energía mecánica total*

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r})} \tag{4.4.5}$$

permanece constante durante la evolución del movimiento.

$\gg$ Conclusión: fuerza total conservativa implica que la energía mecánica total, (4.4.5) es una cantidad conservada, es decir, mantiene un mismo valor durante la evolución del sistema.

Reiterando la conservación de E se puede calcular dE/dt a partir de (4.4.5),

$$\frac{dE}{dt} = m\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} + \nabla U\ \cdot\dot{\vec{r}} = \vec{v}\cdot\left(m\dot{v}+\nabla U\right) = 0$$

donde se ha hecho uso que $dU/dt =$ “$dU/d\vec{r}$” $d\vec{r}/dt$. En efecto $\nabla U = \sum_j \partial U/\partial x_j$ y $dU/dt = \sum(\partial U/\partial x_j)(dx_j/dt) = \nabla U\cdot\vec{v}$.

Más arriba se ha dicho que si $\vec{F}$ es conservativa, entonces su integral de trabajo no depende del camino de integración. Equivalentemente *una fuerza es conservativa si y solo si ella puede ser escrita como el gradiente de la función U de energía potencial*,

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4.4.6}$$

La expresión anterior, escrita en componentes cartesianas, es

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4.4.7}$$

Si se toma cualesquiera dos de estas relaciones y se las deriva una vez más, pero con respecto a otra coordenada, se obtiene, por ejemplo,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$$

Una fuerza es conservativa si y solo si

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \tag{4.4.8}$$

que puede ser descrito en forma más compacta como la condición

$$\nabla\times\vec{F} = 0 \tag{4.4.9}$$

EJEMPLO: Si se usa (4.4.8) en el ejemplo visto inmediatamente después de (4.1.2), se obtiene $\partial F_x/\partial y = Ax^2y^4$ mientras que $\partial F_y/\partial x = Bx^2y^4$, es decir, la fuerza de ese ejemplo es conservativa si y solo si $A = B$ lo que antes se pudo meramente sospechar después de hacer dos integrales. Si $A = B$ se concluye que $U(x,y) = x^3y^5/15$. ◀

4.4.2. Energía mecánica de un sistema

Para un sistema de N partículas de masas m_a ($a = 1, 2 \dots N$) en el que sólo hay fuerzas conservativas entre las partículas y también externas (conservativas) al sistema, la energía mecánica total es

$$E = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \sum_{a<b} U_{ab}(\vec{r}_a - \vec{r}_b) + \sum_a U_a(\vec{r}_a) \tag{4.4.10}$$

El primer término es la energía cinética total, el segundo es la suma de las energías potenciales asociadas a las fuerzas internas y el último es la suma de las energías potenciales asociadas a las fuerzas externas conservativas.

Un ejemplo interesante de pensar es el sistema Tierra-Luna con la fuerza externa debiba al Sol. Para simplificar se ignora el resto de las fuerzas planetarias. La energía cinética es $K = K_{\text{Tierra}} + K_{\text{Luna}}$. La fuerza interna al sistema es la atracción gravitacional Tierra-Luna y su energía potencial es $U_{TL} = -G\frac{m_T m_L}{r^2}$. El último término en este caso es la suma de energía potencial de la Tierra debido al Sol y de la Luna debida al Sol. No consideramos más contribuciones a la energía mecánica total, porque las que faltan son muy pequeñas. Pero eso no es todo. Existen también las mareas: parte de la energía del sistema Tierra-Luna se gasta en deformar los océanos. Tal energía mecánica se pierde porque se convierte en un ligero aumento de la temperatura del agua. También la Luna, cuyo interior no es entéramente sólido, se deformaba en un remoto pasado y había pérdida debido a esto. Este último proceso de pérdida de energía se optimizó (minimizando la pérdida de energía) en miles de millones de años haciendo que la Luna siempre muestre la misma cara a la Tierra.

Comprobación de que en el caso conservativo E dada por (4.4.10) se conserva: Parte del cálculo es saber hacer $\sum_{a<b} dU_{ab}/dt$ y aun antes se debe notar que $\nabla_{\vec{r}_a} U_{ab} = \nabla_{\vec{r}_a - \vec{r}_b} U_{ab} = -\nabla_{\vec{r}_b} U_{ab}$.

$$\frac{d}{dt} \sum_{a<b} U_{ab} = \sum_{a<b} \nabla_{ab} U_{ab} \cdot (\vec{v}_a - \vec{v}_b) = \sum_{a<b} \nabla_{\vec{r}_a} U_{ab} \cdot \vec{v}_a + \sum_{a<b} \nabla_{\vec{r}_b} U_{ab} \cdot \vec{v}_b = \sum_{a,b} \nabla_{\vec{r}_a} U_{ab} \cdot \vec{v}_a$$

De aquí que

$$\frac{dE}{dt} = \sum_a \vec{v}_a \cdot \left(m_a \dot{\vec{v}}_a + \sum_b \nabla_{\vec{r}_a} U_{ab} + \nabla_{\vec{r}_a} U_a \right)$$

y el paréntesis redondo es cero porque al producto masa por aceleración de cada partícula a se le resta la fuerza total (conservativa) proveniente de los potenciales.