5.4. Oscilador amortiguado

Como se vio en las secciones anteriores, cualquier partícula cerca de un punto de equilibrio estable presenta oscilaciones armónicas con una frecuencia bien característica. En muchas ocasiones, además de las fuerzas conservativas que dan lugar al potencial que presenta el punto de equilibrio estable, hay roce viscoso. Como sabemos, el roce viscoso tiende a frenar a las partículas y por lo tanto a disminuirles su energía. Si una partícula comienza su movimiento cerca de un punto de equilibrio estable x_e y además hay roce viscoso, parece natural esperar que haya oscilaciones en torno a x_e y al mismo tiempo que disminuya su energía, manteniéndose siempre cerca del punto de equilibrio. La situación real es más compleja pudiendo no haber oscilaciones del todo, pero como se verá, la partícula se mantiene cerca del punto de equilibrio.

De esta forma, la ecuación de movimiento que describe a una partícula cerca de un punto de equilibrio estable en presencia de roce viscoso es

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) \tag{5.4.1}$$

o equivalentemente

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{5.4.2}$$

donde

$$k = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_e=0}$$

y se ha escogido el origen en la posición de equilibrio ($x_e = 0$). Nuevamente, si no fuese así, un cambio de variable permite obtener la ecuación anterior.

Para resolver este tipo de ecuaciones primero se plantea la ecuación algebraica $z^2 + \frac{c}{m}z + \omega_0^2$, cuyas raices son $-\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$, que pueden ser complejas. En efecto, la naturaleza de las soluciones de (5.4.2) depende del signo de

$$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2 \tag{5.4.3}$$

Caso $\Delta > 0$: Este caso, denominado *caso sobreamortiguado*, la solución se puede escribir en general en la forma

$$x(t) = \left(A_1 e^{t\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} + A_2 e^{-t\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}}\right) e^{-\frac{c}{2m}t} \tag{5.4.4}$$

El factor exponencial que está fuera del paréntesis domina y la función $x(t)$ decrece exponencialmente cuando el tiempo crece. Las constantes A_1 y A_2 se determinan cuando se conoce las condiciones iniciales. Compruebe que se cumple que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x_0}{2} + \frac{cx_0}{4m\sqrt{\Delta}} + \frac{v_0}{2\sqrt{\Delta}} \\ A_2 &= \frac{x_0}{2} - \frac{cx_0}{4m\sqrt{\Delta}} - \frac{v_0}{2\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

A pesar de su nombre, este sistema no oscila porque el efecto de la amortiguación es muy fuerte.

Caso $\Delta < 0$: En este caso los efectos de la amortigación son menos intensos y el sistema oscila. La solución podría escribirse prácticamente en la misma forma que antes

$$x(t) = \left(A_1\, e^{it\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} + A_2\, e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}\right)\, e^{-\frac{c}{2m}t}$$

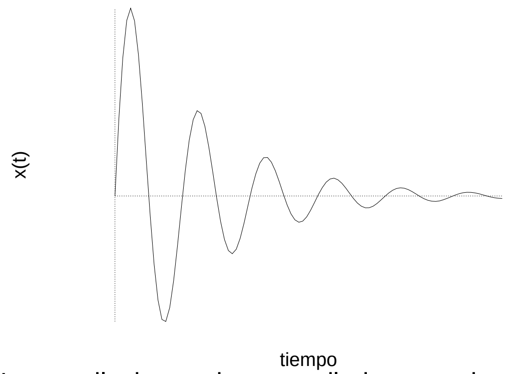
pero como la solución debe ser real para que tenga sentido, entonces las constantes A_1 y A_2 deben ser complejas. Al exigir que $x = x^*$ para todo t se deduce que $A_1 = A_2^*$. Para hacer explícita esta propiedad se cambia de notación,

$$A_1 = \frac{D}{2}e^{i\beta} \qquad\qquad A_2 = \frac{D}{2}e^{-i\beta}$$

y entonces

$$x(t) = D e^{-\frac{c}{2m}t} \cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} + \beta\right) \quad (5.4.6)$$

solución que está representada en la figura adjunta.



Las oscilaciones de un oscilador amortiguado van decreciendo con el tiempo, manteniendo su frecuencia tal como se describe en (5.4.6).

Se aprecia que la frecuencia angular de oscilación en este sistema es

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \qquad (5.4.7)$$

que es una frecuencia menor que ω_0. Si el coeficiente de viscocidad c aumenta la frecuencia ω_c disminuye aun más, es decir el período de oscilación $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ aumenta si c aumenta.

En este caso las dos constantes que deben ser fijadas una vez que se tiene las condiciones iniciales son D y β.

5.5. Oscilador forzado y amortiguado

Finalmente, consideramos el caso general de una partícula que se mueve en proximidad de un punto de equilibrio estable, donde además hay roce viscoso y una fuerza externa periódica. La ecuación que describe este movimiento es

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) + kQ\sin\omega t$$

que se escribe equivalentemente como

$$\ddot{x}(t)+\frac{c}{m}\dot{x}(t)+\omega_0^2\,x(t)=\omega_0^2\,Q\sin\omega t \tag{5.5.1}$$

El último término es el que describe a la *forzante* periódica.

Tal como se comentó en la sección 5.3 estas ecuaciones lineales inhomogéneas tiene una solución general que se obtiene de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (en este caso la del oscilador amortiguado sin forzar) más una solución particular de la ecuación inhomogénea.

Puesto que ya se conoce la solución general del oscilador amortiguado sin forzar solo resta calcular una solución de la ecuación inhomogénea (5.5.1). Ésta será obtenida a partir de suponer que existe solución $x(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t-\delta) \\ &= A\left(\sin\omega t\cos\delta-\cos\omega t\sin\delta\right) \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

De donde es directo obtener que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,\omega\left(\cos\omega t\cos\delta+\sin\omega t\sin\delta\right) \\ \ddot{x}(t) &= -A\,\omega^2\left(\sin\omega t\cos\delta-\cos\omega t\sin\delta\right) \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

En lo que sigue se va a usar un parámetro q para describir el amortiguamiento, en lugar de c. La relación, por definición es

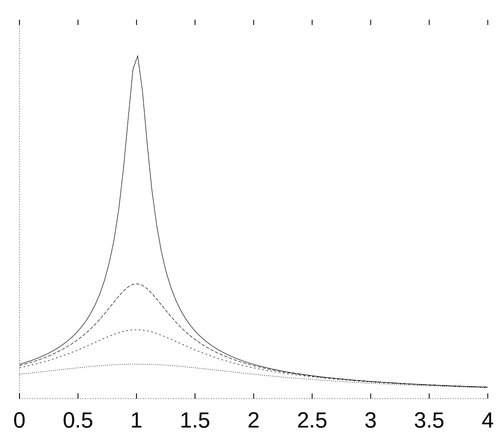
$$q=\frac{c\,\omega}{m}$$

Al reemplazar estas expresiones en (5.5.1) se obtiene una ecuación que se factoriza en dos partes, una proporsional a $\cos\omega t$ y otra proporsional a $\sin\omega t$. Puesto que esta ecuación debe ser válida para todo tiempo, cada una de estas dos partes debe ser nula independientemente y se obtiene

$$q\cos\delta = \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\delta \tag{5.5.4}$$

$$\omega_0^2\,Q = A\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\delta+q\sin\delta\right] \tag{5.5.5}$$

De la primera de estas ecuaciones se despeja inmediatamente que



La amplitud $A(w)$, dada en (5.5.6), de un oscilador de frecuencia natural ω_0, amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω (la *forzante*) muestra para diversos valores del parámetro de amortiguación q un máximo en $w=w_r$ (definido en (5.5.7)). Mientras menor el amortiguamiento mayor es la amplitud A

$$\tan\delta=\frac{q}{\omega_0^2-\omega^2}$$

y entonces

$$\sin\delta = \frac{q}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+q^2}}$$

$$\cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+q^2}}$$

Si el coeficiente de roce viscoso c se anula,

es decir, $q=0$, entonces el seno se anula y el coseno vale 1.

De (5.5.5) resulta (comparar con (5.3.5))

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_0^2\,Q}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\delta+q\sin\delta} \\ &= \frac{\omega_0^2\,Q}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+q^2}} \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

y ahora se ve que el primer término en el denominador es siempre positivo tal como el segundo término.

Entonces la amplitud A nunca es divergente. Su forma, como función de ω, se muestra en la figura adjunta. La función A tiene un máximo cuando

$$\omega^2 = \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\left(\frac{c}{2m}\right)^2 \tag{5.5.7}$$

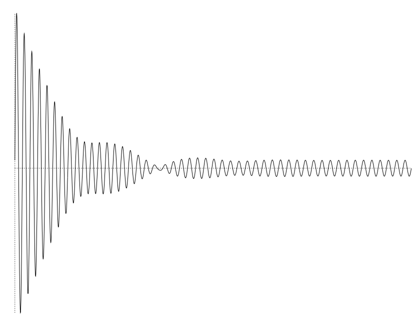
Esto contrasta con lo que ocurre con el oscilador forzado sin amortiguación donde la amplitud que resulta matemáticamente es divergente en la resonancia.

El valor de A en el punto $\omega=\omega_r$ es

$$A = \frac{\omega_0 Qm}{c}\,\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{c^2}{4m^2}}} \tag{5.5.8}$$

que diverge en el caso de un oscilador forzado y no amortiguado, es decir, cuando $c\to 0$.

La solución general de la ecuación del oscilador forzado y amortiguado se expresa como la solución general de la ecuación homogénea más la solución particular recién obtenida. Suponiendo que no hay sobreamortiguación esta solución es



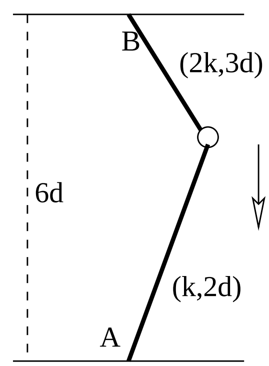
La función $x(t)$ de un oscilador de frecuencia natural ω_0, amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω (la *forzante*) muestra un comportamiento inicial transitorio donde las dos frecuencias compiten, pudiendo haber batido en esta etapa. A tiempos largos el comportamiento es oscilatorio simple con la frecuencia ω de la forzante como se desprende de (5.5.9).

$$x(t) = D\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}+\beta\right)\exp\left[-\frac{c}{2m}t\right]+\frac{\omega_0^2\,Q}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega c}{m}\right)^2}}\sin(\omega t-\delta) \tag{5.5.9}$$

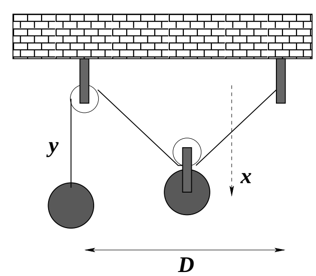
La primera parte de esta expresión, que proviene de la ecuación lineal homogénea (oscilador no forzado), decrece con el tiempo en forma exponencial. A tiempos largos, entonces, la solución que domina sin competencia es la parte proporcional a $\sin(\omega t - \delta)$. A largo plazo la forzante impone totalmente la frecuencia de oscilación.

5.6. Problemas

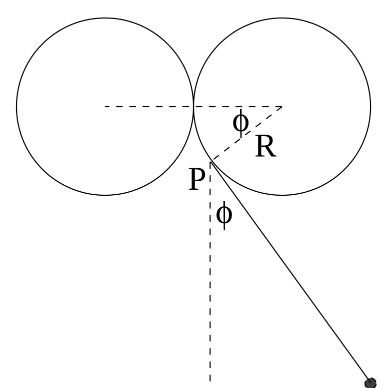
5.1 Una partícula P de masa m está sometida a la fuerza de dos resortes. Estos dos resortes de constantes elásticas $k_A = 2k$ y $k_B = k$ tienen largos naturales $3d$ y $2d$ respectivamente y tienen puntos fijos, como lo muestra la figura, en un punto A el primero y el segundo en un punto B verticalmente sobre él a distancia $6d$. Determinar las frecuencias a pequeñas oscilaciones verticales y a pequeñas oscilaciones horizontales.



5.2 El sistema de poleas sin roce que describe la figura tiene una masa colgante m_1 a la izquierda y la masa total al centro es m_2. Dé a este sistema una geometría sencilla para la situación de equilibrio. Encuentre la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a ese punto.



5.3 Se tiene un péndulo plano que consta de un hilo de largo D que tiene una partícula puntual de masa m en su extremo inferior. Pero no es un péndulo común porque su origen superior está en el punto de contacto entre dos circunferencias de radio R, como lo muestra la figura. Cuando el péndulo oscila se enrolla un poco en forma alternada en las dos circunferencias, de modo que su largo instantáneo no es D sino $(D - R\phi)$ y su centro instantáneo de giro es el punto P de tangencia (ver figura).

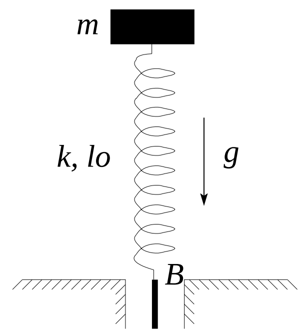


a) Obtenga las ecuaciones escalares de movimiento, una de ellas sirve para determinar la tensión del hilo y la otra es la interesante. b) Escriba la energía cinética,

$K(\phi,\dot{\phi})$ y la energía gravitacional $U(\phi)$. c) Demuestre que la exigencia de conservación de la energía mecánica, $dE/dt = 0$, conduce a la ecuación interesante de movimiento. d) Escriba la ecuación asociada a pequeñas oscilaciones.

5.4 Considere una partícula de masa m que está apoyada sobre un resorte de constante k y largo natural l_0, bajo la acción de la gravedad. El punto B de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t = 0$ al nivel de la mesa.

a) Encuentre la altura de equilibrio de la masa. **b)** En $t = 0$, cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $\vec{r}_B(t) = A_0 \sin(\omega t)\,\hat{j}$. Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa. **c)** Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas. **d)** Manteniendo la amplitud A_0 fija, considere que la frecuencia ω es menor que la frecuencia de resonancia.



¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?

5.5 Considere el movimiento de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza

$$\vec{F} = b\left(x\,(y^2+z^2)\,\hat{\imath} + y\,(x^2+z^2)\,\hat{j} + z\,(x^2+y^2)\,\hat{k}\right)$$

a) Demostrar que esta fuerza es conservativa. b) Encontrar la energía potencial $U(x,y,z)$ asociada a esta fuerza, tal que sea nula en el origen. c) Si la partícula es soltada desde el origen con rapidez v_0, determine la rapidez en un punto cualquiera (x_1,y_1,z_1).

Capítulo 6

Fuerzas centrales y planetas

6.1. Barrera centrífuga y potencial efectivo U^*

6.1.1. La noción

$\mathbb{B}$arrera centrífuga es una noción que puede ser comprendida a partir de la conservación del momento angular. Aparece naturalmente cuando la fuerza total es central con centro en $\mathscr{O}$. En forma poco precisa se puede decir que el momento angular $\ell_{\mathscr{O}}$ es proporcional a la distancia R de la partícula al centro $\mathscr{O}$ y también es proporcional a la velocidad angular, $\ell_{\mathscr{O}} \sim R\dot{\phi}$. Puesto que $\ell_{\mathscr{O}}$ es constante, si R está decreciendo, $\dot{\phi}$ tiene que ir creciendo en la misma proporción. La aceleración centrípeta, por otro lado es $a_n \sim v^2/R \sim R\dot{\phi}^2$, es decir, a_n crece también. En otras palabras, para disminuir R se necesita cada vez una mayor fuerza hacia el centro (centrípeta), lo que se siente como si se estuviera contrarrestando una barrera que expulsa del centro (centrífuga).

Cuando la fuerza total es central, proveniente de una energía potencial $U(r)$,

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dr}\hat{r} \tag{6.1.1}$$

el momento angular se conserva y el movimiento es plano. En tal caso se puede describir todo el movimiento con las coordenadas polares (r, ϕ)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{r} \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\,\hat{\phi} && (6.1.2) \\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} \\ &= \vec{a}_r + \vec{a}_\phi && (6.1.3) \end{aligned}$$

El momento angular con respecto al centro de fuerzas, que sabemos que se conserva en el caso de fuerza central, es

$$\vec{\ell} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$= \quad m r^2 \dot{\phi} \hat{k} \tag{6.1.4}$$

Al coeficiente que multiplica a $\hat{k}$ lo denominaremos ℓ,

$$\ell = m r^2 \dot{\phi} \tag{6.1.5}$$

Siendo central la fuerza total, la aceleración $\vec{a}_\phi$ tiene que ser cero, lo que equivale a

$$0 = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right)$$

que es cierto porque el momento angular es constante. Usando la definición de ℓ dada más arriba se puede hacer el reemplazo

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{m r^2} \tag{6.1.6}$$

La energía mecánica total del sistema es $E = K + U$ donde $K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$ que ahora se puede escribir, gracias a (6.1.6), en la forma

$$E_{MT} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r) \tag{6.1.7}$$

El primer término es la contribución a la energía cinética del movimiento radial y el segundo es la contribución a la energía cinética debida a la velocidad angular $\dot{\phi}$.

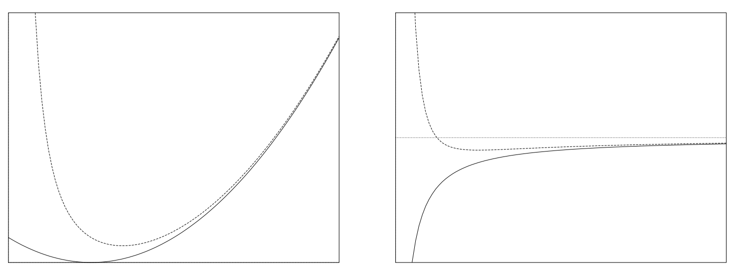
La ecuación de movimiento en el caso actual puede escribirse en la forma $m a_r = -dU/dr$:

$$m\left(\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2 r^3}\right) = -\frac{dU}{dr} \tag{6.1.8}$$

que se reescribe como

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(U + \frac{\ell^2}{2 m r^2}\right) = -\frac{d}{dr}U^*(r) \tag{6.1.9}$$

y puede ser deducida directamente de (6.1.7) sencillamente calculando $dE_{MT}/dt = 0$. Se obtiene una ecuación (6.1.9) para $r(t)$. Ya se estableció la dependencia de ϕ en r en (6.1.6).



A la izquierda el potencial del oscilador armónico $U = k(r - D_0)^2/2$ que se anula en $r = D_0$ y el potencial efectivo U^* asociado. A la derecha se compara la función U con U^* en el caso del potencial gravitacional. El potencial gravitacional U es infinitamente negativo en el origen y crece asintóticamente a cero. El potencial efectivo U^* diverge a $+\infty$ en el origen, para cierto r se anula, pasa a valores negativos, llega a un mínimo y luego crece acercándose cada vez más a U.

Lo notable es que esta ecuación de movimiento es equivalente a la ecuación de movimiento de una partícula en el eje X con energía potencial $U^* = \frac{A}{x^2} + U(x)$, siempre que en ambos casos se tome la misma función U y $A = \ell^2/(2m)$.

Se ha demostrado las siguientes propiedades del movimiento de un cuerpo de masa m bajo el efecto de una fuerza total central de la forma (4.6.1):

• La fuerza es conservativa y es $-\hat{r}\,dU(r)/dr$, donde $U(r)$ es función energía potencial.

• Hay momento angular conservado implicando que el movimiento es plano. Queda ligada la velocidad angular con el radio r por medio de (6.1.6).

• La ecuación de movimiento, que es en un plano, se reduce a la ecuación tan solo para $r(t)$, es decir, se convierte en el problema unidimensional (6.1.9).

• Esta ecuación es matemáticamente equivalente a la ecuación de un movimiento unidimensional, solo que en lugar de tener a $U(r)$ como energía potencial, juega este papel la función *potencial efectivo* U^*,

$$U^*(r) = U(r) + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2}}_{\text{barrera centrífuga}} \tag{6.1.10}$$

Al último término en U^* se le conoce como *barrera centrífuga*.

Para el importante caso gravitacional definido con (4.6.7) el potencial efectivo tiene un mínimo. En efecto, si $U^* = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ entonces U^* es mínimo en $r_0 = 2b/a$.

6.1.2. Ejemplo sencillo

Una partícula libre es un caso trivial de "fuerza central": $\vec{F} = 0$ y puede tomarse $U = 0$. Sin embargo U^* no es nulo. Nada malo hay en ilustrar este caso con el movimiento descrito en la figura en §1.3, $\vec{r} = b\,\hat{j} + \hat{\imath}\,t\,v_0$.

Este movimiento también puede ser descrito utilizando coordenadas $(r(t), \phi(t))$: $x = v_0\,t = r\sin\phi$ y $y = b = r\cos\phi$. Mirando la figura en §1.3 debiera resultar obvio que si la partícula inicia su movimiento desde una posición bien a la izquierda, la variable $r(t)$ irá disminuyendo con el tiempo, alcanzará un mínimo $r = b$ y luego $r(t)$ comenzará a crecer, de modo que si el movimiento es visto solamente desde el punto de la variable r pareciera que ha habido un bote a distancia b en una *barrera centrífuga* para comenzar a alejarse.

De la definición de las coordenadas usadas se deduce que

$$\dot{r} = v_0 \sin\phi \qquad\qquad \dot{\phi} = \frac{v_0\cos\phi}{r}$$

de donde es inmediato calcular que

$$m\ddot{r} = m v_0\,\dot{\phi}\cos\phi = \frac{m v_0^2\cos^2\phi}{r} = \frac{m v_0^2 b^2}{r^3} = \frac{\ell^2}{m r^3} = -\frac{d}{dr}\frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Es decir, el simple movimiento con velocidad uniforme $v_0\hat{\imath}$ de una partícula libre puede ser visto como un movimiento bajo los efectos de una barrera centrífuga. ◀

6.1.3. Orbitas circunferenciales

La energía cinética expresada con las coordenadas polares (r,ϕ) es

$$\begin{aligned}\frac{m}{2}v^2 &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\phi}^2\right)\\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{\ell^2}{2m\,r^2}\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

En el segundo paso se reemplazó la velocidad angular $\dot{\phi}$ por la expresión (6.1.6) ya encontrada en términos de ℓ.

Una órbita es circunferencial cuando su velocidad radial es constantemente nula, es decir, cuando tanto $\dot{r}=0$ como $\ddot{r}=0$. Esto último implica que debe encontrarse un radio $r=r_c$ tal que $dU^*/dr=0$

$$\frac{dU^*}{dr}=0 \tag{6.1.12}$$

Si se resuelve (6.1.12) se deduce un valor particular $r=r_c$ el que depende paramétricamente del valor ℓ. Éste es el radio de la órbita circunferencial.

La energía cinética en el caso de la órbita circunferencial se reduce a

$$K_{\text{orbita circunf}}=\frac{\ell^2}{2m\,r^2} \tag{6.1.13}$$

Puede verse que esta última expresión coincide con la expresión del término que se agrega a U para formar U^*, es decir, la barrera centrífuga.

Conociendo el valor de la energía cinética y de la energía potencial, la energía mecánica total es $K+U$ y está dada por

$$E=\frac{\ell^2}{2m\,r_c^2}+U(r_c) \tag{6.1.14}$$

Ella está totalmente determinada por el radio r_c.

<u>EJEMPLO:</u> Si se toma el caso gravitacional $U=-GMm/r$ la solución de (6.1.12) arroja

$$r_c=\frac{\ell^2}{GM\,m^2} \tag{6.1.15}$$

Aquí se puede apreciar que las órbitas planetarias circunferenciales tienen un radio que está dado por su momento angular ℓ. Pero tal vez una forma más satisfactoria de decir lo mismo se logra recordando que éste es un movimiento circunferencial con velocidad angular uniforme $\omega=\dot{\phi}=\ell/(mr_c^2)$ de donde

$$r_c=\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \tag{6.1.16}$$

que no depende de la masa m del planeta sino tan solo de su velocidad angular. Con este valor la energía total es

$$E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2\ell^2} \tag{6.1.17}$$

Los satélites geocéntricos son satélites alrededor de la Tierra, en el plano ecuatorial, que tienen una velocidad angular igual a la velocidad angular de la Tierra. Para un observador en la Tierra el satélite parece estar detenido. Estas son las órbitas que usan los satélites de comunicaciones. ◀

Las pequeñas oscilaciones de $r(t)$ en torno a una órbita circunferencial con un momento angular ℓ fijo se obtiene de (5.2.4) usando como potencial a U^*,

$$U^* = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Su seguna derivada con respecto a r es $U^{*\prime\prime} = -2GMm/r^3 + 3\ell^2/mr^4$. Si se reemplaza $\ell = mr^2\omega$ (donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular del satélite), el último término ya no depende de r. Si seguidamente se reemplaza r por su valor dado en (6.1.16), se obtiene que la frecuencia de estas pequeñas oscilaciones de r en torno al valor r_c es

$$\omega_{\text{peq. osc.}} = \omega$$

Esto significa que el tiempo que tarda el valor de r en tomar dos veces consecutivas su valor mínimo coincide con el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta, lo que implica que la órbita $r(\phi)$ es cerrada.

♣ *Calcule a qué distancia del centro de la Tierra debe estar un satélite para que sea geoestacionario. Compruebe que están a decenas de miles de kilómetros. (Los satélites más usuales están a pocos cientos de kilómetros de altura).*

♣ *Si la fuerza total sobre un cuerpo es $\vec{F} = k r^a \hat{r} + \alpha \vec{v} \times \vec{r}$, ¿Cómo varía la energía mecánica total con el tiempo? (k, a y α son constantes conocidas).*

6.1.4. Ecuación de Binet

Si se considera la ecuación genérica con fuerza central

$$m\ddot{\vec{r}} = F(r)\,\hat{r}$$

Al escribirla en coordenadas polares y reemplazando $\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2}$ se obtiene

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} + F(r) \tag{6.1.18}$$

El método de Binet consiste en reemplazar esta ecuación para $r(t)$ en una ecuación en que se considera tan solo la dependencia de r en el ángulo, $r(\phi)$. La razón para hacer esto es que es más fácil resolver la nueva ecuación que se obtiene que la ecuación original. Para obtener la dependencia en ϕ se hace uso de la regla de la cadena ($dg/dt = d\phi/dt\, dg/d\phi = \dot\phi\, g'$). En lo que sigue la prima indica derivada con respecto a ϕ,

$$\frac{d}{d\phi} = (\quad)'$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \dot r &= \dot\phi\, r' && = \frac{\ell}{m}\frac{r'}{r^2} \\ \ddot r &= \frac{\ell}{m}\frac{\ell}{mr^2}\left(\frac{r'}{r^2}\right)' && = \frac{\ell^2}{m^2r^2}\left(\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'^2}{r^3}\right) \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

A continuación se define la función

$$w(\phi) \equiv \frac{1}{r(\phi)}$$

de modo que

$$r' = -\frac{w'}{w^2} \qquad\qquad r'' = -\frac{w''}{w^2} + \frac{2w'^2}{w^3}$$

Si se hace estos reemplazos en (6.1.18) se obtiene

$$w'' = -w - \frac{m}{\ell^2}\frac{F(1/w)}{w^2} \tag{6.1.20}$$

que es la ecuación de Binet.

6.2. Planetas y todo eso

6.2.1. La ecuación de la órbita y su integral

Ya se sabe que la ecuación de movimiento reducida a la ecuación sólo para $r(t)$ es

$$m\ddot r = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{\ell^2}{m\,r^3} \tag{6.2.1}$$

Al reemplazar todo esto en (6.2.1) resulta la ecuación

$$w'' + w = \frac{GM m^2}{\ell^2} \tag{6.2.2}$$