

SOLUCIÓN

Par de torsión interno. Se toma una sección en una posición C intermedia a lo largo del eje del tubo, figura 5-13*b*. La única incógnita en la sección es el par de torsión interno T . El equilibrio por fuerza y momento respecto a los ejes x y z se satisface. Se requiere:

$$\begin{aligned}\Sigma M_y = 0; \quad & 80 \text{ N}(0.3 \text{ m}) + 80 \text{ N}(0.2 \text{ m}) - T = 0 \\ & T = 40 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Propiedades de la sección. El momento polar de inercia de la sección transversal del tubo es:

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.05 \text{ m})^4 - (0.04 \text{ m})^4] = 5.80(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Esfuerzo cortante. Para cualquier punto sobre la superficie exterior del tubo, $\rho = c_o = 0.05 \text{ m}$, tenemos

$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}(0.05 \text{ m})}{5.80(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.345 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Para cualquier punto sobre la superficie interior, $\rho = c_i = 0.04 \text{ m}$, por lo que:

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}(0.04 \text{ m})}{5.80(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.276 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Para mostrar cómo esos esfuerzos actúan en puntos representativos D y E de la sección transversal, veremos primero la sección transversal desde el frente del segmento CA del tubo, figura 5-13*a*. Sobre esta sección, figura 5-13*c*, el par de torsión interno resultante es igual pero opuesto al mostrado en la figura 5-13*b*. Los esfuerzos cortantes en D y E contribuyen a generar este par y actúan por tanto sobre las caras sombreadas de los elementos en las direcciones mostradas. En consecuencia, advierta cómo las componentes del esfuerzo cortante actúan sobre las otras tres caras. Además, como la cara superior de D y la cara interior de E están sobre regiones libres de esfuerzo, es decir, sobre las paredes exterior e interior del tubo, no puede existir ningún esfuerzo cortante sobre esas caras o sobre las otras caras correspondientes del elemento.

SOLUCIÓN

El par de torsión sobre la flecha se determina con la ecuación 5-10, es decir, $P = T\omega$. Si expresamos P en pies-libra por segundo y ω en radianes/segundo, tenemos:

$$P = 5 \text{ hp} \left(\frac{550 \text{ pies} \cdot \text{libras/s}}{1 \text{ hp}} \right) = 2750 \text{ pies} \cdot \text{libras/s}$$

$$\omega = \frac{175 \text{ rev}}{\text{min}} \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 18.33 \text{ rad/s}$$

Así,

$$P = T\omega; \quad 2750 \text{ pies} \cdot \text{libras/s} = T(18.33 \text{ rad/s})$$

$$T = 150.1 \text{ pies} \cdot \text{libras}$$

Si aplicamos la ecuación 5-12, obtenemos:

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{T}{\tau_{\text{perm}}}$$

$$c = \left(\frac{2T}{\pi\tau_{\text{perm}}} \right)^{1/3} = \left(\frac{2(150.1 \text{ pies} \cdot \text{libras})(12 \text{ pulg/pie})}{\pi(14\,500 \text{ libras/pulg}^2)} \right)^{1/3}$$

$$c = 0.429 \text{ pulg}$$

Como $2c = 0.858$ pulg, seleccionamos una flecha con diámetro de

$$d = \frac{7}{8} \text{ pulg} = 0.875 \text{ pulg} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 5-9

El poste sólido de hierro colado de 2 pulg de diámetro mostrado en la figura 5-22a está enterrado 24 pulg en el suelo. Si se le aplica un par de torsión por medio de una llave rígida a su parte superior, determine el esfuerzo cortante máximo en el poste y el ángulo de torsión en su parte superior. Suponga que el par está a punto de hacer girar el poste y que el suelo ejerce una resistencia torsional uniforme de t lb · pulg/pulg a lo largo de su longitud enterrada de 24 pulg. $G = 5.5(10^3)$ ksi.

SOLUCIÓN

Par de torsión interno. El par de torsión interno en el segmento AB del poste es constante. Del diagrama de cuerpo libre, figura 5-22b, tenemos:

$$\Sigma M_z = 0; \quad T_{AB} = 25 \text{ lb}(12 \text{ pulg}) = 300 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

La magnitud del par de torsión distribuido uniformemente a lo largo del segmento BC enterrado puede determinarse a partir del equilibrio de todo el poste, figura 5-22c. En este caso,

$$\Sigma M_z = 0; \quad 25 \text{ lb}(12 \text{ pulg}) - t(24 \text{ pulg}) = 0$$

$$t = 12.5 \text{ lb} \cdot \text{pulg/pulg}$$

Por tanto, del diagrama de cuerpo libre de una sección de poste situada en la posición x dentro de la región BC , figura 5-22d, tenemos:

$$\Sigma M_z = 0; \quad T_{BC} - 12.5x = 0$$

$$T_{BC} = 12.5x$$

Esfuerzo cortante máximo. El esfuerzo cortante más grande ocurre en la región AB , puesto que el par es máximo ahí y J es constante para el poste. Aplicando la fórmula de torsión, tenemos:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_{AB}c}{J} = \frac{(300 \text{ lb} \cdot \text{pulg})(1 \text{ pulg})}{(\pi/2)(1 \text{ pulg})^4} = 191 \text{ psi} \quad \text{Resp.}$$

Ángulo de torsión. El ángulo de torsión en la parte superior puede determinarse respecto a la parte inferior del poste, ya que este extremo está fijo y a punto de girar. Ambos segmentos, AB y BC , giran, y en este caso tenemos:

$$\phi_A = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} + \int_0^{L_{BC}} \frac{T_{BC} dx}{JG}$$

$$= \frac{(300 \text{ lb} \cdot \text{pulg})(36 \text{ pulg})}{JG} + \int_0^{24 \text{ pulg}} \frac{12.5x dx}{JG}$$

$$= \frac{10\,800 \text{ lb} \cdot \text{pulg}^2}{JG} + \frac{12.5[(24)^2/2] \text{ lb} \cdot \text{pulg}^2}{JG}$$

$$= \frac{14\,400 \text{ lb} \cdot \text{pulg}^2}{(\pi/2)(1 \text{ pulg})^4 5500(10^3) \text{ lb/pulg}^2} = 0.00167 \text{ rad} \quad \text{Resp.}$$

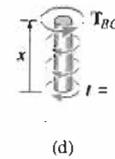
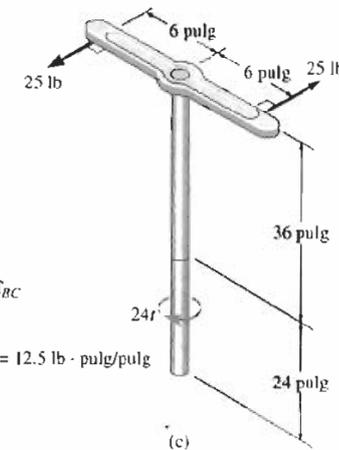
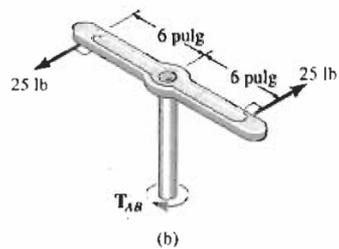
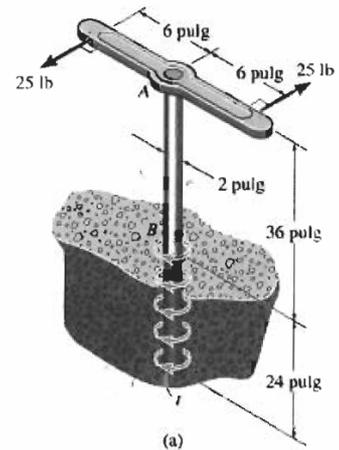
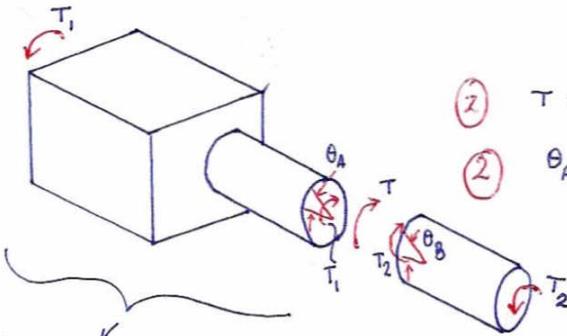


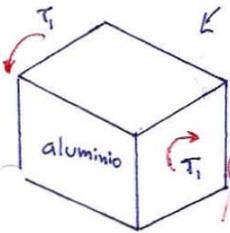
Figura 5-22

①

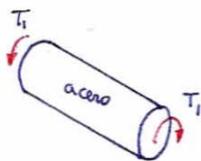


② $T = T_1 + T_2$

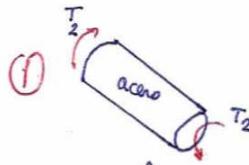
② $\theta_A = \theta_B$ ← el mismo ángulo de deformación en el punto de aplicación de T



$T_1 = \frac{\theta_{al} G_{al} J_{al}}{L_1}$
 $\Rightarrow \theta_{al} = \frac{T_1 L_1}{G_{al} J_{al}}$ ①



$T_1 = \frac{\theta_{ac} G_{ac} J_{ac}}{L_2/2}$
 $\theta_{ac} = \frac{T_1 L_2}{2 G_{ac} J_{ac}}$ ①



$T_2 = \frac{\theta_B G_{ac} J_{ac}}{L_2/2}$
 $\theta_B = \frac{T_2 L_2}{2 G_{ac} J_{ac}}$ ①

$\theta_A = \theta_{ac} + \theta_{al}$

$\theta_A = \theta_B \Rightarrow \frac{T_1 L_1}{G_{al} J_{al}} + \frac{T_1 L_2}{2 G_{ac} J_{ac}} = \frac{T_2 L_2}{2 G_{ac} J_{ac}}$

$T_2 = T_1 + T_1 \frac{2 L_1 G_{ac} J_{ac}}{L_2 G_{al} J_{al}}$ ②

$\Rightarrow T_1 + T_2 = T \Rightarrow T_1 = \frac{T}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{L_1 G_{ac} J_{ac}}{L_2 G_{al} J_{al}}} \right)$

$$J_{ac} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi}{32} \times 0.1^4 = 9.81748 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (1)$$

(6)

$$J_{al} = k_2 a b^3 \quad k_2? \quad \text{interpolando} \quad \frac{k_2 - 0.141}{1.333 - 1} = \frac{0.196 - 0.141}{1.5 - 1} \quad (1)$$

$a/b \approx 1.333$

$$\Rightarrow k_2 \approx 0.177666$$

$$J_{al} = 0.17766 \times 0.2 \times 0.15^3 = 0.000119925 \text{ m}^4$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{3000}{2} \left(1 + \frac{1}{\frac{1 \times 83 \times 10^9 \times 9.81748 \times 10^{-6}}{0.6 \times 27.6 \times 10^9 \times 0.000119925}} \right) = 1063.599 \text{ Nm} \quad (1)$$

$$\Rightarrow T_2 = T - T_1 = 1936.04 \text{ Nm} \quad (1)$$

eje acero $\tau_{max} = \frac{T_2 D}{2 J_{ac}} = \frac{1936.04 \times 0.1}{2 \times 9.81748 \times 10^{-6}} \approx 9.862 \text{ MPa} \quad (2)$

eje aluminio $\tau_{max} = \frac{T_1}{k_1 a b^2} \quad k_1? \quad \text{interpolando} \quad \frac{k_1 - 0.208}{1.333 - 1} = \frac{0.231 - 0.208}{1.5 - 1} \quad (1)$

$$\Rightarrow k_1 \approx 0.2233$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{1063.599}{0.2233 \times 0.2 \times 0.15^2} \approx 1.0585 \text{ MPa} \quad (1)$$

Formulario

Torsión $T = \frac{\theta G J}{L}$

Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$

$\tau = \frac{Tr}{J}$

Sección rectangular $J = k_2 a b^3$

$\tau = \frac{T}{k_1 a b^2} \quad b \leq a$

a/b	1	1.5	2	4	10	∞
k_1	0.208	0.231	0.246	0.282	0.312	1/3
k_2	0.141	0.196	0.281	0.281	0.312	1/3