12.3 CENTROIDES DE ÁREAS COMPUESTAS

En los trabajos de ingeniería rara vez tenemos que localizar centroides por integración, porque los centroides de figuras geométricas comunes ya se conocen y se encuentran tabulados; sin embargo, con frecuencia necesitamos localizar los centroides de áreas compuestas de varias partes, en las que cada parte tiene una forma geométrica familiar, como un rectángulo o un círculo. Ejemplos de tales **áreas compuestas** son las secciones transversales de vigas y columnas que usualmente consisten en elementos rectangulares (por ejemplo, vea las Figs. 12-2, 12-3 y 12-4).

Las áreas y momentos estáticos de las áreas compuestas pueden calcularse sumando las propiedades correspondientes de las partes componentes. Supongamos que un área compuesta se divide en un total de n partes y denotemos el área de la parte i-ésima como A_i. Entonces podemos obtener el área y los momentos estáticos con las siguientes sumas:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad Q_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i \qquad Q_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i \qquad \text{(12-6a,b,c)}$$

en donde $\bar{x}_i$ y $\bar{y}_i$ son las coordenadas del centroide de la parte i-ésima.

Las coordenadas del centroide del área compuesta son

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \text{(12-7a,b)}$$

Como el área compuesta está representada exactamente por las n partes, las ecuaciones anteriores dan resultados exactos para las coordenadas del centroide.

Para ilustrar el uso de las ecuaciones (12-7a) y (12-7b), consideremos el área en forma de L (o sección angular) mostrada en la figura 12-6a. Esta área tiene dimensiones laterales b y c y espesor t. El área puede dividirse en dos rectángulos de áreas A_1 y A_2 con centroides C_1 y C_2, respectivamente (Fig. 12-6b). Las áreas y las coordenadas centroidales de esas dos partes son

$$A_1 = bt \qquad \bar{x}_1 = \frac{t}{2} \qquad \bar{y}_1 = \frac{b}{2}$$

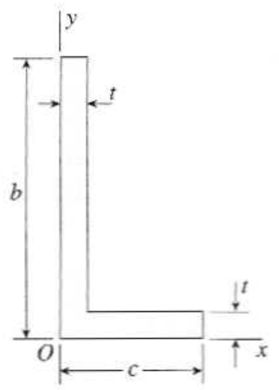
$$A_2 = (c - t)t \qquad \bar{x}_2 = \frac{c + t}{2} \qquad \bar{y}_2 = \frac{t}{2}$$

Por tanto, el área y los momentos estáticos del área compuesta (de las Ecs. 12-6a, b y c) son

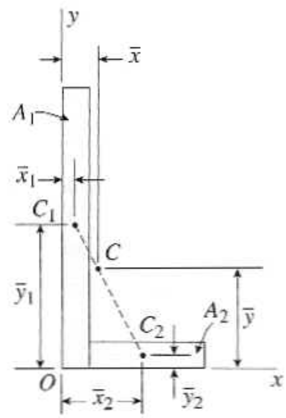
$$A = A_1 + A_2 = t(b + c - t)$$

$$Q_x = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 = \frac{t}{2}(b^2 + ct - t^2)$$

$$Q_y = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 = \frac{t}{2}(bt + c^2 - t^2)$$



(a)



(b)

FIGURA 12-6 Centroide de un área compuesta de dos partes.

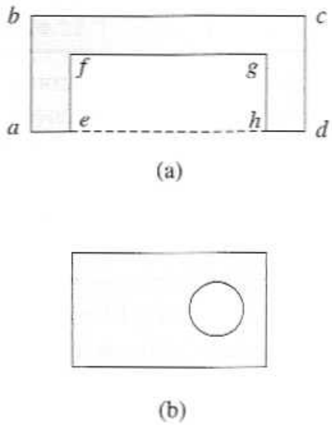


FIGURA 12-7 Áreas compuestas con un recorte y un orificio.

Por último, podemos obtener las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide C del área compuesta (Fig. 12-6b) de las ecuaciones (12-7a) y (12-7b):

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{bt + c^2 - t^2}{2(b + c - t)} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{b^2 + ct - t^2}{2(b + c - t)} \qquad (12\text{-8a,b})$$

Un procedimiento similar puede usarse para áreas más complejas, como se ilustra abajo en el ejemplo 12-2.

Nota 1: cuando un área compuesta se divide en sólo dos partes, el centroide C del área total se encuentra sobre la línea que une los centroides C_1 y C_2 de las dos partes (según se muestra en la Fig. 12-6b para el área en forma de L).

Nota 2: al usar las fórmulas para áreas compuestas (Ecs. 12-6 y 12-7) podemos considerar la *ausencia* de un área por medio de una resta. Este procedimiento es útil cuando se tienen recortes o orificios en la figura; por ejemplo, consideremos el área mostrada en la figura 12-7a. Podemos analizarla como un área compuesta restando las propiedades del rectángulo interno *efgh* de las correspondientes propiedades del rectángulo externo *abcd*. (Desde otro punto de vista, podemos pensar que el rectángulo externo es un "área positiva" y el rectángulo interno un "área negativa".) De manera similar, si un área tiene un orificio (Fig. 12-7b), podemos restar las propiedades del área del orificio de las del rectángulo externo (de nuevo, se obtiene el mismo efecto si tratamos el rectángulo externo como un "área positiva" y el orificio como un "área negativa").

Ejemplo 12-2

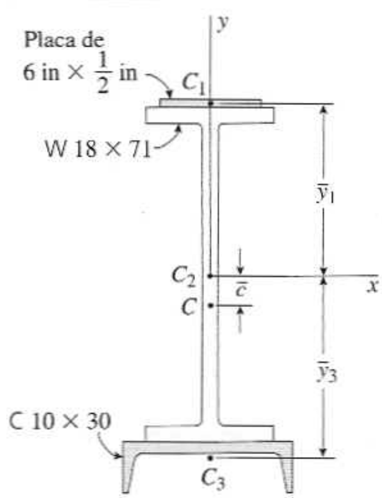


FIGURA 12-8 Ejemplo 12-2. Centroide de un área compuesta.

La sección transversal de una viga de acero está hecha con una sección W 18 × 71 doble T, con una cubreplaca de 6 in × 1/2 in soldada al ala superior y una sección en canal C 10 × 30 soldada al ala inferior (Fig. 12-8).

Localice el centroide C del área de la sección transversal.

Solución

Denotemos las áreas de la cubreplaca, la sección doble T y la sección en canal como las áreas A_1, A_2 y A_3, respectivamente. En la figura 12-8, los centroides de estas tres áreas se designan C_1, C_2 y C_3. Note que el área compuesta tiene un eje de simetría, de suerte que todos los centroides se encuentran sobre ese eje. Las tres áreas parciales son

$$A_1 = (6 \text{ in})(0.5 \text{ in}) = 3.0 \text{ in}^2 \qquad A_2 = 20.8 \text{ in}^2 \qquad A_3 = 8.82 \text{ in}^2$$

en donde las áreas A_2 y A_3 se obtienen de las tablas E-1 y E-3 del apéndice E.

Coloquemos el origen de los ejes x y y en el centroide C_2 de la sección doble T. Las distancias del eje x a los centroides de las tres área son: