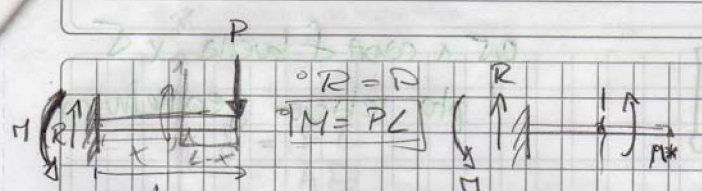


Pauta pregunta 2

5



$\circ R = P$   
 $\circ M = PL$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-M}{EI}$

$y = \frac{1}{EI} \int \int -M(x) dx$

$M^* + M - R \cdot x = 0$   
 $M^* = Rx - PL$   
 $M^* = P(x - L)$

$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-M}{EI} \int \int P(L - x) dx$  0,3

0,3  $\left[ \frac{1}{EI} \left[ \frac{P(L-x)^2}{2} + C_1 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \right]$  (1° integración)

$\left[ \frac{1}{EI} \left[ \frac{P(L-x)^3}{6} + C_1 x + C_2 \right] \right] = y(x)$  (2° integración)

$y(0) = 0$  0,15  $\frac{dy}{dx}(x=0) = 0$  (condiciones) 0,15

$\Rightarrow \frac{PL^3}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{PL^3}{6}$  0,3 ( $y(0) = 0$ )

$-\frac{P(L-x)^2}{2} + C_1 = 0$  ( $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ )

$C_1 = \frac{PL^2}{2}$  0,3

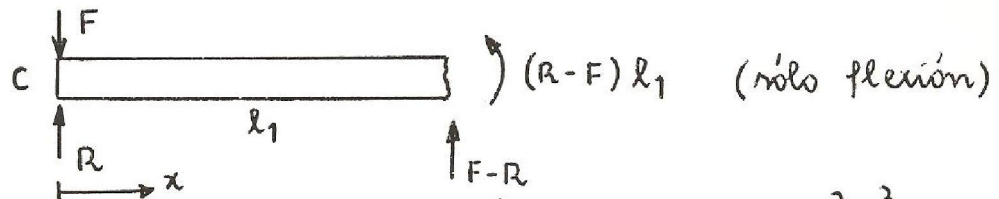
$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P(L-x)^3}{6} + \frac{PL^2 x}{2} - \frac{PL^3}{6} \right]$

$y(L) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL^3}{2} - \frac{PL^3}{6} \right] = \frac{PL^3}{3EI}$  0,3

PROBLEMA 1

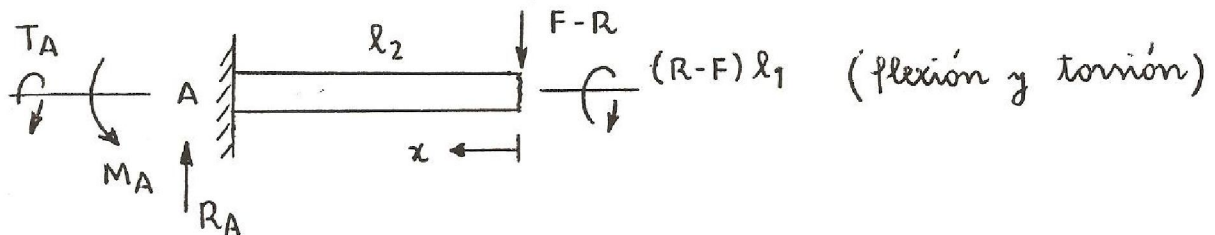
Para usar el método de energía, calculemos la energía del sistema.

Barras AC En el 1<sup>er</sup> tramo recto tenemos:



$$M(x) = (R-F)x \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2EI} \int_0^{l_1} M^2(x) dx = \frac{(R-F)^2 l_1^3}{6EI}$$

En el 2<sup>do</sup> tramo recto tenemos:



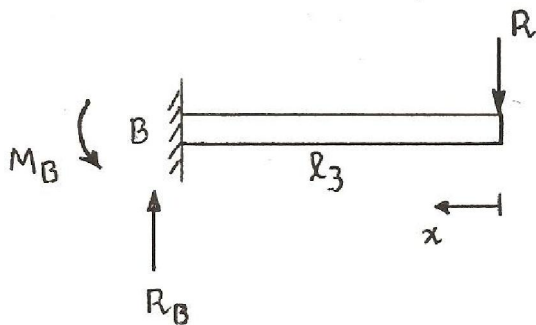
$$M(x) = (R-F)x \quad y \quad T(x) = (R-F)l_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_2 &= \frac{1}{2EI} \int_0^{l_2} M^2(x) dx + \frac{1}{2GJ} \int_0^{l_2} T^2(x) dx \\ &= \frac{(R-F)^2 l_2^3}{6EI} + \frac{(R-F)^2 l_1^2 l_2}{2GJ} // \end{aligned}$$

Además, las reacciones en A serán:

$$R_A = F-R, \quad M_A = (F-R)l_2, \quad T_A = (F-R)l_1$$

Barras BC : Aquí tenemos sólo flexión, luego:



$$\begin{aligned} M(x) &= -Rx \\ \Rightarrow U_3 &= \frac{1}{2EI_2} \int_0^{l_3} M^2(x) dx \\ &= \frac{R^2 l_3^3}{6EI_2} \end{aligned}$$

y las reacciones en B son:  $M_B = Rl_3, \quad R_B = R$

La energía total es, entonces :

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{(R-F)^2}{6EI} (\ell_1^3 + \ell_2^3) + \frac{(R-F)^2}{2GJ} \ell_1^2 \ell_2 + \frac{R^2 \ell_3^3}{6EI_2}$$

$$U = (R-F)^2 \left\{ \frac{\ell_1^3 + \ell_2^3}{6EI} + \frac{\ell_1^2 \ell_2}{2GJ} \right\} + \frac{R^2 \ell_3^3}{6EI_2}$$

Aplicando el teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0 \quad \text{y como } R_B = R \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial R} = 0$$

$$\Rightarrow 2(R-F) \left\{ \frac{\ell_1^3 + \ell_2^3}{6EI} + \frac{\ell_1^2 \ell_2}{2GJ} \right\} + \frac{R \ell_3^3}{3EI_2} = 0 \quad (*)$$

despejando

$$R = \frac{F}{1 + K}$$

$$\text{donde} \quad K = \frac{\ell_3^3}{\left(\frac{I_2}{I}\right) (\ell_1^3 + \ell_2^3) + 3 \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{I_2}{J}\right) \ell_1^2 \ell_2}$$

introduciendo los datos:

$$I = \frac{\pi \phi^4}{64} = 3.976 \text{ cm}^4$$

$$J = 2I = 7.952 \text{ cm}^4$$

$$G = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\ell_1 = 80 \text{ cm}$$

$$\ell_2 = 40 \text{ cm}$$

$$\ell_3 = 30 \text{ cm}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} (3)(2)^3 = 2 \text{ cm}^4$$

$$\text{se obtiene } R = 0,9699 F$$

y como  $F = 1000 \text{ kg}$

$$\Rightarrow R = 969,9 \text{ kg}$$

Las demás reacciones están todas en función de R, luego:

$$R_A = F - R = 30,1 \text{ kg}$$

$$M_A = (F - R) 40 = 1204 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$T_A = (F - R) 80 = 2408 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$R_B = R = 969,9 \text{ kg}$$

$$M_B = R \times 30 = 29097 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Nótese que la ecuación (\*) puede reescribirse de la forma siguiente:

$$\underbrace{\frac{(F-R) l_1^3}{3EI}}_{\Delta_1} + \underbrace{\frac{(F-R) l_2^3}{3EI}}_{\Delta_2} + \underbrace{\frac{(F-R) l_1 \cdot l_2}{GJ} l_1}_{\Delta \phi_2 \cdot l_1} = \underbrace{\frac{R l_3^3}{3EI_2}}_{\Delta_3}$$

que es la ecuación de compatibilidad de las deformaciones, ya que:

$\Delta_1$  = deflexión del tramo 1 en barra AC como si éste estuviera empotrada en el doblez

$\Delta_2$  = deflexión del tramo 2 en barra AC.

$\Delta \phi_2$  = giro del tramo 2 (ángulo de torsión del tramo)

$l_1 \cdot \Delta \phi_2$  = descenso de C debido al giro del tramo 2

$\Delta_3$  = deflexión de la viga rectangular.