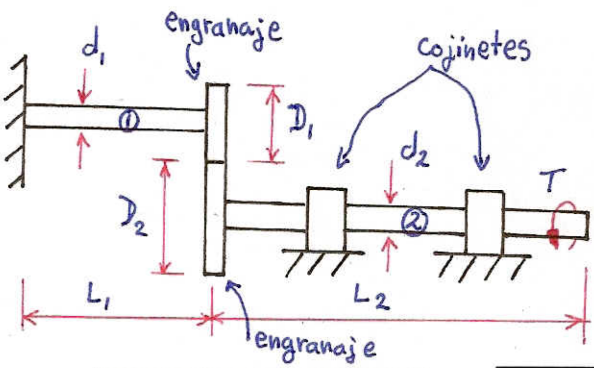
fcfm Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

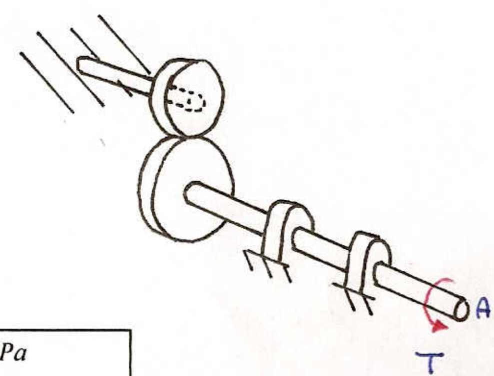
Control 2. Resistencia de Materiales ME 46A-2.

08/10/2008

Profesor: R. Bustamante

1) Las figuras del lado izquierdo y derecho muestran una vista lateral y en tres dimensiones de dos ejes ***1*** y ***2*** conectados a través de engranajes. El eje ***1*** esta empotrado a la pared del lado izquierdo; el eje ***2*** esta apoyado en dos cojinetes (puede girar sin roce) y se le aplica un torque ***T*** en su extremo derecho. El engranaje ***1*** esta pegado al eje ***1*** y el engranaje ***2*** al eje ***2*** respectivamente. Los engranajes se pueden considerar como discos rígidos. (20 puntos)





Datos:

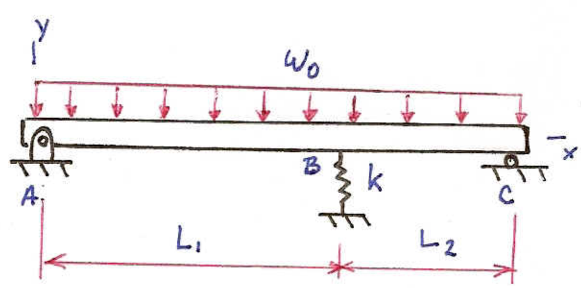
Eje 1	$G_1 = 27.6\ GPa$,	
	$L_1 = 1\ m$	
	$d_1 = 5\ cm$	
	$D_1 = 15\ cm$	

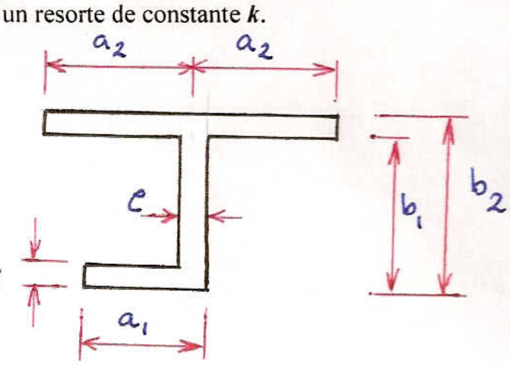
Eje 2	$G_2 = 83\ GPa$
	$L_2 = 2\ m$
	$d_2 = 8\ cm$
	$D_2 = 20\ cm$

$T = 2000\ Nm$

Determine el ángulo de rotación total en el punto A. Determine el valor de los máximos esfuerzos de corte en los ejes ***1*** y ***2***.

2) Considere la viga de la figura cuya sección transversal se muestra en la derecha. Esta viga esta sometida a una carga uniforme w_0 y esta conectada en ***B*** a un resorte de constante ***k***.





a) Determine el eje neutro e I_z para la sección de esta viga. (10 puntos)
b) Calcule las reacciones en *A*, ***B*** y *C*. (18 puntos)
c) Determine el esfuerzo máximo de compresión o tracción debido a la flexión, y el punto en el cual se produce. (12 puntos)

Datos:

$L_1 = 2\ m$	$L_2 = 1\ m$	$w_0 = 1000\ N/m$	$k = 100\ N/mm$	
$a_1 = 5\ cm$	$a_2 = 7\ cm$	$b_1 = 10\ cm$	$b_2 = 12\ cm$	$e = 2\ cm$

E = 90 GPa

Formulario

Torsión $T = \dfrac{\theta G J}{L}$ Sección circular $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$ $\tau = \dfrac{Tr}{J}$

Sección rectangular $J = k_2 a b^3$ $\tau = \dfrac{T}{k_1 a b^2}$ $b \leq a$

a/b	1	1.5	2	4	10	∞
k_1	0.208	0.231	0.246	0.282	0.312	1/3
k_2	0.141	0.196	0.281	0.281	0.312	1/3

Flexión

Método área de momento $\Delta_{AB} = \int_A^B x' \dfrac{M}{EI} dx$

Esfuerzo $\sigma_x = -\dfrac{M(x)}{I_z} y$

Momento inercia de área y eje neutro

Caso general eje neutro $\int_A y dA = 0$ momento inercia $I_z = \int_A y^2 dA$

Sección rectangular $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$

a : base b: altura

Eje paralelo al neutro $\hat{I}_z = I_z + distancia^2 Area$

Ecuación de la elástica

$\hat{y}$: Deflexión vertical de la viga

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} \quad \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI} \quad \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{d\hat{y}}{dx} \approx \theta(x)$$

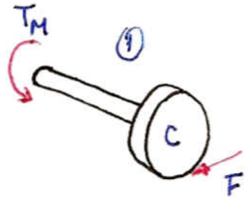
$$\int \delta(x-a)dx = r(x-a) \quad \int r(x-a)dx = (x-a)r(x-a) \quad \int (x-a)r(x-a)dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)$$

$$\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a)$$

Pauta control 2

08/10/2008

(1)



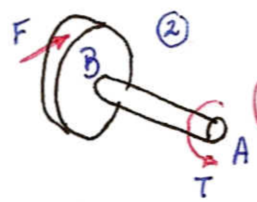
T_M : torque de reacción de pared sobre eje (1)

F : fuerza interacción engranaje

2

→ Equilibrio torque eje (2) $\quad T = \frac{D_2}{2} F \Rightarrow F = \frac{2T}{D_2}$ 2

→ Equilibrio torque eje (1) $\quad T_M = \frac{D_1}{2} F \Rightarrow T_M = \frac{D_1}{D_2} T$ 2



$\Rightarrow T_M = 1500 \ Nm$

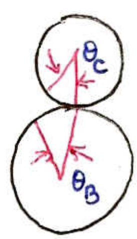
2

θ_C : ángulo de torsión eje (1) en C debido a T_M

$$\theta_C = \frac{T_M L_1}{G_1 J_1} \qquad J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32} = 6{,}1359 \times 10^{-7} \ m^4$$ 2

$$\Rightarrow \theta_C = 8{,}8573 \times 10^{-2} \ rad$$

θ_B : ángulo rotación engranaje (2) debido a interacción con engranaje (1)



igual arco $\Rightarrow \theta_C \frac{D_1}{2} = \theta_B \frac{D_2}{2}$ 2

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{D_1}{D_2} \theta_C = 6{,}643 \times 10^{-2} \ rad$$

θ_{BA} : ángulo de torsión eje (2) debido a T

$$\theta_{BA} = \frac{T L_2}{G_2 J_2} \qquad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32} = 4{,}0212 \times 10^{-6} \ m^4$$ 2

$$\Rightarrow \theta_{BA} = 1{,}1984 \times 10^{-2} \ rad$$

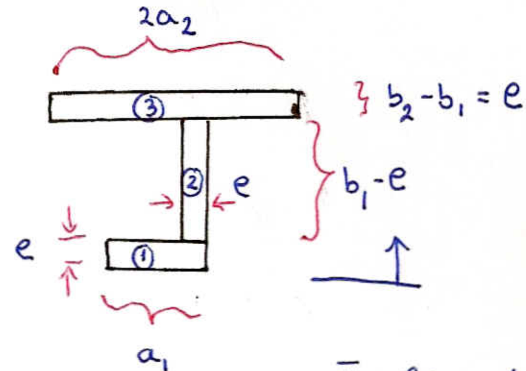
θ_A : ángulo rotación total A

$$\theta_A = \theta_B + \theta_{BA} = 7{,}8414 \times 10^{-2} \ rad \rightsquigarrow 4{,}49^\circ$$ 2

$$\underbrace{\tau_{max_1}}_{\text{esfuerzo corte máximo eje (1)}} = \frac{T_M}{J_1} \frac{d_1}{2} = 61{,}1157 \ MPa$$ 2

$$\underbrace{\tau_{max_2}}_{\text{esf. corte máximo eje (2)}} = \frac{T}{J_2} \frac{d_2}{2} = 19{,}8946 \ MPa$$ 2

2 a



→ eje neutro (respecto a la base)

$$\underbrace{\bar{y}\, A_T}_{\text{área total}} = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3 \quad 2$$

$\bar{y}_1 = e/2 = 1 \text{ cm} \qquad A_1 = e a_1 = 10 \text{ cm}^2$

$\bar{y}_2 = e + \dfrac{(b_1 - e)}{2} = \dfrac{e + b_1}{2} = 6 \text{ cm} \qquad A_2 = (b_1 - e)e = 16 \text{ cm}^2$

$\bar{y}_3 = b_1 + e/2 = 11 \text{ cm} \qquad A_3 = 2a_2 e = 28 \text{ cm}^2$

$A_T = A_1 + A_2 + A_3 = 54 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow \bar{y} \approx 7{,}667 \text{ cm} = 0{,}07667 \text{ m} \quad 2$

→ I_z (Segundo momento de área)

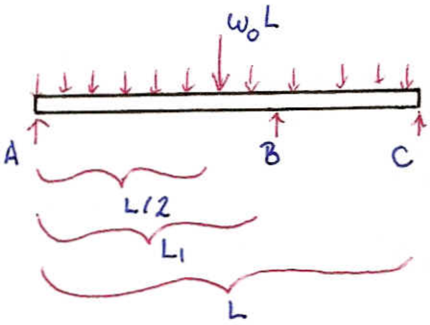
$I_{z_{Total}} = I_{z_1}' + I_{z_2}' + I_{z_3}' \quad 1 \qquad I_{z_i}'$ ← segundo momento de la parte i con respecto a $\bar{y}$

$$I_{z_1}' = \underbrace{I_{z_1}}_{\frac{a_1 e^3}{12}} + \underbrace{\delta_1^2}_{(\bar{y} - e/2)^2} A_1 = 447{,}822 \text{ cm}^4 \quad 1$$

$$I_{z_2}' = \underbrace{I_{z_2}}_{\frac{e(b_1 - e)^3}{12}} + \underbrace{\delta_2^2}_{(\bar{y} - \bar{y}_2)^2} A_2 = 129{,}795 \text{ cm}^4 \quad 1$$

$$I_{z_3}' = \underbrace{I_{z_3}}_{2a_2 \frac{e^3}{12}} + \underbrace{\delta_3^2}_{(\bar{y} - \bar{y}_3)^2} A_3 = 320{,}382 \text{ cm}^4 \quad 1$$

$\Rightarrow I_{z_{total}} \approx 897{,}999 \text{ cm}^4 \approx 8{,}98 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad 2$



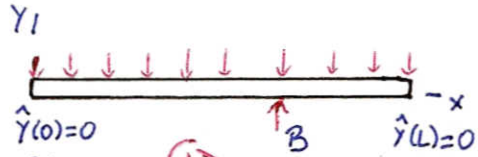
$L = L_1 + L_2 = 3\,m$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A + B + C = w_0 L$

$= 3000 N$ ✱ 1

$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow L_1 B + L C = w_0 \frac{L^2}{2}$

$\Leftrightarrow 2B + 3C = 4500\ Nm$ ✱✱



$\hat{y}(0) = 0$ $\qquad \hat{y}(L) = 0$

$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0) = 0$ 4 $\qquad \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L) = 0$

$$\frac{d^4\hat{y}}{dx^4} = -\frac{1}{EI_z}\left[w_0 - B\,\delta(x-L_1)\right] \quad 2$$

$$\Rightarrow \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} = -\frac{1}{EI_z}\left[w_0 x - B\,r(x-L_1)\right] + \alpha_3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = -\frac{1}{EI_z}\left[w_0 \frac{x^2}{2} - B(x-L_1)\,r(x-L_1)\right] + \alpha_3 x + \alpha_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{1}{EI_z}\left[w_0 \frac{x^3}{6} - \frac{B}{2}(x-L_1)^2 r(x-L_1)\right] + \alpha_3 \frac{x^2}{2} + \alpha_2 x + \alpha_1$$

$$\Rightarrow \hat{y} = -\frac{1}{EI_z}\left[w_0 \frac{x^4}{24} - \frac{B}{6}(x-L_1)^3 r(x-L_1)\right] + \alpha_3 \frac{x^3}{6} + \alpha_2 \frac{x^2}{2} + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad 1$$

$\hat{y}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$ 1 $\qquad \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$ 1

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L) = 0 \Leftrightarrow -\frac{w_0 L^2}{2EI_z} + \frac{B(L-L_1)}{EI_z} + \alpha_3 L = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = \frac{w_0 L}{2EI_z} - \frac{B}{EI_z}\frac{(L-L_1)}{L}$$

$$\alpha_3 = 1{,}85598 \times 10^{-3} - 4{,}1244 \times 10^{-7} B \quad 2$$

$$\hat{y}(L) = 0 \Leftrightarrow -\frac{w_0 L^4}{24 EI_z} + \frac{B}{6EI_z} L_2^3 + \alpha_3 \frac{L^3}{6} + \alpha_1 L = 0$$

$$\Leftrightarrow -4{,}1759 \times 10^{-3} + 2{,}0622 \times 10^{-7} B + 4{,}5\,(1{,}85598 \times 10^{-3} - 4{,}1244 \times 10^{-7} B)$$

$$+ 3\alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -1{,}392 \times 10^{-3} + 5{,}4992 \times 10^{-7} B$$

2

Pero $B = k \times 1000 \times \Delta\hat{y}(L_1)$ (1)

$\uparrow$ k en milímetros de modo que $\Delta\hat{y}$ debe ser multiplicado por 1000 $\uparrow$

$$\boxed{\Delta\hat{y}(L_1) = -\hat{y}(L_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{100 \times 1000} = \frac{w_0 L_1^4}{24 E I_z} - (1,85598 \times 10^{-3} - 4,1244 \times 10^{-7} B)\frac{L_1^3}{6}$$

$$- (-1,392 \times 10^{-3} + 5,4992 \times 10^{-7} B) L_1$$

$$\Leftrightarrow 1,054992 \times 10^{-5} B = 1,134238 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow B = 107,511 \text{ N}$$ (1)

de (✱✱) $\Rightarrow$ $C = 1428,326$ N (1)

$\Downarrow$

de (✱) $A = 1464,163$ N (1)

(c) $\sigma_x = -\dfrac{M(x)}{I_z}y \Rightarrow \sigma_{x_{max}} = -\dfrac{M_{max}}{I_z}y_{max}$ (3)

pero $M(x) = EI_z\dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2} \Rightarrow \sigma_{x_{max}} = -E\left(\dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}\right)_{max} y_{max}$

el máximo para $\dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}$ se obtiene de $\dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3} = 0$

pero $\dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3} = -\dfrac{1}{EI_z}\left[w_0 x - B\, r(x-L_1)\right] + \alpha_3$, pero $\alpha_3 = 1{,}81164\times10^{-3}$

$\Rightarrow \dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3} = -1{,}2373\times10^{-3}x + 1{,}33025\times10^{-4}\, r(x-2) + 1{,}81164\times10^{-3}$

si $x < 2 \Rightarrow \dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3} = 0$ en $x = 1{,}464188$ ← maximo?

si $x > 2 \Rightarrow \dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3} = 0$ en $x = 1{,}5717$ pero es menor a 2 por lo tanto no sirve

$\Rightarrow \left(\dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}\right)_{max}$ en $x = 1{,}464188$

$\Rightarrow \left(\dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}\right)_{max} = 1{,}32627\times10^{-3}$ (3)

y_{max}? Se tiene $\bar{y} = 0{,}07667$ m y $b_2 = 0{,}12$ m

luego $b_2 - \bar{y} = 0{,}04333 < \bar{y}$

o sea el punto mas distante se encuentra en la parte inferior de la viga (mas distante de $\bar{y}$), o sea (3)

$y_{max} = -\bar{y}$

$\Rightarrow \sigma_{x_{max}} = -90\times10^9 \times 1{,}32627\times10^{-3}\times(-1)\times 0{,}07667$

$= 9{,}15166$ MPa y es en tracción (parte inferior de la viga) (3)

$\sigma_{x_{max}}$ se encuentra ubicado en

$x = 1{,}464188$ m

$y = -0{,}07667$ m