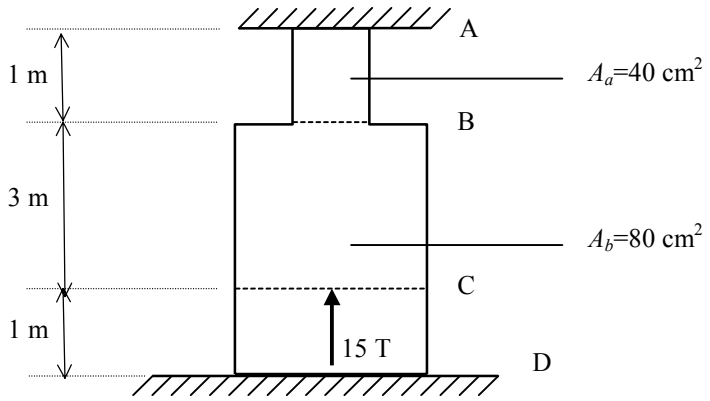
Problema 2.2

En la barra esquematizada en la figura adjunta los extremos A y D están empotrados. Determinar las tensiones en ambas secciones, cuyas superficies son: A_a=40 cm^2 y A_b=80 cm^2 .
Hallar también el diagrama de esfuerzos axiles.

Datos: E=2·10^5 MPa.



Resolución:

$$\sum F_V = 0$$

$$R_A + R_D = 15 \text{ T} = 150000 \text{ N}$$

Ecuación de deformación

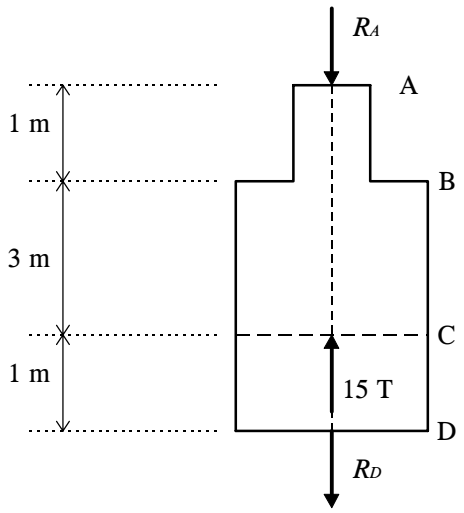
El tramo AC está comprimido, por tanto R_A es un esfuerzo de compresión, y el tramo CD está traccionado, por lo que R_D es un esfuerzo de tracción.

Al estar los dos extremos , A y D, empotrados la variación total de longitud es 0; y el acortamiento del tramo superior es igual al alargamiento del tramo inferior:

$$\Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = \Delta L_{CD}$$

Aplicando la ley de Hooke: $$\Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$$

$$\frac{R_A \cdot L_{AB}}{E \cdot A_a} + \frac{R_A \cdot L_{BC}}{E \cdot A_b} = \frac{R_D \cdot L_{CD}}{E \cdot A_b}$$



$$\frac{R_A \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^2} + \frac{R_A \cdot 3000}{2 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^2} = \frac{R_D \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^2}$$

$$R_A \cdot 2000 + R_A \cdot 3000 = R_D \cdot 1000$$

Resolviendo las ecuaciones, tenemos

$$R_A = 25000\ \text{N} = 2.5\ \text{T}$$

$$R_B = 125000\ \text{N} = 12.5\ \text{T}$$

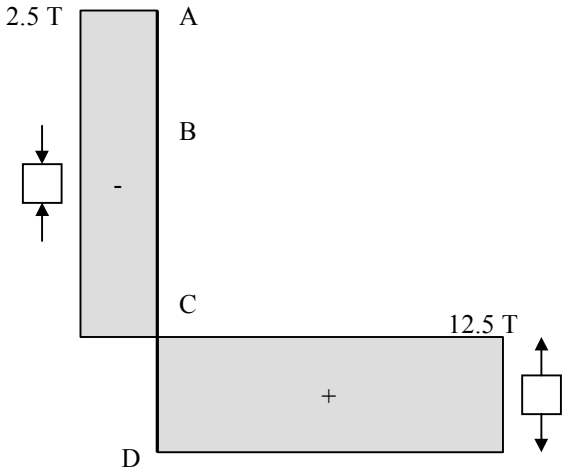
Cálculo de las tensiones.

$$\text{Tramo AB: } \sigma_{AB} = \frac{25000\ \text{N}}{40 \cdot 10^2\ \text{mm}^2} = 6.25\ \text{MPa} \quad \text{(COMP.)}$$

$$\text{Tramo BC: } \sigma_{BC} = \frac{25000\ \text{N}}{80 \cdot 10^2\ \text{mm}^2} = 3.125\ \text{MPa} \quad \text{(COMP.)}$$

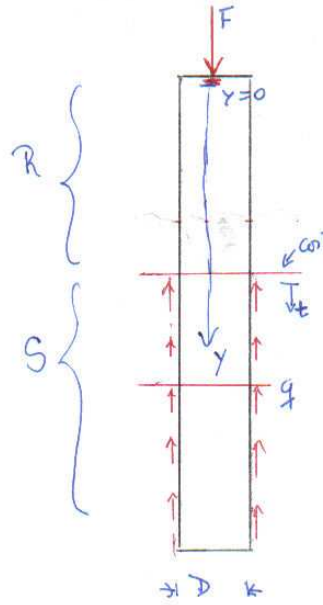
$$\text{Tramo CD: } \sigma_{CD} = \frac{125000\ \text{N}}{80 \cdot 10^2\ \text{mm}^2} = 15.625\ \text{MPa} \quad \text{(TRAC.)}$$

Diagrama de esfuerzos normales:



Pregunta 2

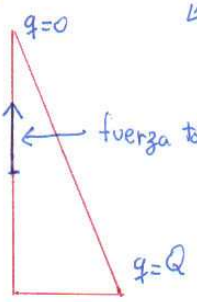
(2) (20) (a)



$F = 10^4\ N$
$R = 2m$ $E = 450\ MPa$
$S = 8m$

$q(t) = \frac{Q}{S}t \Rightarrow q(0)=0$ y $q(t=S)=Q$

Fuerza roce $\pi D \int_0^S \frac{Q}{S} t\, dt = \frac{Q}{2} S \pi D$



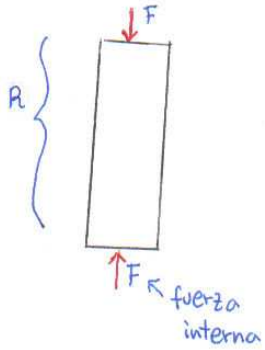
$F_R = \frac{Q}{2} S \pi D$ (área del manto del cilindro "sumergido") (5)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F = \frac{Q}{2} S \pi D \Rightarrow Q = \frac{2F}{\pi S D}$

$\Rightarrow Q = 2652.58\ N/m^2$

El eje y va desde arriba hasta $y = R+S$

→ Corte $y = R$

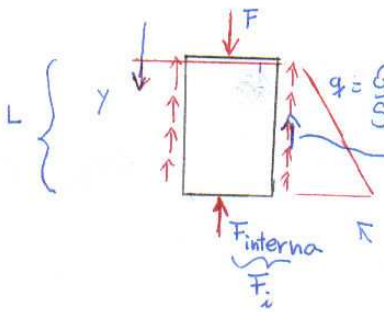


$\sigma = \frac{F}{\text{Area}} = \frac{F}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} \frac{1}{E}$

(5) $\Rightarrow \Delta R = \frac{F}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} \frac{R}{E} = 6.2876 \times 10^{-4}\ m = 0,62876\ mm$

↑ acortamiento

→ Corte $S > y > R$



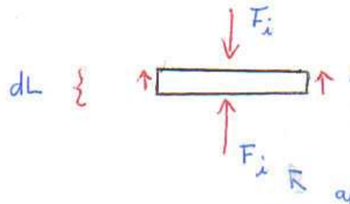
Fuerza roce $= \pi D \int_0^L \frac{Q}{S} t\, dt = \pi D \frac{Q L^2}{2S}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_i + \pi D \frac{Q L^2}{2S} = F$ (5)

Para $0 \le L < S$

$\Rightarrow F_i = F - \pi D \frac{Q}{2S} L^2$ $F_i(L=S) = 0$ ✓

analizando un elemento pequeño



$\leftarrow q_{total} = \frac{Q}{S} L \; \pi D \, dL$

Se puede despreciar aproximadamente lo mismo si dL es pequeño

$$\leftarrow \varepsilon = \frac{\Delta(dL)}{dL} = \frac{F_i}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} \frac{1}{E}$$

$$\Rightarrow \int_0^S \Delta(dL) = \frac{1}{\left(\frac{\pi D^2}{4} E\right)} \int_0^S F - \frac{\pi D Q}{2S} L^2 \, dL$$

(5) $$\Delta S = \frac{1}{\left(\frac{\pi D^2}{4} E\right)} \left(FS - \frac{\pi D Q}{6 \cancel{S}} S^{\cancel{3}\,2}\right)$$

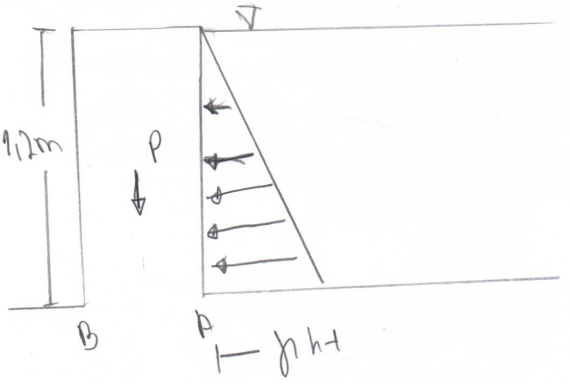
↑ acota

$= 1.67669 \times 10^{-3}$ m

$= 1.6766$ mm

total $\Delta S + \Delta R = 2.30536$ mm

P3)



$\gamma_{Hormigon} = 2320\ kgf/m^3$

$\gamma_{H_2O} = 1000\ kgf/m^3$

$\gamma = \rho g$

$w = 40\ m$

a) Fuerza equivalente que ejerce la presión del agua

$$F_{eq} = \frac{d h^2}{2} w = 1000\ kgf/m^3 \cdot (1,2\ m)^2 \cdot 40\ m = 28.800\ kgf$$

$R_f = 0,4$: distancia donde se aplica F_{eq}, medida desde abajo.

$$P = \gamma \cdot V = 2320\ \frac{kgf}{m^3} \cdot 1,2\ m \cdot 0,3\ m \cdot 40\ m = 33408\ kgf$$

$$\sigma_N = \frac{P}{0,3 \cdot 40} = 2784\ \frac{kgf}{m^2} \quad (-)\ \text{compresión}$$

$$M = F_{eq} \cdot R_f = 11520\ kgf \cdot m$$

$$-\sigma_f = \frac{M y}{I} = \frac{11520\ kgf \cdot m \cdot 0,15\ m}{\frac{40 \cdot 0,3^3}{12}\ m^4} = 19200\ \frac{kgf}{m^2}$$

En el punto A es el mínimo porque hay compresión (σ_N) y tracción (σ_f)

En el punto B se produce el máximo porque hay compresión (σ_N) y compresión (σ_f).

En el punto A es tracción (+)

" " " B es compresión (-)

Sumando los esfuerzos en cada punto.

Punto A $\sigma = -2784\ \frac{kgf}{m^2} + 19200\ \frac{kgf}{m^2} = 16416\ \frac{kgf}{m^2}$ (Tracción)

Punto B $\sigma = -2784\ \frac{kgf}{m^2} - 19200\ \frac{kgf}{m^2} = -21984\ \frac{kgf}{m^2}$ (Compresión)

b) Hay que calcular σ_f en A e igualarlo a la compresión que produce el peso. Porque en este punto la tracción es máxima, si no hay tracción aquí no habrá en toda la sección.

$$F_{eq} = \gamma \frac{d^2}{2} w = \frac{1000 \cdot 40}{2} d^2 \Rightarrow \sigma_f = \frac{\frac{1000}{2} 40 h^2 \frac{h}{3} \cdot 0{,}15}{\frac{40 \cdot 0{,}3^3}{12}}$$

$$R_f = 0{,}3\,d$$

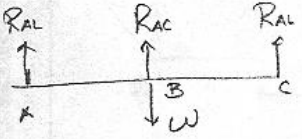
$$\sigma_f = \sigma_N = 2784$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 0{,}63\,m}$$

P6) imponiendo igualdad de desplazamientos, para que la barra rígida quede horizontal, tenemos

$$\Delta_{AC} = \Delta_{AL} \Rightarrow \frac{R_{AC}\,h}{A\,E_{AC}} = \frac{R_{AL}\,h}{A\,E_{AL}} \Rightarrow \frac{R_{AC}}{E_{AC}} = \frac{R_{AL}}{E_{AL}}$$

$$R_{AC} = R_{AL}\left(\frac{E_{AC}}{E_{AL}}\right)$$



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{AC} + 2R_{AL} = \omega$$

$$\Rightarrow R_{AL}\left(\frac{E_{AC}}{E_{AL}} + 2\right) = \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{AL} = \frac{\omega\,E_{AL}}{E_{AC} + 2E_{AL}}}$$

$$\boxed{R_{AC} = \frac{2\omega\,E_{AL}}{E_{AC} + 2E_{AL}}}$$