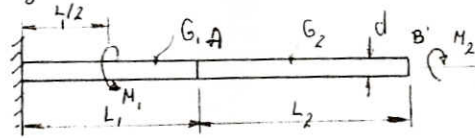


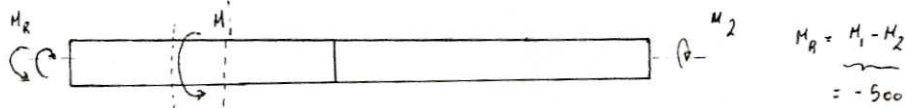
54

→ En la figura se muestra un eje macizo compuesto de dos barras que se sueldan en A. Las barras son de materiales diferentes y por tanto sus módulos de elasticidad son distintos. ¿Qué valor tiene el ángulo de torsión del extremo B?



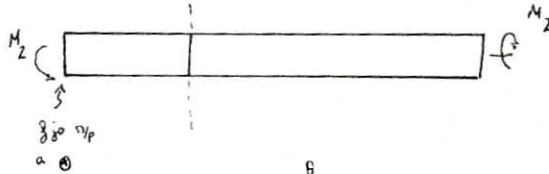
$$1 \text{ pie} = 12 \text{ pulg}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= 10 \text{ pie} & G_1 &= 10 \cdot 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \\ L_2 &= 12 \text{ pie} & G_2 &= 15 \cdot 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \\ M_1 &= 500 \text{ lb pie} & M_2 &= 1000 \text{ lb pie} \\ d &= 3'' \end{aligned}$$

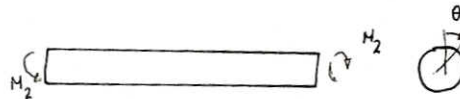


$$M_R = M_1 - M_2 = -500$$

$$M_R = G_1 \theta \frac{\pi d^4}{32 L_1} \Rightarrow \theta = \frac{M_R 16 L_1}{d^4 G_1 \pi} = \frac{500 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 12}{3^4 \cdot 10 \cdot 10^6 \pi} = 4,527 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$



$$\theta = \frac{M_2 16 L_2}{d^4 G_2 \pi} = 9,05 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

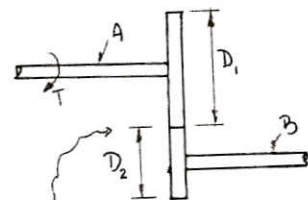


$$\theta = \frac{M_2 32 L_2}{d^4 G_2 \pi} = 0,0145 \text{ rad}$$

$$\text{largo ángulo de torsión en B} = 4,527 \cdot 10^{-3} + 9,05 \cdot 10^{-3} + 0,0145 = 0,028 [\text{rad}] = 1,6^\circ$$

en el sentido de M_2 de 10 pasad

→ El eje A transmite un torque T de 1000 lb-pie con una velocidad angular ω_A de 50 rpm. El diámetro del eje A es 6 pulg. ¿El valor del esfuerzo cortante máximo del eje A es igual para el eje B, ¿qué diámetro debe tener este eje? Dado $D_1 = 2 \text{ pie}$ y $D_2 = 1 \text{ pie}$



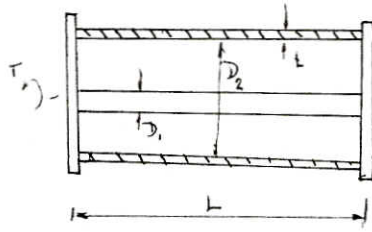
→ transmite la potencia de A a B, se aproximara en perfiles

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_A = \tau_B &\Rightarrow T_A \omega_A = T_B \omega_B \text{ pero } D_1 \omega_A = D_2 \omega_B \text{ velocidad periférica es la misma} \\ \Rightarrow T_A \omega_A &= T_B \frac{D_1}{D_2} \omega_A \Rightarrow \boxed{T_B = \frac{D_2}{D_1} T_A} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{esfuerzo cortante:} \quad \tau_{\text{max}} &= \frac{T_A D_A}{J_A} = \frac{T_A D_A}{\frac{\pi D_A^4}{32}} = \frac{16 T_A}{\pi D_A^3} & \text{esf. cort. max en B: } \tau_{\text{max}} &= \frac{16 T_B}{\pi D_B^3} \\ \Rightarrow \frac{T_B}{D_B^3} &= \frac{T_A}{D_A^3} \Rightarrow T_B = \frac{D_B^3}{D_A^3} T_A \Rightarrow \text{en } (*) \quad \frac{D_B^3}{D_A^3} = \frac{D_2}{D_1} \Rightarrow D_B = D_A \sqrt[3]{\frac{D_2}{D_1}} = 7,56'' \end{aligned}$$

(35)

- Un eje de acero tiene un diámetro $D_1 = 6$ pulg y un eje tubular de aluminio con diámetro interno $D_2 = 12$ pulg y espesor $t = 2$ pulg están fijos a placas rígidas, mediante ellas se aplica al sistema un torque T de 5000 lb-pie. ¿Qué valor tienen los esfuerzos máximos producidos por la torsión en cada material? Torno $L = 10$ pies, $G_{ac} = 15 \cdot 10^6$ lb/pulg² y $G_{al} = 10 \cdot 10^6$ lb/pulg².

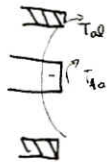


→ κ de torsión en eje tubular es igual al del eje de acero

T se reparte en dos porciones

$$T = T_{ac} + T_{al} \quad (*)$$

lo que recibe eje de acero



$$T_{ac} = \frac{G_{ac}}{L} \theta \frac{\pi D_1^4}{32}$$

$$T_{al} = \frac{G_{al}}{L} \theta \frac{\pi [(D_2+t)^4 - D_2^4]}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{32 T_{ac} L}{G_{ac} \pi D_1^4} = \frac{32 T_{al} L}{G_{al} \pi [(D_2+t)^4 - D_2^4]}$$

$$T_{ac} = \frac{G_{ac}}{G_{al}} \frac{D_1^4}{[(D_2+t)^4 - D_2^4]} T_{al}$$

luego en (*) $T = T_{al} \left\{ 1 + \frac{G_{ac}}{G_{al}} \frac{D_1^4}{[(D_2+t)^4 - D_2^4]} \right\}$

$$\therefore T_{al} = 5000 / \left\{ 1 + \frac{15 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^6} \frac{6^4}{[(12+2)^4 - 12^4]} \right\} \quad \text{lb-pie} = 4504,7 \quad (\text{lb-pie})$$

$$\Rightarrow T_{ac} = 495,3$$

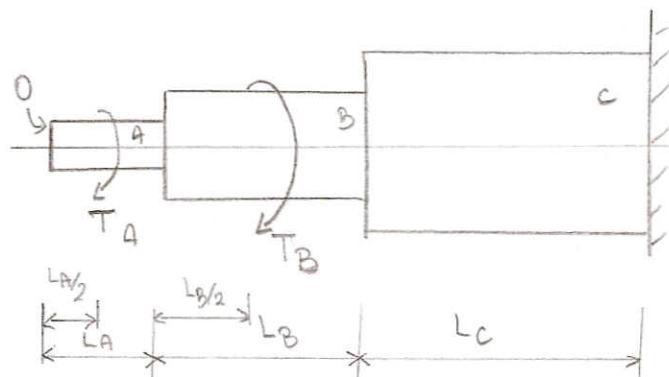
acero: $\tau_{max} = \frac{T_{ac}}{\left(\frac{\pi D_1^3}{32} \right)} \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{16 T_{ac}}{\pi D_1^3} = \frac{16 \cdot 495,3 \text{ [lb-pie]} \cdot 12 \text{ [pulg-pie]}}{\pi \cdot 6^3 \text{ [pulg}^3\text{]}} = 140,1 \left[\frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \right]$

aluminio: $\tau_{max} = \frac{T_{al}}{\frac{\pi [(D_2+t)^4 - D_2^4]}{32}} \cdot \frac{D_2+t}{2} = \frac{16}{\pi} \frac{T_{al} (D_2+t)}{[(D_2+t)^4 - D_2^4]}$

$$= \frac{16}{\pi} \cdot 4504,7 \frac{(12+2) \cdot 12}{[(12+2)^4 - 12^4]} = 218 \left[\frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \right]$$

Problema extra torsión

35.b

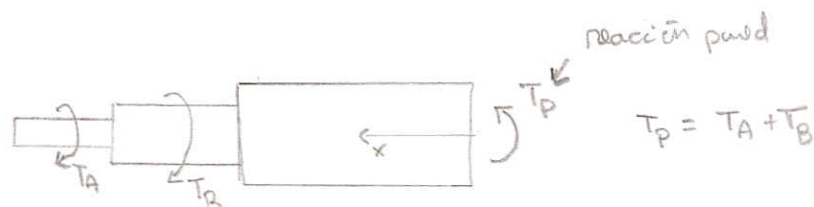


$$G_A, G_B, G_C, D_A, D_B, D_C$$

Determinar τ_{max} como función de x

Calcular el ángulo de torsión en O

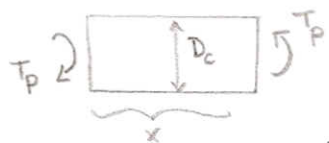
$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$



reacción pared

$$T_P = T_A + T_B$$

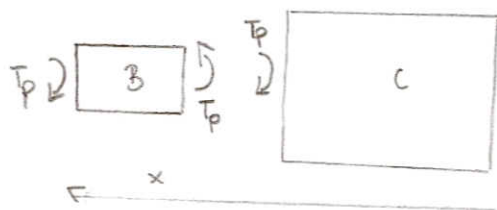
$$0 < x < L_C$$



$$\tau_{max} = T_P \frac{r_{max}}{J} = (T_A + T_B) \frac{D_C/2}{\frac{\pi D_C^4}{32}} = \frac{16 (T_A + T_B)}{\pi D_C^3}$$

$$\theta_C = \frac{T_P L_C}{G_C J_C} = \frac{(T_A + T_B) L_C}{G_C \frac{\pi D_C^4}{32}} = \frac{32 (T_A + T_B) L_C}{G_C \pi D_C^4}$$

$$L_C < x < L_B/2 + L_C$$

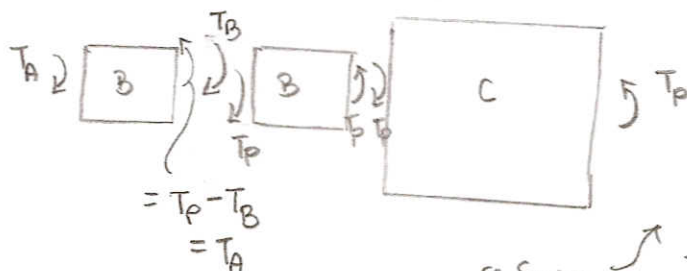


$$\tau_{max} = T_P \frac{D_B/2}{J_B} = \frac{16 (T_A + T_B)}{\pi D_B^3}$$

$$\theta_B = \frac{T_P L_B/2}{G_B J_B} = \frac{(T_A + T_B) L_B}{G_B \frac{\pi D_B^4}{32}} = \frac{16 (T_A + T_B) L_B}{G_B \pi D_B^4}$$

y que se superpone a θ_C

$$L_B/2 + L_C < x < L_C + L_B$$



$$\tau_{max} = T_A \frac{D_B/2}{J_B} = \frac{16 T_A}{\pi D_B^3}$$

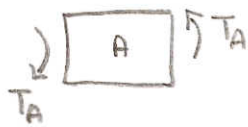
$$\theta_B' = \frac{T_A L_B/2}{G_B J_B} = \frac{16 T_A L_B}{G_B \pi D_B^4}$$

se superpone a θ_B

$$L_c + L_B < x < L_c + L_B + L_A/2$$

$$Z_{max} = \frac{T_A D_{A/2}}{J_A} = \frac{16 T_A}{\pi D_A^3}$$

35.c



$$\theta_A = \frac{T_A L_A/2}{G_A J_A} = \frac{16 T_A L_A}{G_A \pi D_A^4}$$

Se superpone $\uparrow$
a θ_B' en $L_c + L_B + L_A/2$

para $L_c + L_B + L_A/2 < x < L_c + L_B + L_A$ $T=0$ no hay torsión y no hay
más incrementos en el ángulo

$$\Rightarrow \theta_{total} = \theta_c + \theta_B + \theta_B' + \theta_A$$

izquierda