→ Problema de Valor de frontera

(Si no se incluye tiempo)

$$\begin{cases} \mathrm{Div}\, \underline{S} + \rho_0 \underline{b}_0 = \underline{0} \\ \underline{S}^T \underline{N} = \hat{\underset{\sim}{t}}_0 & x \in \partial \underset{\sim}{B}_{\hat{t}_0} \\ \underset{\sim}{x} = \hat{\underset{\sim}{x}} & x \in \partial \underset{\sim}{B}_{\hat{x}} \end{cases} \qquad \underline{S} = \frac{\partial W}{\partial \underline{F}} \qquad \underline{F} = \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}} \qquad W = W(\underline{C}) = W(\underline{F})$$

← falta condición de simetría para $\underset{\sim}{S}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial S_{ij}}{\partial X_i} + \rho_0 b_{0_j} = 0 \\ S_{ij} N_i = \hat{t}_{0_i} \\ x_j = \hat{x}_j \end{cases} \qquad \text{pero} \quad S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ji}}$$

← Se asumirán así estas derivadas

$$\Rightarrow \frac{\partial S_{ij}}{\partial X_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ji} \partial F_{lm}} \frac{\partial F_{ml}}{\partial X_i}$$

← material homogeneo ⇒ W no depende de $\underset{\sim}{X}$ de manera explícita

$$\text{pero} \quad \frac{\partial F_{ml}}{\partial X_i} = \frac{\partial^2 x_m}{\partial X_l \partial X_i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial F_{ji} \partial F_{lm}} \dfrac{\partial^2 x_m}{\partial X_l \partial X_i} + \rho_0 b_{0_j} = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial F_{ji}} N_i = \hat{t}_{0_i} \\ x_j = \hat{x}_j \end{cases} \qquad \text{donde} \quad W = W\left(F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)$$

→ La ecuación anterior permite encontrar la función $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X})$ para un cuerpo $\underset{\sim}{B}_0$, con condiciones de borde de fuerza o tracción externa $\hat{\underset{\sim}{t}}_0$, y de restricción en el movimiento $\hat{\underset{\sim}{x}}$.

→ En general esta ecuación es altamente no lineal y por tanto de difícil solución analítica

→ Forma alternativa

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, \underset{\sim}{T} + \rho \underline{b} = \underline{0} & \text{en } \underset{\sim}{B}_t \\ \underline{T}\, \underline{n} = \hat{\underset{\sim}{t}} & \text{en } \partial \underset{\sim}{B}_{\hat{t}} \\ \underline{x} = \hat{\underline{x}} & \text{en } \partial \underset{\sim}{B}_{\hat{x}} \end{cases} \qquad \text{con} \quad \underset{\sim}{T} = J^{-1} \underline{F} \frac{\partial W}{\partial \underline{F}}$$

→ El problema con esta forma de escribir el problema de valor de frontera es que $\underset{\sim}{B}_t$ y $\partial \underset{\sim}{B}_t$ cambian por efecto de $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X})$, además div es un operador en $\underset{\sim}{x}$, en tanto que $\underline{F}$ depende de $\underset{\sim}{X}$

→ Hay varios temas que estudiar en elasticidad no lineal, por ejemplo

- Métodos de solución

  Inversa : sea $\underset{\sim}{\chi}(\underline{X})$ dado, tal que $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\mathcal{G}}(\underline{F})$ es solución de $\operatorname{div} \underline{T} + \rho \underline{b} = \underline{0}$

  Semi-inversa : sea $\underset{\sim}{\chi}(\underline{X})$ que depende de alguna función desconocida pero "simple", calcule $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\mathcal{G}}(\underline{F})$ y resuelva $\operatorname{div} \underline{T} + \rho \underline{b} = \underline{0}$ para ese caso simplificado

- Para $\hat{\underset{\sim}{t}}$ y/o $\hat{\underline{x}}$ se puede tener mas de una solución

  → Inestabilidad $\dfrac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} >\!<\, = 0$

- Existencia de solución

- Método racional para buscar $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ o W de experimentos

etc

→ Ejemplo:

① Método de la inversa

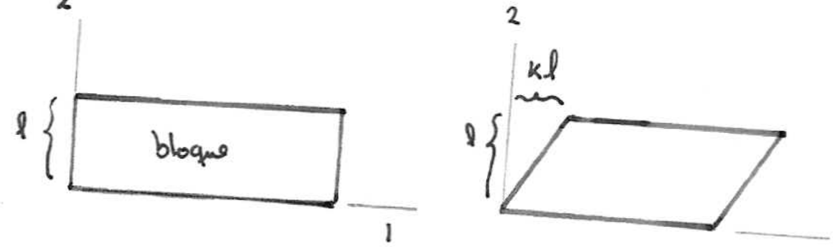
Considere la deformación

$$x_1 = X_1 + k X_2 \qquad x_2 = X_2 \qquad x_3 = X_3 \qquad k: \text{constante}$$

⇒ (si se usa $\underset{\sim}{T} = \alpha_0 \underline{I} + \alpha_1 \underline{B} + \alpha_2 \underline{B}^2$) que

$$\underset{\sim}{F} = \underline{e}_1 \otimes \underline{E}_1 + k\, \underline{e}_1 \otimes \underline{E}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{E}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{E}_3$$

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow [B] = [F][F]^T = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k^2 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \operatorname{tr} \underline{B} = 3 + k^2 \qquad I_2 \overset{?}{=}$$

$$[B]^2 = \begin{pmatrix} 1+k^2 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+k^2 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{(1+k^2)^2}_{1+2k^2+k^4}}^{1+3k^2+k^4} + k^2 & \overbrace{(1+k^2)k + k}^{k+k^3+k \,=\, k^3+2k} & 0 \\ (1+k^2)k + k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{(3+k^2)^2}_{9+6k^2+k^4} - (3+4k^2+k^4)\right) = \frac{1}{2}\left(6+2k^2\right) = 3+k^2 = I_1$$

$$I_3 = \det[B] = (1+k^2) - k^2 = 1$$

$$\Rightarrow [T] = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1+k^2 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1+3k^2+k^4 & k^3+2k & 0 \\ k^3+2k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_0 = \alpha_0(3+k^2, 3+k^2, 1)$
$\alpha_1 = \alpha_1(3+k^2, 3+k^2, 1)$
$\alpha_2 = \alpha_2(3+k^2, 3+k^2, 1)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} T_{11} &= \alpha_0 + \alpha_1(1+k^2) + \alpha_2(1+3k^2+k^4) \\ T_{22} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2(1+k^2) \\ T_{33} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ T_{12} &= \alpha_1 k + \alpha_2(k^3+2k) \\ T_{13} &= T_{23} = 0 \end{aligned} \right.$$

Son constantes $\Rightarrow \operatorname{div} \underline{T} = \underline{0}$ $(\underline{b} = \underline{0})$ es satisfecha trivialmente
se asume

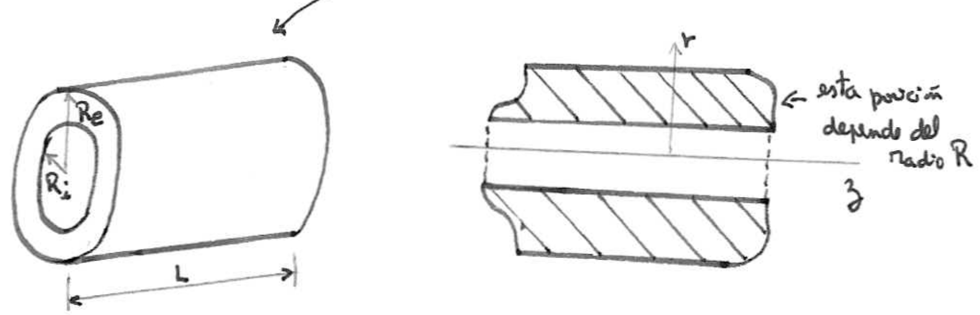
Se puede que en el caso no lineal ademas de un esfuerzo de corte T_{12} se necesita esfuerzos normales T_{11}, T_{22}, T_{33} para mantener la deformación
$\Downarrow$
En el caso lineal solo hace falta T_{12}

con $\hat{\underset{\sim}{t}} = \underline{T}\underset{\sim}{n}$ podemos determinar la carga externa necesaria para generar esta deformación

(2) Método de la semi-inversa

Corte axial de un tubo (cilíndrico)

Sea el tubo $R_i \leq R \leq R_e \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi \quad 0 \leq Z \leq L$



Sea la deformación $r = g(R) \quad \theta = \Theta \quad z = Z + w(R)$ donde
g, w son funciones desconocidas (por el momento)

Se tiene que $\underset{\sim}{F} = g'(R)\, \underline{e}_r \otimes \underline{E}_R + \frac{1}{R} g(R)\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{E}_\Theta + w'(R)\, \underline{e}_z \otimes \underline{E}_R + \underline{e}_z \otimes \underline{E}_Z$

$$[F] = \begin{pmatrix} g'(R) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(R)}{R} & 0 \\ w'(R) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [B] = \begin{pmatrix} g'^2 & 0 & g'w' \\ 0 & r^2/R^2 & 0 \\ g'w' & 0 & 1+w'^2 \end{pmatrix}$$

$$[B] = \begin{pmatrix} g'^4 + g'^2 w'^2 & 0 & g'^3 w' + g' w' (1+w'^2) \\ 0 & r^4/R^4 & 0 \\ g'^3 w' + g' w' (1+w'^2) & 0 & g'^2 w'^2 + (1+w'^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I_1 = \mathrm{tr}\, \underline{B} \qquad I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\underline{B})^2 - \mathrm{tr}\, \underline{B}^2\right) \qquad I_3 = \det \underline{B}$$

es facil ver que I_1, I_2, I_3 van a ser función de g, w, o sea son función de R

Sea $\underset{\sim}{T} = \alpha_0 \underline{I} + \alpha_1 \underline{B} + \alpha_2 \underline{B}^2$

$\Downarrow$

dependen solo de R y $r = g(R)$

$$\begin{cases} T_{rr} = \alpha_0 + \alpha_1 g'^2 + \alpha_2 (g'^4 + g'^2 w'^2) \\ T_{\theta\theta} = \alpha_0 + \alpha_1 \dfrac{g^2}{R^2} + \alpha_2 \dfrac{g^4}{R^4} \\ T_{zz} = \alpha_0 + \alpha_1 (1+w'^2) + \alpha_2 (g'^2 w'^2 + (1+w'^2)^2) \\ T_{rz} = \alpha_1 g' w' + \alpha_2 (g'^3 w' + g' w' (1+w'^2)) \\ T_{\theta z} = T_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

ecuación de equilibrio en coordenadas cilíndricas

$$\left\{ \begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}}_{\frac{dT_{rr}}{dr}} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0 \\ & \underbrace{\frac{\partial T_{rz}}{\partial r}}_{\frac{dT_{rz}}{dr}} + \frac{1}{r} T_{rz} = 0 \end{aligned} \right\}$$

como α_0, α_1 y α_2 son funciones de g', w' y g lo que tenemos aquí es un sistema de ecuaciones ordinario altamente no lineal para g y w

→ Para resolver el sistema anterior se debe dar una forma para α_0, α_1 y α_2. Condiciones de borde $\underbrace{P_i, P_e}_{\text{presion interior y exterior}}$

$P_i = -T_{rr}(r_i) \qquad P_e = -T_{rr}(r_e)$

y alguna fuerza axial para las caras $Z = 0, L$

⇒ Para problemas practicos en general se usa $W = W(\underline{F})$, pues de experimentos es mucho mas fácil encontrar una funcion W, que tres funciones α_0, α_1 y α_2