

## Tarea 6, Mecánica de Medios Continuos ME701, 2008

R. Bustamante

1. Sea un material elástico de Green  $W = W(I_1, I_2, I_3)$ , donde

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2], \quad I_3 = \det \mathbf{C},$$

con  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ .

- (a) Determine  $\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}}$ ,  $\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}}$  y  $\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}}$ , donde por definición tenemos  $\left(\frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{F}}\right)_{ij} = \frac{\partial I_k}{\partial F_{ji}}$  con  $k = 1, 2, 3$ .
- (b) Con el resultado anterior y usando la regla de la cadena para la derivada parcial, calcule  $\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$  y demuestre que

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{F}^T + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{F}^T + 2 I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{F}^{-1}.$$

(20 puntos)

2. Para un material de Mooney-Rivlin donde  $W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3)$  con  $c_1, c_2$  constantes, determine las componentes de los tensores  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$ .

(20 puntos)

3. Calcule  $\mathbf{T}$  para un material de Mooney-Rivlin (incompresible) para el problema de extensión biaxial de una placa plana delgada de dimensiones iniciales (coordenadas Cartesianas)

$$-A/2 \leq X_1 \leq A/2, \quad -B/2 \leq X_2 \leq B/2, \quad -D/2 \leq X_3 \leq D/2$$

con  $D \ll A$  y  $D \ll B$ . La deformación esta dada por (coodenadas Cartesianas)

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad x_3 = \lambda_3 X_3,$$

donde  $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3}$  con  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  constantes. La placa se asume cargada en sus bordes por una tracción uniforme  $\hat{\mathbf{t}}_1$  en la dirección  $\mathbf{e}_1$  y  $\hat{\mathbf{t}}_2$  en la dirección  $\mathbf{e}_2$ , en la dirección  $\mathbf{e}_3$  no hay carga externa (esta es la condición necesaria que se usa para calcular  $p$  que aparece en la ecuación constitutiva de un material incompresible).

(20 puntos)