

S. TIMOSHENKO  
PROFESOR DE MECÁNICA DE LA UNIVERSIDAD DE STANFORD

# RESISTENCIA DE MATERIALES

PRIMERA PARTE

TEORÍA ELEMENTAL Y PROBLEMAS

TRADUCIDO DEL INGLÉS

por

TOMÁS DELGADO PÉREZ DE ALBA

INGENIERO INDUSTRIAL Y AERONÁUTICO



ESPASA-CALPE, S. A.

MADRID

1 9 5 7

## NOTACIONES

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Fatigas normales ligadas a planos perpendiculares al eje $x, y, z$ .
$\sigma_n$	Fatiga normal ligada a un plano perpendicular a la dirección $n$ .
$\sigma_{Fl}$	Fatiga normal en el punto de fluencia.
$\sigma_t$	Fatiga normal de trabajo.
$\tau$	Fatiga cortante.
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Fatigas cortantes paralelas a los ejes $y, z, x$ , y ligadas a planos perpendiculares a los ejes $x, y, z$ .
$\tau_t$	Fatiga cortante de trabajo.
$\delta$	Alargamiento total, flecha total.
$\epsilon$	Alargamiento unitario.
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Alargamiento unitario en las direcciones $x, y, z$ .
$\gamma$	Distorsión unitaria, peso por unidad de volumen.
$E$	Módulo de elasticidad en tracción y compresión.
$G$	Módulo de elasticidad por cortadura.
$\mu$	Relación de Poisson.
$\Delta$	Dilatación.
$K$	Módulo de elasticidad por volumen.
$M_t$	Momento torsor.
$M$	Momento flector en una viga.
$V$	Fuerza cortante en una viga.
$A$	Area de sección recta.
$I_y, I_z$	Momentos de inercia de una figura plana con relación a los ejes $y$ y $z$ .

$k_y, k_z$	Radios de giro correspondientes a $I_y, I_z$ .
$I_p$	Momento de inercia polar.
$Z$	Momento resistente.
$C$	Rigidez a la torsión.
$l$	Longitud de una barra, luz de una viga.
$P, Q$	Fuerzas concentradas.
$t$	Temperatura, espesor.
$\alpha$	Coefficiente de dilatación por el calor.
$U$	Energía de deformación.
$w$	Energía de deformación por unidad de volumen.
$h$	Altura de una viga, espesor de una placa.
$q$	carga por unidad de longitud.
$\Phi, \theta$	Angulos.
$p$	Presión.
$D, d$	Diámetros.
$R, r$	Radios.
$W$	Peso, carga.

## ÍNDICE

Capítulos	Páginas
<b>I.—TRACCIÓN Y COMPRESIÓN POR DEBAJO DEL LÍMITE DE ELASTICIDAD</b> .....	1
1. Elasticidad.....	1
2. Ley de Hooke.....	2
3. Diagrama de tracción.....	6
4. Fatiga de trabajo.....	8
5. Fatigas y deformaciones producidas en una barra por su propio peso.....	14
6. Problemas estáticamente indeterminados en tracción y compresión.....	18
7. Fatigas iniciales y térmicas.....	25
8. Extensión de un anillo circular.....	28
<b>II.—ANÁLISIS DE FATIGAS Y DEFORMACIONES</b> .....	34
9. Variación de la fatiga en la extensión y compresión simple al considerar secciones oblicuas al eje de la barra.....	34
10. El círculo de fatigas.....	37
11. Tracción o compresión en dos direcciones perpendiculares.....	40
12. El círculo de Mohr para fatigas combinadas.....	42
13. Fatigas principales.....	45
14. Análisis de la deformación en el caso de extensión simple.....	48
15. Deformación en el caso de extensión o compresión en dos direcciones perpendiculares.....	50
16. Fatiga cortante pura.....	52
17. Fatigas de trabajo por cortadura.....	55
18. Tracción o compresión en tres direcciones perpendiculares.....	59
<b>III.—FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR</b> .....	63
19. Tipos de vigas.....	63
20. Momento flector y fuerza cortante.....	65
21. Relación entre el momento flector y la fuerza cortante.....	68
22. Diagramas del momento flector y de la fuerza cortante.....	70

Capítulos	Páginas
<b>IV.—FATIGAS EN LAS VIGAS</b> .....	84
23. Flexión pura de barras prismáticas.....	84
24. Vigas con formas diversas de sección recta.....	93
25. Caso general de vigas cargadas transversalmente...	98
26. La fatiga cortante en la flexión .....	105
27. Distribución de las fatigas cortantes en el caso de una sección circular.....	112
28. Distribución de la fatiga cortante en vigas en I ....	114
29. Fatigas principales en la flexión.....	116
30. Fatigas en vigas compuestas.....	121
<b>V.—DEFORMACIÓN DE VIGAS CARGADAS TRANSVERSALMENTE..</b>	129
31. Ecuación diferencial de la elástica.....	129
32. Flexión de una viga uniformemente cargada apoyada en sus extremos.....	132
33. Deformación de una viga simplemente apoyada por una carga concentrada .....	135
34. Modo de encontrar las deformaciones en la flexión utilizando el diagrama de momentos flectores. Método de superposición.....	138
35. Elástica de una viga en voladizo .....	141
36. Elástica de una viga apoyada en los extremos.....	146
37. Deformación de vigas apoyadas y con voladizos....	155
38. Deformación de vigas cuando las cargas no son paralelas a uno de los planos principales de flexión.	158
39. Efecto de la fuerza cortante en la deformación de las vigas.....	162
<b>VI.—CASOS HIPERESTÁTICOS EN LA FLEXIÓN</b> .....	168
40. Exceso de ligaduras.....	168
41. Viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro.	171
42. Viga con los dos extremos empotrados.....	177
43. Pórticos y cuadros.....	181
44. Vigas sobre tres apoyos.....	189
45. Vigas continuas.....	192
<b>VII. VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE. VIGAS DE DOS MATERIALES.</b>	201
46. Vigas de sección variable.....	201
47. Vigas de materiales diferentes.....	208
48. Vigas de hormigón armado.....	212
49. Fatigas cortantes en vigas de hormigón armado....	216
<b>VIII.—FLEXIÓN ACOMPAÑADA DE TRACCIÓN O COMPRESIÓN. TEORÍA DE COLUMNAS</b> .....	219
50. Flexión acompañada de tracción o compresión.....	219
51. Cargas excéntricas en cuerpos de poca esbeltez.....	223
52. El núcleo de la sección.....	228
53. Cargas excéntricas en piezas esbeltas y en uno de los planos principales.....	233
54. Carga crítica.....	238
55. Fatiga crítica. Proyecto de columnas.....	243
56. Proyecto de columnas por el método de las inexactitudes supuestas.....	248
57. Fórmulas empíricas para el proyecto de columnas..	251

Capítulos	Páginas
<b>IX.—TORSIÓN Y FLEXIÓN COMBINADA CON TORSIÓN</b> .....	254
58. Torsión de un eje circular.....	254
59. Torsión de árboles huecos.....	260
60. Torsión de ejes de sección rectangular.....	262
61. Resorte helicoidal de espiras cerradas.....	263
62. Flexión y torsión combinadas en ejes circulares....	269
<b>X.—ENERGÍA DE DEFORMACIÓN</b> .....	274
63. Energía elástica de deformación en la tracción.....	274
64. Fatigas producidas por choque.....	278
65. Energía elástica de deformación en los casos de fuerza cortante y torsión .....	285
66. Energía elástica de deformación en la flexión.....	289
67. Flexión producida por choque .....	294
68. La expresión general de la energía de deformación..	299
69. El teorema de Castigliano.....	302
70. Aplicación del teorema de Castigliano a la resolución de problemas estáticamente indeterminados.....	313
71. El teorema de la reciprocidad de los trabajos .....	324
72. Casos de excepción.....	332

### APÉNDICE

<b>MOMENTOS DE INERCIA DE LAS ÁREAS PLANAS</b> .....	335
I. El momento de inercia de un área plana con relación a un eje de su plano.....	335
II. Momento polar de inercia de un área plana.....	338
III. Cambio de ejes.....	340
IV. Producto de inercia. Ejes principales.....	341
V. Cambio de dirección de los ejes. Determinación de los ejes principales.....	343
<b>ÍNDICE DE AUTORES</b> .....	349

# RESISTENCIA DE MATERIALES

## PRIMERA PARTE

### CAPÍTULO PRIMERO

#### TRACCIÓN Y COMPRESIÓN POR DEBAJO DEL LÍMITE DE ELASTICIDAD

1. **Elasticidad.**—Suponemos que un cuerpo está formado por partículas pequeñas o moléculas entre las cuales actúan fuerzas. Estas fuerzas moleculares se oponen a cambios de forma del cuerpo cuando sobre él actúan fuerzas exteriores.

Si un sistema exterior de fuerzas se aplica al cuerpo, sus partículas se desplazan y estos desplazamientos mutuos continúan hasta que se establece equilibrio entre el sistema exterior de fuerzas y las fuerzas interiores.

Se dice en este caso que el cuerpo está en estado de deformación.

Durante la deformación, las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo realizan trabajo, y este trabajo se transforma completa o parcialmente en energía potencial de deformación. Ejemplo de esta acumulación de energía en un cuerpo deformado es el caso de un muelle de reloj.

Si las fuerzas causa de la deformación del cuerpo disminuyen gradualmente, el cuerpo vuelve total o parcialmente a su forma primitiva y durante esta deformación inversa la energía potencial de deformación acumulada en el cuerpo se recupera en forma de trabajo exterior.

Sea, por ejemplo, una barra prismática cargada en su extremo tal como indica la figura 1. Bajo la acción de esta carga, la barra se alarga una cierta cantidad. El punto de aplicación de la carga se desplaza en su dirección y la carga realiza un trabajo positivo durante este movimiento.

Cuando la carga disminuye, el alargamiento de la barra disminuye también, el extremo cargado se desplaza hacia arriba y la energía potencial de deformación se transforma en el trabajo de desplazar la carga en sentido contrario a su dirección.

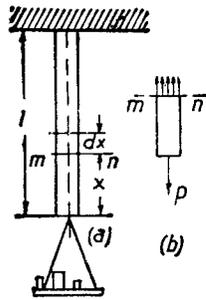


FIG. 1

La propiedad que tienen los cuerpos de recuperar su forma primitiva al descargarlos se denomina elasticidad.

Se dice que el cuerpo es perfectamente elástico si recobra su forma original de un modo completo al descargarlo, y que es parcialmente elástico si la deformación producida por las fuerzas exteriores no desaparece por completo al descargarlo. En el caso de un

cuerpo perfectamente elástico, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores durante la deformación se transforma completamente en energía potencial de deformación.

En el caso de un cuerpo parcialmente elástico, parte de aquel trabajo se transforma en calor desarrollado en el cuerpo durante la deformación no elástica. Experimentalmente, se ha visto que cuerpos tales como el acero, la madera y la piedra pueden considerarse como perfectamente elásticos por debajo de cierto límite que depende de las propiedades del material. Suponiendo que las fuerzas externas que actúan sobre una estructura son conocidas, es un problema fundamental para el proyectista dimensionar las partes de la estructura para que estén en condiciones perfectamente elásticas en todos los casos de carga. Solamente en tales condiciones la estructura tendrá una vida larga y segura y no presentará deformaciones permanentes en sus elementos.

2. Ley de Hooke.—Experimentos realizados sometiendo a extensión barras prismáticas han hecho ver que entre ciertos límites el alargamiento de la barra es proporcional a la fuerza

extensora. Esta sencilla relación lineal entre fuerzas y deformaciones fué enunciada por primera vez por el investigador inglés Robert Hooke<sup>1</sup> en 1678 y lleva su nombre.

Usando la notación:

$P$  Fuerza total de extensión.

$l$  Longitud de la barra.

$A$  Área de la sección recta de la barra.

$\delta$  Alargamiento total de la barra.

$E$  Constante elástica del material, llamada módulo de elasticidad.

La ley de Hooke se expresa por la siguiente ecuación:

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \quad (1)$$

El alargamiento de la barra es proporcional a la fuerza extensora y a la longitud de la barra, e inversamente proporcional a la sección recta y al módulo de elasticidad.

Al realizar estos ensayos deben tomarse las precauciones necesarias para tener la seguridad de que la aplicación de la carga se realiza axialmente. De este modo se evita cualquier flexión de la barra.

Prescindiendo de las porciones de la barra situadas en las proximidades de las fuerzas aplicadas<sup>2</sup>, puede asegurarse que durante la tracción todas las fibras longitudinales de la barra prismática tienen el mismo alargamiento y las secciones rectas de la barra planas y perpendiculares al eje quedan en estas condiciones después de la extensión.

Para encontrar la magnitud de las fuerzas interiores imaginemos la barra dividida en dos partes, por una sección recta  $mn$ , y consideremos el equilibrio de la parte inferior de la barra —figura 1 (b)—. En el extremo inferior de este trozo tenemos la fuerza  $P$ . En la parte superior actúan fuerzas que representan la acción de las partículas de la parte superior de la barra cargada

<sup>1</sup> Robert Hooke, *De Potentia restitutiva*, London, 1678.

<sup>2</sup> La distribución de las fatigas en las proximidades de los puntos de aplicación de las fuerzas responde a una ley más complicada y se discutirá en la *Segunda parte*.

sobre las partículas de la parte inferior. Estas fuerzas están distribuidas de modo continuo sobre la sección recta. Un ejemplo corriente de distribución continua de fuerzas sobre una superficie es el de una presión hidrostática o el de la presión de un vapor. En estas distribuciones continuas de fuerza la intensidad de la fuerza por unidad de área es de la mayor importancia. En nuestro caso, como las fibras tienen el mismo alargamiento, la distribución de fuerzas sobre la sección recta *mn* será uniforme.

La suma de estas fuerzas para cumplir las condiciones de equilibrio —fig. 1 (b)— debe ser igual a *P*. La fuerza por unidad de sección recta valdrá:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{2}$$

Esta fuerza por unidad de área se llama fatiga o esfuerzo. En adelante, las fuerzas las mediremos en kilogramos, las áreas en cm.<sup>2</sup> y las fatigas en kg./cm.<sup>2</sup> El alargamiento de la barra por unidad de longitud se determina por la ecuación

$$\epsilon = \frac{\delta}{l} \tag{3}$$

y se denomina deformación unitaria.

Usando las relaciones (2) y (3), la ley de Hooke puede representarse de la forma siguiente:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{4}$$

y el alargamiento unitario se calcula de este modo fácilmente en función de la fatiga y del módulo de elasticidad del material. El alargamiento unitario  $\epsilon$  es un número abstracto, puesto que mide la relación por cociente de dos longitudes, ecuación (3); se deduce, por tanto, de la ecuación (4) que el módulo de elasticidad se mide en las mismas unidades que la fatiga, es decir, en kg./cm.<sup>2</sup> En la tabla I se indican valores de *E* para distintos materiales <sup>3</sup>.

<sup>3</sup> En la Segunda parte se analizarán más detalladamente las propiedades mecánicas de los materiales.

Las ecuaciones (1) a (4) pueden usarse también en el caso de compresión de barras prismáticas. Entonces  $\delta$  representa la contracción longitudinal total,  $\epsilon$  la deformación unitaria de compresión y  $\sigma$  la fatiga de compresión. El módulo de elasticidad para compresión es en muchos materiales igual al de extensión.

En los cálculos, las fatigas y deformaciones de extensión las consideraremos positivas y las de compresión negativas.

TABLA I  
PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

Materiales	<i>E</i> (Kg./cm. <sup>2</sup> )	Punto de fluencia (Kg./cm. <sup>2</sup> )	Fatiga de rotura (Kg./cm. <sup>2</sup> )
Acero al carbono, de 0,15 a 0,25 por 100 de carbono . . . . .	2 × 10 <sup>6</sup>	2 × 10 <sup>3</sup> -2,8 × 10 <sup>3</sup>	3,8 × 10 <sup>3</sup> -4,5 × 10 <sup>3</sup>
Acero al níquel, de 3 a 3,5 por 100 de níquel . . . . .	2 × 10 <sup>6</sup>	2,8 × 10 <sup>3</sup> -3,5 × 10 <sup>3</sup>	5,5 × 10 <sup>3</sup> -7 × 10 <sup>3</sup>
Duraluminio . . . . .	7 × 10 <sup>5</sup>	2,4 × 10 <sup>3</sup> -3,1 × 10 <sup>3</sup>	3,8 × 10 <sup>3</sup> -4,5 × 10 <sup>3</sup>
Cobre . . . . .	1,1 × 10 <sup>6</sup>	—	2 × 10 <sup>3</sup> -2,8 × 10 <sup>3</sup>
Vidrio . . . . .	7 × 10 <sup>5</sup>	—	250
Madera . . . . .	1 × 10 <sup>6</sup>	—	560-1.400
Hormigón a compresión . . . . .	2,8 × 10 <sup>6</sup>	—	210

Problemas

1. Determinar el alargamiento total de una barra de acero de 60 cm. de longitud si la fatiga de extensión es igual a 1.000 kg./cm.<sup>2</sup>.

Solución:

$$\delta = \epsilon \times l = \frac{1.000}{2 \times 10^6} \times 60 = 0,3 \text{ mm.}$$

2. Determinar la fuerza total de extensión de una varilla cilíndrica de acero de 2 cm. de diámetro si el alargamiento unitario es igual a 0,7 × 10<sup>-3</sup>.

Solución: La fatiga de extensión en la barra, deducida de la ecuación (4), es

$$\sigma = \epsilon \cdot E = 0,7 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^6 = 1,4 \times 10^3 \text{ kg./cm.}^2$$

La fuerza extensora, ecuación (2), será:

$$P = \sigma \cdot A = 1,4 \times 10^3 \times \frac{\pi 2^2}{4} = 4.400 \text{ kg.}$$

3. Cuál es la relación de los módulos de elasticidad de los materiales de dos barras de las mismas dimensiones si bajo la acción de fuerzas de extensión iguales los alargamientos unitarios de las barras están en la relación

$$1 : \frac{20}{11}.$$

Determinar dichos alargamientos unitarios si una de las barras es de acero, la otra de cobre y la fatiga de extensión 700 kg./cm.<sup>2</sup>

*Solución:* Los módulos son inversamente proporcionales a los alargamientos unitarios.

$$\text{Para el acero. } \varepsilon = \frac{700}{2 \times 10^6} = 0,00035.$$

$$\text{Para el cobre, } \varepsilon = \frac{700}{1,1 \times 10^6} = 0,00064.$$

4. Una barra prismática de acero de 60 cm. de longitud alarga 0,6 mm. bajo la acción de una fuerza extensora. Hallar el valor de la fuerza si el volumen de la barra es 16 cm.<sup>3</sup>

5. Un trozo de alambre de 30 cm. de largo, sometido a una fuerza extensora de 500 kg., alarga 25 mm. Hallar el módulo de elasticidad del material si el área de la sección recta del alambre es 0,25 cm.<sup>2</sup>

3. **Diagrama de tracción.**—La proporcionalidad entre la fatiga y el alargamiento unitario solamente es cierta por debajo de una cierta fatiga llamada límite de proporcionalidad, el cual depende de las propiedades del material. Por encima de este límite, la relación entre el alargamiento unitario y la fatiga es más complicada. Para materiales como el acero, la proporcionalidad tiene lugar hasta un límite de fatiga bastante elevado, tal como  $1,8 \times 10^3$  ó  $2,1 \times 10^3$  kg./cm.<sup>2</sup>

En otros materiales, fundición, cobre recocido, el límite de proporcionalidad es muy bajo y no siguen la ley de Hooke, aun cuando la fatiga sea muy pequeña. Al investigar las propiedades mecánicas de los materiales por encima del límite de proporcionalidad, la relación entre fatiga y deformación se representa gráficamente por un diagrama. La figura 2 representa el diagrama típico de un acero. En él los alargamientos están tomados en el eje horizontal y las fatigas correspondientes lle-

vadas como ordenadas de la curva *OBCD*. Desde *O* a *A* la fatiga y la deformación son proporcionales; pasado *A*, la ley de Hooke no se cumple. La fatiga correspondiente a *A* es el límite de proporcionalidad. Cargada la barra por encima de este límite, el alargamiento crece muy rápidamente y el diagrama se transforma en una curva. En *B* se presenta un súbito alargamiento de la barra, sin apreciable aumento de la fatiga de extensión.

Este fenómeno, llamado fluencia del material, corresponde en el diagrama a un tramo horizontal de la curva. La fatiga correspondiente al punto *B* se denomina fatiga de fluencia. Para cargas mayores, el material recupera su resistencia, como se ve en el diagrama, y se necesitan aumentos en las fatigas para obtener aumentos del alargamiento. En el punto *C* la fatiga alcanza su valor máximo, y esta fatiga se denomina carga de rotura del material. Pasado el punto *C*, la barra

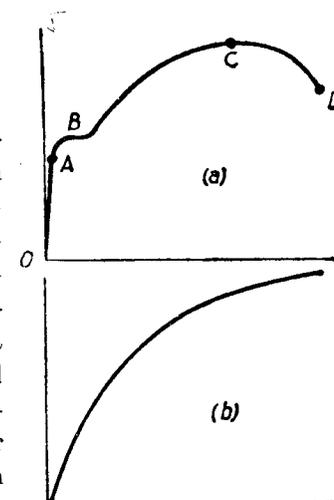


Diagrama de ensayo a tracción

FIG. 2

se alarga con disminución de la carga, y finalmente se presenta la rotura para una carga correspondiente al punto *D* del diagrama.

Se ve experimentalmente que el alargamiento de la barra viene acompañado de una contracción lateral muy acentuada en las proximidades de la rotura; pero en la práctica, para el cálculo del punto de fluencia y de la carga de rotura la fatiga se refiere a la sección recta inicial de área *A*. Todas estas cuestiones serán examinadas más detalladamente (véase *Segunda parte*).

La figura 2 (b) representa el diagrama de extensión para la fundición. Este material tiene un límite muy bajo de proporcionalidad<sup>1</sup> y no presenta definido el punto de fluencia.

<sup>1</sup> Para establecer este límite mediante ensayos es necesario emplear extensómetros muy sensibles en la medida de los alargamientos. (Véase Grüneisen, *Berichte d. deutsch. phys. Gesellschaft.*, 1906.)

Diagramas análogos a los de extensión pueden obtenerse para la compresión de diversos metales y determinar sus partes características.

4. **Fatiga de trabajo.**—Un diagrama de extensión da una información completa de las propiedades mecánicas de un material. Conociendo el límite de proporcionalidad, el punto de fluencia y la fatiga de rotura del material, es posible establecer en cada problema particular de ingeniería la magnitud de la fatiga que puede considerarse como una carga de seguridad; esta fatiga se llama corrientemente fatiga de trabajo.

Al escoger el valor de la fatiga de trabajo para el acero, debe tenerse en cuenta que para fatigas inferiores al límite de proporcionalidad el material puede considerarse perfectamente elástico, y por encima de este límite parte de la deformación la conserva corrientemente la barra al ser descargada. Dicho de otro modo, se presentan deformaciones permanentes.

Para que la estructura esté siempre en condiciones elásticas y no exista posibilidad de deformaciones permanentes, se acostumbra a escoger la fatiga de trabajo bastante por debajo del límite de proporcionalidad. En la determinación experimental de este límite se utilizan aparatos muy sensibles (extensómetros) y la determinación de la posición de dicho límite depende en muy alto grado del cuidado con que se hacen las medidas. Para eliminar la dificultad que esta indeterminación produce, se toma corrientemente el punto de fluencia o la fatiga de rotura del material como base para determinar la fatiga de trabajo. Representando con  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{Fl}$  y  $\sigma_r$ , respectivamente, la fatiga de trabajo, el punto de fluencia y la fatiga de rotura, la magnitud de la fatiga de trabajo se determina por una de las dos relaciones siguientes:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_{Fl}}{n}, \quad \text{ó} \quad \sigma_t = \frac{\sigma_r}{n_1}; \quad (5)$$

$n$  y  $n_1$  se llaman corrientemente factores de seguridad y determinan la magnitud de la fatiga de trabajo. En el caso de estructuras de acero se toma el punto de cesión o fluencia como base para calcular la fatiga de trabajo, con objeto de que no se presenten deformaciones permanentes en las estructuras. El coefi-

ciente de seguridad  $n = 2$  se usa corrientemente cuando las cargas que actúan sobre la estructura lo hacen de modo permanente. Cuando las cargas son variables o se aplican de modo súbito, caso muy frecuente en maquinaria, es necesario calcular con mayor coeficiente de seguridad. Para materiales quebradizos, como fundición, hormigón, diversas clases de piedras, y para materiales tales como la madera, se toma la fatiga de rotura como base para determinar la fatiga de trabajo. La magnitud del coeficiente de seguridad depende en su mayor grado del cuidado con que en el cálculo se han determinado las fuerzas exteriores que actúan sobre la estructura, las fatigas correspondientes a sus distintas partes y la homogeneidad de los materiales usados. Más adelante insistiremos sobre esta importantísima cuestión (véase *Segunda parte*).

#### Problemas

1. Determinar el diámetro  $d$  de los pernos de acero  $N$  de una prensa para un esfuerzo máximo  $P = 50.000$  kg. (fig. 3), si el coeficiente de trabajo para el acero es en este caso  $\sigma_t = 1.000$  kg./cm.<sup>2</sup>. Determinar el alargamiento total de los pernos para la carga máxima, si la longitud entre sus cabezas es 1,50 m.

*Solución:* El área necesaria en la sección recta, ecuación (2), es

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{2 \sigma_t} = \frac{50.000}{2 \times 1.000} = 25 \text{ cm.}^2;$$

de donde

$$d = \sqrt{\frac{100}{\pi}} = 5,64 \text{ cm.}$$

El alargamiento total, ecuaciones (3) y (4), es

$$\delta = \epsilon l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{1.000}{2 \times 10^8} \times 1.500 = 0,75 \text{ mm.}$$

2. Una estructura está formada por dos barras iguales de acero (fig. 4) de 4,50 m. de longitud, cuyos extremos están sometidos a la acción de una carga vertical  $P$ . Determinar la sección recta de la barra y el descenso vertical del punto  $B$  para  $P = 2.500$  kg.  $\sigma_t = 800$  kg./cm.<sup>2</sup> y el ángulo inicial de inclinación de las barras,  $30^\circ$ .

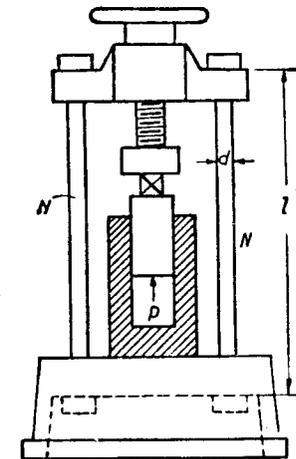


FIG. 3

*Solución:* De la figura 4 (b), que representa la condición de equilibrio del nudo B, se deduce que la tensión en las barras es

$$S = \frac{P}{2 \sin \theta}; \text{ para } \theta = 30^\circ; S = P = 2.500 \text{ kg.}$$

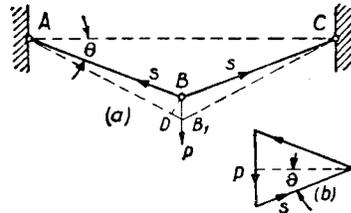


FIG. 4

La sección necesaria es

$$A = \frac{S}{\sigma_t} = \frac{2.500}{800} = 3 \frac{1}{8} \text{ cm.}^2$$

La flecha  $BB_1$  se halla mediante el triángulo  $DBB_1$ , en el que, dada su pequeñez, el arco  $BD$ , de radio igual a la longitud de las barras, se sustituye por la perpendicular bajada sobre  $AB_1$ , posición de la barra después de la deformación, desde el punto B.

El alargamiento total de la barra AB es

$$B_1D = \epsilon \cdot l = \frac{\sigma_t l}{E} = \frac{800}{2 \times 10^6} \times 4.500 = 1,8 \text{ mm.}$$

y la flecha

$$BB_1 = \frac{B_1D}{\sin \theta} = 3,6 \text{ mm.}$$

Se ve que la variación del ángulo  $\theta$  debida a la flecha  $BB_1$  es muy pequeña y que el cálculo realizado para hallar  $S$ , basado en la hipótesis de que  $\theta = 30^\circ$ , es suficientemente aproximado.

3. Determinar el alargamiento total de la barra de acero AB, cuya sección recta es  $6 \text{ cm.}^2$  y está sometida a la acción de las fuerzas  $Q = 5.000 \text{ kg.}$   $P = 2.500 \text{ kg.}$  (fig. 5).

*Solución:* La fuerza extensora para los trozos superior e inferior de la barra es igual a  $Q$ , y para el trozo central, igual a  $Q - P$ . El alargamiento total será

$$\delta = 2 \frac{Ql_1}{AE} + \frac{(Q - P)l_2}{AE} = 2 \frac{5.000 \times 250}{2 \times 10^6 \times 6} + \frac{2.500 \times 250}{2 \times 10^6 \times 6} = 0,26 \text{ mm.}$$

4. Determinar las dimensiones de las secciones rectas de la viga de madera BC y de la barra de acero AB de la estructura ABC cargada en B, si el coeficiente de trabajo para la madera se toma  $\sigma_t = 10 \text{ kg./cm.}^2$  y para el acero  $\sigma_t = 800 \text{ kg./cm.}^2$ . La carga  $P = 3.000 \text{ kg.}$  Las dimensiones de la estructura, las de la figura 6. Determinar las componen-

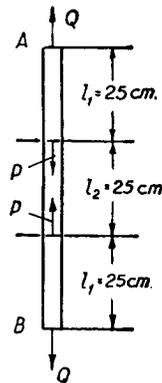


FIG. 5

tes vertical y horizontal del desplazamiento del punto B, debido a la deformación de las barras.

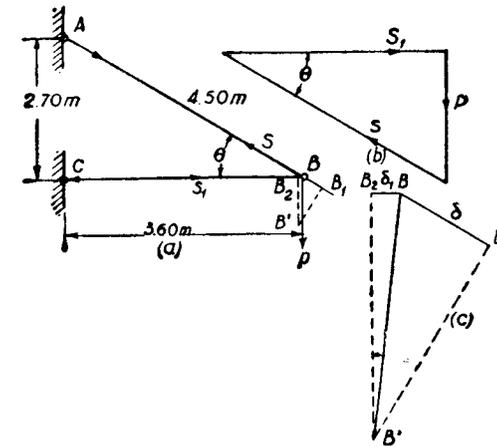


FIG. 6

*Solución:* De la figura 6 (b), que representa el equilibrio del nudo B es un triángulo semejante al ABC de la fig. 6 (a), se deduce

$$S = P \frac{4,5}{2,7} = 5.000 \text{ kg.}$$

$$S_1 = P \frac{3,6}{2,7} = 4.000 \text{ kg.}$$

Las secciones correspondientes a la barra de acero y a la viga de madera serán:

$$A = \frac{S}{\sigma_t} = \frac{5.000}{800} = 6,25 \text{ cm.}^2; A_1 = \frac{S_1}{\sigma_t} = \frac{4.000}{10} = 400 \text{ cm.}^2.$$

El alargamiento total de la barra de acero y el acortamiento de la viga de madera son:

$$\delta = \frac{Sl}{E_a A} = \frac{5.000}{2 \times 10^6} \times \frac{4.500}{6,25} = 1,8 \text{ mm.}$$

$$\delta_1 = \frac{S_1 l_1}{E_m A_1} = \frac{4.000}{10^6} \times \frac{3.600}{400} = 0,36 \text{ mm.}$$

Para determinar el corrimiento del nudo B, debido a la deformación, se trazarán dos arcos con centros en A y C —fig. 6 (a)— y radios iguales a las longitudes de las barras AB y CB después de la deformación. Su intersección define la posición nueva B' del nudo B. La construcción se realiza en figura aparte y a mayor escala —fig. 6 (c)—.  $BB_1$  es el alargamiento de la barra de acero, y  $BB_2$  el acortamiento

de la viga de madera. Las perpendiculares de trazos reemplazan a los arcos indicados anteriormente. Por consiguiente,  $BB'$  es el corrimiento del nudo  $B$ . Las componentes de este corrimiento se deducen fácilmente de la figura.

5. Determinar en el problema anterior la inclinación de la barra  $AB$ , de modo que su peso sea mínimo.

*Solución:* Representando por  $\theta$  el ángulo entre la barra y la viga y por  $l_1$  la longitud de la viga, se tiene: Longitud de la barra  $l = \frac{l_1}{\cos \theta}$ ,

tensión de la barra  $S = \frac{P}{\sin \theta}$  y sección necesaria en la barra  $A = \frac{P}{\sigma_t \sin \theta}$ .

El volumen de la barra será:

$$l \cdot A = \frac{l_1 P}{\sigma_t \sin \theta \cos \theta} = \frac{2l_1 P}{\sigma_t \sin 2\theta}$$

Por consiguiente, el volumen y el peso de la barra son mínimos cuando  $\sin 2\theta = 1$ ; es decir,  $\theta = 45^\circ$ .

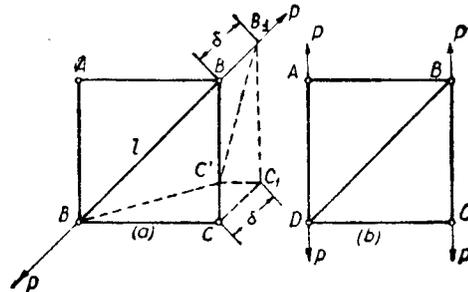


FIG. 7

6. La estructura triangulada  $ABCD$  —fig. 7 (a)— está formada por cinco barras de acero de  $6 \text{ cm.}^2$  de sección recta y sometida a la acción de las fuerzas  $P = 5.000 \text{ kg.}$  en la dirección de la diagonal. Determinar las variaciones de los ángulos en  $A$  y  $C$ , debidas a la deformación de la estructura. Determinar la variación de esos mismos ángulos si se aplican fuerzas como las de la figura 7 (b).

*Solución:* En el caso de la figura 7 (a), la diagonal es la única barra que trabaja. Suponemos fijo el nudo  $D$  e invariable la dirección de la diagonal, el corrimiento del nudo  $B$  en la dirección de la diagonal será igual al alargamiento de la diagonal  $\delta = \frac{Pl}{AE}$ . La determinación de la posición nueva  $C'$  del nudo  $C$  se indica en la figura por línea de trazos. En el triángulo rectángulo de dimensiones pequeñas  $CC_1C'$  se tiene  $CC' = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ . Por consiguiente, el ángulo de rotación de la barra  $DC$  debido a la deformación de la estructura será

$$\frac{CC'}{DC} = \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{2}l} = \frac{\delta}{l} = \frac{P}{AE} = \frac{5.000}{6 \times 2 \times 10^6} = \frac{1}{2.400} \text{ radian}$$

y el aumento del ángulo en  $C$  es

$$2 \times \frac{1}{2.400} = \frac{1}{1.200} \text{ radian.}$$

La resolución del problema representado en la figura 7 (b) se deja como ejercicio.

7. Determinar la posición de la carga  $P$  en la viga  $ABD$  de tal modo que la fuerza en la barra  $BC$  sea máxima. Determinar el ángulo  $\theta$  de modo que el volumen de la barra  $BC$  sea mínimo (fig. 8).

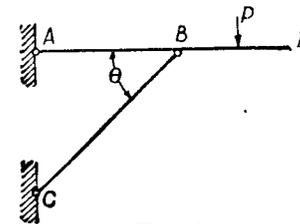


FIG. 8

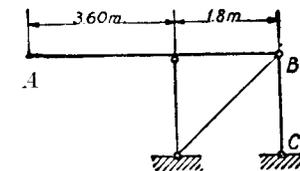


FIG. 9

*Respuesta:* La tensión en la barra  $BC$  es máxima cuando la carga  $P$  está en la posición más alejada a la derecha, es decir, en el punto  $D$ . El volumen de la barra es mínimo cuando  $\theta = 45^\circ$ .

8. Determinar la sección necesaria para la barra de acero  $BC$  (figura 9) si el coeficiente de trabajo es  $\sigma_t = 1.000 \text{ kg./cm.}^2$  y la carga vertical uniformemente distribuida actúa sobre la viga  $AB$  a razón de  $1.500 \text{ kg./m.}$

*Respuesta:*  $A = 4,05 \text{ cm.}^2$ .

9. Determinar las secciones necesarias para las barras  $AB$  y  $BC$  de las estructuras de las figuras 10 (a) y 10 (b) si  $\sigma_t = 1.000 \text{ kg./cm.}^2$ .

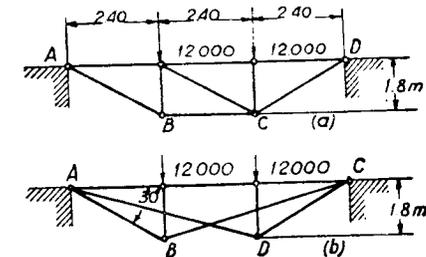


FIG. 10

*Respuesta:* En el caso de la estructura 10 (a), la sección de  $AB$  deberá ser  $20 \text{ cm.}^2$ , y la de la barra  $BC$ ,  $16 \text{ cm.}^2$ . En el caso de la estructura 10 (b), la sección de la barra  $AB$  será  $16 \text{ cm.}^2$ , y la de la barra  $BC$ ,  $14,4 \text{ cm.}^2$ .

10. Resolver el problema 3 suponiendo que el material es duraluminio y que  $P = Q = 800 \text{ kg./cm.}^2$ .

11. Hallar las secciones de las barras  $CD$  de las figuras 10 (a) y 10 (b) y su alargamiento total si el material es acero corriente y  $\sigma_t = 1.200 \text{ kg./cm.}^2$ .

12. Resolver el problema 9 suponiendo que la carga se aplica solamente en el nudo del cordón superior situado a 2,40 m. del apoyo  $A$ .

5. **Fatigas y deformaciones producidas en una barra por su propio peso.**—Al estudiar el caso de la extensión de una barra (figura 1), hemos considerado solamente el efecto debido a la carga  $P$ . Si la longitud de la barra es grande, su propio peso puede producir una fatiga adicional considerable, que debe tenerse en cuenta. En este caso la fatiga máxima se produce en la sección recta superior. Representando  $\gamma$  el peso por unidad de volumen de la barra, el peso total será  $A\gamma l$  y la máxima fatiga vendrá dada por la expresión

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P + A\gamma l}{A} = \frac{P}{A} + \gamma l. \quad (6)$$

El último término del segundo miembro de la ecuación (6) representa la fatiga producida por el peso de la barra. El peso de la porción de barra situado por debajo de una sección recta a la distancia  $x$  del extremo inferior es  $A\gamma x$  y la fatiga vendrá dada por la ecuación

$$\sigma = \frac{P + A\gamma x}{A}. \quad (7)$$

Sustituyendo la fatiga de trabajo  $\sigma_t$  por  $\sigma_{\text{máx}}$  en la ecuación (6) la fórmula para calcular la sección de seguridad será

$$A = \frac{P}{\sigma_t - \gamma l}. \quad (8)$$

En ella se ve que el incremento de longitud de la barra hace aumentar la sección recta de seguridad  $A$ . Cuando  $\gamma l = \sigma_t$ , la fatiga debida al peso de la barra es igual al coeficiente de trabajo y el segundo miembro de la ecuación (8) se hace infinito. En circunstancias tales es imposible el uso de la barra prismática y se recurre al empleo de barras de sección variable.

Para calcular el alargamiento total de una barra prismática sometida a la acción de la fuerza de extensión  $P$  en el extremo y su propio peso, consideramos primeramente el alargamiento de un elemento de longitud diferencial  $dx$  separado de la barra por dos secciones rectas infinitamente próximas (véase fig. 1). Puede suponerse que en tan corta longitud  $dx$  la fatiga es cons-

tante y viene dada por la expresión (7). Entonces el alargamiento  $d\delta$  del elemento será

$$d\delta = \frac{\sigma dx}{E} = \frac{P + A\gamma x}{AE} dx.$$

El alargamiento total de la barra se obtendrá sumando los alargamientos de todos los elementos. O sea

$$\delta = \int_0^l \frac{P + A\gamma x}{AE} dx = \frac{l}{AE} \left( P + \frac{1}{2} A\gamma l \right). \quad (9)$$

Comparando este resultado con la expresión (1), se ve que el alargamiento total producido en la barra por su propio peso es igual al que produciría una carga de valor mitad aplicada en su extremo.

### Problemas

1. Determinar el área de la sección recta de una barra vertical de acero de forma prismática cargada en su extremo inferior con una carga  $P = 35.000$  kg., si la longitud de la barra es 200 m., el coeficiente de trabajo  $\sigma_t = 700$  kg./cm.<sup>2</sup> y el peso de un m.<sup>3</sup> de acero es 7.800 kg. Determinar el alargamiento total de la barra.

*Solución:* La sección, ecuación (8), es

$$A = \frac{35.000}{700 - 7,8 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^3} = 64 \text{ cm.}^2$$

El alargamiento total, expresión (9), es

$$\delta = 200 \times 10^3 \frac{1}{64 \times 2 \times 10^6} \left( 35.000 + \frac{1}{2} 64 \times 7,8 \times 10^3 \times 200 \times 10^3 \right) = 63 \text{ mm.}$$

2. Determinar el alargamiento de una barra cónica bajo la acción de su propio peso (fig. 11). La longitud de la barra es  $l$ , el diámetro de la base es  $d$  y el peso por unidad de volumen del material es  $\gamma$ .

*Solución:* El peso de la barra será:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{l\gamma}{3}.$$

Para una sección recta a distancia  $x$  del extremo inferior de la barra la fuerza de extensión, igual al peso de la parte inferior de la barra, es

$$\frac{Qx^3}{l^3} = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{\gamma x^3}{3l^3}.$$

Teniendo en cuenta que esta fuerza se reparte uniformemente en

la sección recta <sup>1</sup> y considerando el elemento de longitud  $dx$  como una barra prismática, el alargamiento de este elemento será

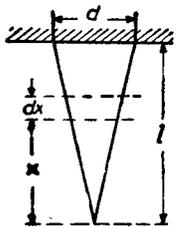


FIG. 11

$$d\delta = \frac{\gamma x}{3E} \times dx$$

y el alargamiento total de la barra es

$$\delta = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma l^2}{6E}$$

Este alargamiento es  $\frac{1}{3}$  del que tendría una barra prismática de la misma longitud (véase ecuación 9).

3. La varilla vertical de una bomba de mina es accionada por un cigüeñal (fig. 12). Suponiendo que el material es acero y el coeficiente de trabajo  $\sigma_t = 500 \text{ kg./cm.}^2$ , determinar la sección recta de la varilla si la resistencia del pistón durante el movimiento hacia abajo es 100 kg. y durante el movimiento hacia arriba 1.000 kg. La longitud de la varilla es 100 m. Determinar la longitud del radio del cigüeñal si la carrera de la bomba es 20 cm.

*Solución:* El área de la sección recta de la varilla se encontrará por la expresión (8) para  $P = 1.000 \text{ kg.}$

O sea

$$A = \frac{1.000}{500 - 7,8 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^3} = 2,37 \text{ cm.}^2$$

La diferencia entre el alargamiento total de la varilla cuando se mueve alternativamente, debido a la resistencia del pistón, será:

$$\Delta\delta = \frac{(1.000 + 100) \times 100 \times 10^3}{2,37 \times 2 \times 10^6} = 23,2 \text{ mm.}$$

El radio de la manivela será:

$$r = \frac{20 + 2,32}{2} = 11,16 \text{ cm.}$$

4. Dos alambres, uno de acero y otro de aluminio, están colgados verticalmente. Determinar la longitud para la que la fatiga debida al peso propio iguala a la carga de rotura si para el acero  $\sigma_r = 21.000 \text{ kg./cm.}^2$  y  $\gamma = 7.800 \text{ kg./m.}^3$  y para el aluminio  $\sigma_r = 3.500 \text{ kg./cm.}^2$  y  $\gamma = 2.700 \text{ kg./cm.}^3$

*Respuesta:* Para el acero,  $l = 26.900 \text{ m.}$ ; para el aluminio,  $l = 13.000 \text{ m.}$

5. En qué proporción crece la fatiga máxima producida por su propio peso en una barra prismática si todas las dimensiones de la barra aumentan en la proporción  $n : 1$ .

<sup>1</sup> Esta hipótesis es admisible cuando el ángulo del cono es pequeño.

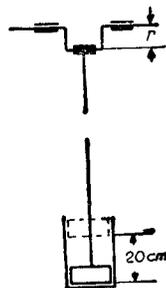


FIG. 12

*Respuesta:* La fatiga crecerá en la relación  $n : 1$ .

6. Una pila de puente formada por dos trozos prismáticos de igual longitud (fig. 13) está sometida en su extremo superior a una compresión  $P = 300.000 \text{ kg.}$  Determinar el volumen de la fábrica si la altura del pilar son 36 m., el peso por  $\text{m.}^3$  2.000 kg. y la fatiga de compresión

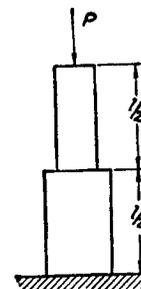


FIG. 13

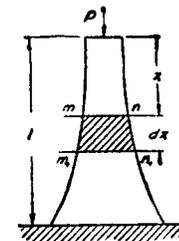


FIG. 14

máxima admisible  $10 \text{ kg./cm.}^2$ . Comparar el volumen obtenido con el de un pilar prismático proyectado en análogas condiciones.

7. Resolver el problema anterior suponiendo a la pila formada por tres trozos prismáticos de igual longitud.

8. Determinar la forma del pilar de la figura 14, de modo que la fatiga en cada sección sea constante e igual a  $\sigma_t$ . La forma que satisface a esta condición se denomina sólido de igual resistencia.

*Solución:* Considerando el elemento diferencial rayado en la figura, es evidente que la fuerza compresora de la sección  $m_1 n_1$  es superior a la que comprime la sección  $mn$  en el peso del elemento. Puesto que la fatiga en las dos secciones debe ser la misma e igual a  $\sigma_t$ , la diferencia  $dA$  de las áreas de las dos secciones, debe compensar la diferencia de fuerza compresora.

Por consiguiente,

$$dA\sigma_t = \gamma A dx, \tag{a}$$

donde el segundo miembro de la ecuación representa el peso del elemento. Dividiendo esta ecuación por  $A\sigma_t$  e integrando, se tiene

$$\int \frac{dA}{A} = \int \frac{\gamma dx}{\sigma_t}$$

de donde

$$\log A = \frac{\gamma x}{\sigma_t} + C_1$$

y

$$A = C e^{\frac{\gamma x}{\sigma_t}}, \tag{b}$$

Siendo  $e$  la base de los logaritmos naturales y  $O = e^{0.1}$ . Para  $x = 0$  esta ecuación da para el área de la cabeza del pilar

$$(A)_{x=0} = C.$$

La sección en dicha cabeza es  $\frac{P}{\sigma_t}$  y, por consiguiente, la ecuación (b) será

$$A = \frac{P}{\sigma_t} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_t}}. \quad (c)$$

El área en la base del pilar se obtiene dando a  $x$  el valor  $l$  en la ecuación (c),

$$A_{\text{máx}} = \frac{P}{\sigma_t} e^{\frac{\gamma l}{\sigma_t}}. \quad (d)$$

9. Encontrar el volumen de la fábrica de un pilar de igual resistencia, proyectado en las condiciones del problema 6.

*Solución:* Utilizando la ecuación (d), la diferencia de las áreas de las secciones de base y cabeza del pilar será

$$\frac{P}{\sigma_t} e^{\frac{\gamma l}{\sigma_t}} - \frac{P}{\sigma_t} = \frac{P}{\sigma_t} (e^{\frac{\gamma l}{\sigma_t}} - 1).$$

Esta diferencia, multiplicada por la fatiga de trabajo  $\sigma_t$ , da evidentemente el peso del pilar; su volumen será:

$$V = \frac{P}{\gamma} (e^{\frac{\gamma l}{\sigma_t}} - 1) = 158 \text{ m.}^3$$

6. Problema estáticamente indeterminados en tracción y compresión.—Hay casos en los que las fuerzas axiales que actúan en las barras no pueden determinarse por las condiciones de la estática, y entonces la deformación de la estructura permite encontrarlas. Estas estructuras se llaman sistemas estáticamente indeterminados.

Un ejemplo sencillo de tales sistemas es el de la figura 15. La carga  $P$  produce extensión en las barras  $OB$ ,  $OC$  y  $OD$ , las cuales están en el mismo plano.

Las condiciones de equilibrio del punto  $P$  dan dos ecuaciones, que no son suficientes para determinar las tres tensiones desconocidas de las barras y para tener una tercera ecuación es necesario considerar la deformación del sistema. Supongamos, para simplificar, que el sistema es simétrico respecto al eje vertical  $OC$ , que la barra vertical es de acero, siendo  $A_a$  y  $E_a$  el

área de su sección recta y el módulo de elasticidad del material, y que las barras inclinadas son de cobre, y que  $A_c$  y  $E_c$  son sus áreas de secciones rectas y sus módulos. La longitud de la barra vertical es  $l$  y la de las barras inclinadas es  $\frac{l}{\cos \alpha}$ .

Representando por  $X$  la tensión de la barra vertical y por  $Y$  las fuerzas en las barras inclinadas, la única ecuación de equilibrio para el punto  $O$ , en este caso de simetría será:

$$X + 2Y \cos \alpha = P. \quad (a)$$

Para obtener la segunda ecuación que permita conocer las cantidades  $X$  e  $Y$ , consideraremos la configuración del sistema deformado indicada en la figura por líneas de puntos. Sea  $\delta$  el alargamiento total de la barra vertical bajo la acción de la carga  $P$ ;

los alargamientos  $\delta_1$  de las barras inclinadas se hallarán en el triángulo  $OF O_1$ . Teniendo en cuenta que estos alargamientos son muy pequeños, el arco de círculo  $OF$  de centro  $D$  puede reemplazarse por una recta perpendicular y el ángulo en  $O_1$  puede tomarse igual al ángulo inicial  $\alpha$ ; por tanto,

$$\delta_1 = \delta \cos \alpha.$$

Los alargamientos unitarios y las fatigas para las barras vertical e inclinadas serán:

$$\epsilon_a = \frac{\delta}{l}; \quad \sigma_a = \frac{E_a \delta}{l} \quad \text{y} \quad \epsilon_c = \frac{\delta \cos^2 \alpha}{l}; \quad \sigma_c = \frac{E_c \delta \cos^2 \alpha}{l}$$

respectivamente. Las fuerzas en las barras se obtendrán multiplicando las fatigas por las secciones rectas y serán

$$X = \sigma_a A_a = \frac{A_a E_a \delta}{l}, \quad Y = \sigma_c A_c = \frac{A_c E_c \delta \cos^2 \alpha}{l} \quad (b)$$

de donde

$$Y = X \cos^2 \alpha \frac{A_c E_c}{A_a E_a}.$$

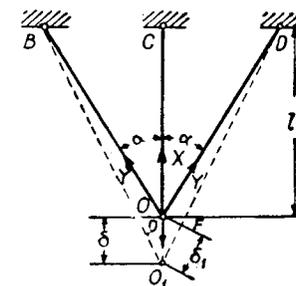


FIG. 15

Sustituyendo en la ecuación (a), obtendremos

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha \frac{A_c E_c}{A_d E_a}} \quad (10)$$

Se ve que la fuerza  $X$  no depende únicamente del ángulo de inclinación  $\alpha$ , sino también de las áreas de las secciones rectas y de las propiedades mecánicas de los materiales de las barras. En el caso particular en que las tres barras tengan la misma sección y el mismo módulo la expresión (10) se transforma en

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Cuando  $\alpha$  se aproxima a 0,  $\cos \alpha$  se aproxima a la unidad y la fuerza en la barra vertical se aproxima a  $\frac{1}{3} P$ . Cuando  $\alpha$  se aproxima a  $90^\circ$ , las barras inclinadas son muy largas y la

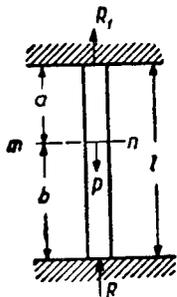


FIG. 16

carga actúa de modo completo sobre la barra central. Otro ejemplo de sistemas estáticamente indeterminados es el de una barra prismática con los extremos empotrados cargada axialmente en una sección intermedia  $mn$  (fig. 16). La carga  $P$  estará en equilibrio con las reacciones  $R$  y  $R_1$  en los extremos y se tendrá

$$P = R + R_1 \quad (c)$$

Para obtener la segunda ecuación que permita determinar las fuerzas  $R$  y  $R_1$ , debe considerarse la deformación de la barra. La carga  $P$  con la fuerza  $R$  produce acortamiento en el trozo inferior de la barra, y con la fuerza  $R_1$ , alargamiento en el superior. El acortamiento total de un trozo debe ser igual al alargamiento total del otro.

Usando la ecuación (1), se obtiene

$$\frac{R_1 a}{AE} = \frac{R b}{AE}$$

de donde

$$\frac{R}{R_1} = \frac{a}{b} \quad (d)$$

lo que indica que las fuerzas  $R$  y  $R_1$  son inversamente proporcionales a las distancias de sus puntos de aplicación a la sección  $mn$ . De este modo, las ecuaciones (c) y (d) dan las magnitudes de aquellas fuerzas y las fatigas de la barra pueden calcularse fácilmente.

### Problemas

1. Un cilindro de acero y un tubo de cobre están comprimidos entre los platos de una prensa (fig. 17). Determinar las fatigas en el acero y en el cobre y el acortamiento unitario si  $P = 50.000$  kg.,  $d = 10$  cm. y  $D = 20$  cm.

*Solución:* Las condiciones estáticas son insuficientes y debe considerarse la deformación del cilindro y del tubo para encontrar la parte de carga que obra sobre cada material.

Los acortamientos unitarios en el acero y en el cobre serán iguales; por tanto, la fatiga de cada material estará en la misma relación que su módulo (ecuación 4, pág. 4), es decir, la fatiga de compresión en el acero será  $\frac{20}{11}$  de la fatiga de compresión en el cobre. De este modo, el valor  $\sigma_c$  de la fatiga en el cobre se encontrará por la ecuación de la estática.

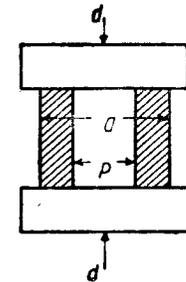


FIG. 17

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \frac{20}{11} \sigma_c + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \sigma_c$$

Sustituyendo valores numéricos, se obtiene  $\sigma_c = 132$  kg./cm.<sup>2</sup>:

$$\sigma_a = \frac{20}{11} \sigma_c = 240 \text{ kg./cm.}^2$$

El acortamiento unitario será:

$$\epsilon = \frac{\sigma_c}{E_c} = 120 \times 10^{-6}$$

2. Una columna de hormigón armado está comprimida por una fuerza  $P = 30.000$  kg. ¿Qué parte de esta carga actúa sobre el hormigón y qué parte sobre el acero si la sección recta de acero es solamente  $\frac{1}{10}$  de la sección recta de hormigón?

La carga transmitida por el hormigón será igual a 15.000 kg.

3. Un cuerpo rígido  $AB$  de peso  $Q$  cuelga de tres alambres verticales simétricamente colocados respecto al centro de gravedad  $C$  del cuerpo (fig. 18). Determinar los esfuerzos de extensión en los alambres si el del medio es de acero y los otros dos de cobre. Las secciones rectas de los tres alambres son iguales.

*Marcha a seguir:* Usar el método del problema 1.  
 4. Determinar las fuerzas en las cuatro patas de una mesa cuadrada (fig. 19), producidas por una carga  $P$  que actúa en una diagonal. El apoyo de la mesa en el suelo se supone absolutamente rígido y las patas se unen a él de tal modo que pueden sufrir extensiones y compresiones.

*Solución:* Suponiendo que la nueva posición del tablero de la mesa es la indicada con la línea de puntos  $mn$ , la compresión en las patas 2 y 4 será igual a la media de las de las patas 1 y 3. Por tanto,

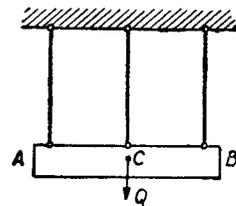


FIG. 18

$$2Y = X + Z$$

y también

$$2Y + X + Z = P,$$

de donde

$$2Y = X + Z = \frac{1}{2} P. \quad (a)$$

La ecuación complementaria para determinar  $X$  y  $Z$  se obtiene tomando el momento de todas las fuerzas con relación al eje horizontal  $o-o$  paralelo al  $y$  y en el plano de la fuerza  $P$ . Se obtiene

$$X \left( \frac{1}{2} a \sqrt{2} + e \right) + \frac{1}{2} P \times e = Z \left( \frac{1}{2} a \sqrt{2} - e \right). \quad (b)$$

De (a) y (b) se deduce

$$X = P \left( \frac{1}{4} - \frac{e}{a \sqrt{2}} \right); \quad Y = \frac{P}{4};$$

$$Z = P \left( \frac{1}{4} + \frac{e}{a \sqrt{2}} \right).$$

Cuando  $e > a \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $X$  es negativa. Esto indica que hay extensión en la pata 1.

5. Determinar las fuerzas en las patas de la mesa anterior cuando la carga se aplica en el punto de coordenadas.

$$x = \frac{a}{4}, \quad y = \frac{a}{5}.$$

*Solución:* Para resolver este problema, la carga  $P$  situada fuera de la diagonal de la mesa puede reemplazarse por dos cargas estáticamente equivalentes aplicadas en puntos de las dos diagonales. Los esfuerzos producidos en las patas por cada una de estas dos fuerzas se encontrarán del modo explicado anteriormente. Sumando los efectos de las dos cargas componentes se encontrarán los esfuerzos en las patas para cualquier posición de la carga  $P$ .

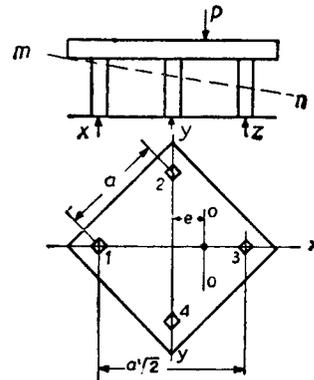


FIG. 19

6. Un cuadro rectangular con diagonales está sometido a la acción de las fuerzas de compresión  $P$  (fig. 20). Determinar los esfuerzos en las barras si todas son del mismo material, el área de la sección recta de las verticales es  $A$  y la de las restantes barras  $A_1$ .

*Solución:* Sea  $X$  la fuerza de compresión en cada barra vertical;  $Y$ , la fuerza de compresión en cada diagonal, y  $Z$ , la fuerza de extensión en cada barra horizontal. La condición de equilibrio de uno de los nudos da

$$Y = \frac{1}{\sin \alpha} \times (P - X);$$

$$Z = Y \cos \alpha = (P - X) \cot \alpha. \quad (a)$$

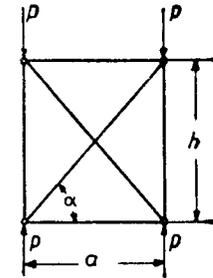


FIG. 20

La tercera ecuación se obtendrá por la condición de que el cuadro después de la deformación seguirá siendo rectangular, en virtud de la simetría; por tanto,

$$(a^2 + h^2) \left( 1 - \frac{Y}{A_1 E} \right)^2 = h^2 \left( 1 - \frac{X}{A E} \right)^2 + a^2 \left( 1 + \frac{Z}{A_1 E} \right)^2;$$

despreciando las cantidades pequeñas de orden superior, se obtiene

$$\frac{(a^2 + h^2) Y}{A_1 E} = \frac{h^2 X}{A E} - \frac{a^2 Z}{A_1 E}. \quad (b)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (a) y (b), la fuerza en la diagonal se obtiene por la siguiente expresión:

$$Y = \frac{P}{\frac{a^2 + h^2}{h^2} \times \frac{A}{A_1} + \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{A}{A_1} \times \cos \alpha + \sin \alpha}$$

Las fuerzas en las otras barras se calcularán fácilmente por las ecuaciones (a).

7. Resolver el problema anterior suponiendo  $a = h$ ,  $A = 5A_1$  y  $P = 25.000$  kg.

8. ¿Qué fatiga se producirá en un perno de acero y en un tubo de cobre (fig. 21) al dar 1/4 de vuelta a la tuerca, si la longitud del perno es 75 cm., el paso del tornillo  $h = 3$  mm., el área de la sección recta del perno

$A_a = 6$  cm.<sup>2</sup> y el área de la sección recta del tubo  $A_c = 12$  cm.<sup>2</sup>?

*Solución:* Sea  $X$  la fuerza total de extensión en el perno y de compresión en el tubo. El valor de  $X$  se encuentra estableciendo que el alargamiento total del perno más el acortamiento total del tubo es igual al desplazamiento de la tuerca a lo largo del perno. Admitiendo, en nuestro caso, que la longitud del tubo es igual a la longitud del perno, se obtiene:

$$\frac{Xl}{A_a E_a} + \frac{Xl}{A_c E_c} = \frac{1}{4} h,$$

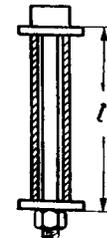


FIG. 21

de donde

$$X = \frac{hA_a F_a}{4l \left(1 + \frac{A_a E_a}{A_c E_c}\right)} = \frac{0.3 \times 6 \times 2 \times 10^6}{4 \times 75 \left(1 + \frac{6 \times 2 \times 10^6}{12 \times 1.1 \times 10^6}\right)} = 6.280 \text{ kg.}$$

La fatiga de extensión en el perno es  $\sigma_a = \frac{X}{A_a} = 1.050 \text{ kg./cm.}^2$

La fatiga de compresión en el tubo es  $\sigma_c = \frac{X}{A_c} = 525 \text{ kg./cm.}^2$

9. ¿Qué cambio en las fatigas calculadas en el problema anterior producen unas fuerzas extensoras  $P = 2.500 \text{ kg.}$  aplicadas en los extremos del perno?

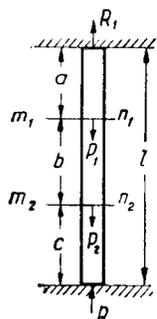


FIG. 22

*Solución:* Sea  $X$  el aumento de la fuerza total de extensión en el perno e  $Y$  la disminución de la fuerza total de compresión en el tubo. La condición de equilibrio da:

$$X + Y = P. \quad (a)$$

Puede escribirse una segunda ecuación considerando que los alargamientos unitarios del perno y del tubo por la aplicación de las fuerzas  $P$  deben ser iguales; es decir,

$$\frac{X}{A_a E_a} = \frac{Y}{A_c E_c}. \quad (b)$$

Esta ecuación, unida a la (a), permite calcular las fuerzas  $X$  e  $Y$ , de cuyos valores se deducen fácilmente las fatigas correspondientes.

10. Una barra prismática con los extremos empotrados está cargada axialmente en dos secciones intermedias (fig. 22) con fuerzas  $P_1$  y  $P_2$ . Determinar las reacciones  $R$  y  $R_1$ .

*Solución:* Usando la ecuación (d), página 20, mediante la que se calculan por separado las reacciones que produce cada carga, y sumando los resultados. Determinar las reacciones totales cuando

$$a = 0,3l, \quad b = 0,3l \quad \text{y} \quad P_1 = 2P_2 = 500 \text{ kg.}$$

11. Determinar las fuerzas en las barras del sistema representado en la figura 23, en el que  $OA$  es un eje de simetría.

*Respuesta:* La fuerza de extensión en la barra  $OB$  es igual a la de compresión en la barra  $OC$  y vale  $\frac{P}{2 \sin \alpha}$ . La tensión de la barra horizontal  $OA$  es igual a 0.

12. Resolver el problema 10 suponiendo que la porción inferior de la barra cuya longitud es  $c$  tiene una sección doble que las de las otras dos partes de longitudes  $a$  y  $b$ .

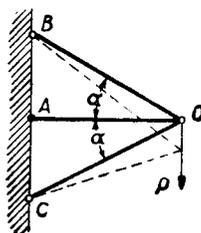


FIG. 23

7. **Fatigas iniciales y térmicas.**—En un sistema estáticamente indeterminado es posible existan tensiones iniciales producidas en el montaje y debidas a errores en las longitudes de las barras o a variaciones intencionadas de los valores correctos de aquellas longitudes. Estas tensiones existen aun cuando no actúen cargas exteriores y dependen de las proporciones geométricas del sistema, de las propiedades mecánicas de los materiales y de la magnitud de los errores. Supongamos, por ejemplo, que en el sistema representado en la figura 15 la barra vertical tenga por error una longitud  $l + a$  en lugar de la  $l$  que le corresponde. Al unirla las barras  $BO$  y  $DO$ , después de haberla acortado con una compresión inicial, producirá fatiga de extensión en las barras inclinadas. Sea  $X$  la fuerza de compresión que actúa en la barra vertical después de haberla unido las otras barras.

La fuerza de extensión en las barras inclinadas será:

$$\frac{X}{2 \cos \alpha}$$

y el desplazamiento del nudo  $O$  debido al alargamiento de dichas barras será (véase ecuación b, pág. 19)

$$\delta = \frac{Xl}{2A_c E_c \cos^3 \alpha}. \quad (a)$$

El acortamiento de la barra vertical será

$$\delta_1 = \frac{Xl}{A_a E_a}. \quad (b)$$

Ahora bien; el desplazamiento del nudo  $O$ , junto con el acortamiento de la barra vertical, debe ser igual al error  $a$  en la longitud de dicha barra.

Se obtiene de este modo la siguiente ecuación, para determinar  $X$ :

$$\frac{Xl}{2A_c E_c \cos^3 \alpha} + \frac{Xl}{A_a E_a} = a.$$

O sea

$$X = \frac{aA_a E_a}{l \left(1 + \frac{A_a E_a}{2A_c E_c \cos^3 \alpha}\right)}. \quad (11)$$

Conocido  $X$ , se calcularán fácilmente las fatigas iniciales en las barras.

La dilatación de las barras debida a cambios de la temperatura puede tener el mismo efecto que los errores en las longitudes. Si la temperatura de la barra crece de  $t_0$  a  $t$  y la dilatación térmica se impide por las reacciones en los extremos, se producirán en la barra fatigas de compresión cuyas magnitudes pueden calcularse por la condición de que la longitud permanezca invariable. Sea  $\alpha$  el coeficiente de dilatación y  $\sigma$  la fatiga de compresión producida por las reacciones. La ecuación que determina  $\sigma$  será

$$\alpha(t - t_0) = \frac{\sigma}{E},$$

de donde

$$\sigma = E\alpha(t - t_0). \quad (12)$$

Como segundo ejemplo, consideremos el sistema representado en la figura 15 y supongamos que la barra vertical se calienta desde la temperatura ambiente  $t_0$  hasta una nueva temperatura  $t$ . La dilatación térmica correspondiente estará parcialmente impedida por las otras dos barras del sistema y una cierta fatiga de compresión aparecerá en la barra vertical y fatigas de extensión en las barras inclinadas.

La magnitud de la fuerza de compresión en la barra vertical vendrá dada por la ecuación (11), en la que en lugar de la magnitud  $a$  del error en longitud se sustituirá la dilatación térmica  $\alpha l (t - t_0)$  de la barra vertical.

#### Problemas

1. Los raíles de un tranvía están a tope a  $10^\circ \text{C}$ . ¿Qué fatiga se producirá en ellos cuando el sol los calienta hasta  $33^\circ \text{C}$ , si el coeficiente de dilatación del acero es  $\alpha = 125 \times 10^{-7}$ ?

*Solución:*

$$\sigma = 2 \times 10^6 \times 125 \times 10^{-7} \times 23 = 700 \text{ kg./cm.}^2$$

2. ¿Qué cambio de fatigas se producirá en el caso representado en la figura 21, al aumentar la temperatura, pasando de  $t_0$  a  $t$  grados, si el coeficiente de dilatación térmica del acero es  $\alpha_a$  y el del cobre  $\alpha_c$ ?

*Solución:* Debido a que  $\alpha_c > \alpha_a$ , el aumento de temperatura produce compresión en el cobre y tracción en el acero. El alargamiento

unitario del cobre y del acero serán iguales, y representando por  $X$  el aumento de la fuerza de extensión en el perno debida al cambio de temperatura, se tendrá:

$$\alpha_a(t - t_0) + \frac{X}{A_a E_a} = \alpha_c(t - t_0) - \frac{X}{A_c E_c},$$

de donde

$$X = \frac{(\alpha_c - \alpha_a)(t - t_0) A_a E_a}{1 + \frac{A_a E_a}{A_c E_c}}.$$

La variación de las fatigas en el perno y en el tubo puede calcularse ahora del modo acostumbrado.

3. Una pletina de cobre está soldada entre dos pletinas de acero (figura 24). ¿Qué fatiga se producirá en el acero y en el cobre por una elevación de la temperatura de las pletinas de  $t_0$  a  $t$  grados?

*Solución:* Deberá usarse el mismo método que en el problema anterior.

4. ¿Qué fatigas se producirán en las barras del sistema representado en la figura 15 si la temperatura de todas las barras se eleva de  $t_0$  a  $t$ ?

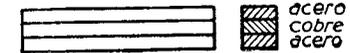


FIG. 24

*Solución:* Con  $X$  se representa la fuerza de extensión producida en la barra de acero al aumentar la temperatura. Por la condición de equilibrio del nudo  $O$  se ve que las fuerzas que comprimen a las barras de cobre valen  $\frac{X}{2 \cos \alpha}$ ; por todo lo expuesto, el alargamiento total de la barra de acero será:

$$\delta = \alpha_a(t - t_0)l + \frac{Xl}{A_a E_a},$$

y el alargamiento de las barras de cobre,

$$\delta_1 = \alpha_c(t - t_0) \frac{l}{\cos \alpha} - \frac{Xl}{2 \cos^3 \alpha A_c E_c}.$$

Según sabemos (vease pág. 19),

$$\delta_1 = \delta \cos \alpha;$$

por consiguiente,

$$\alpha_a(t - t_0)l + \frac{Xl}{A_a E_a} = \alpha_c(t - t_0) \frac{l}{\cos^2 \alpha} - \frac{Xl}{2 \cos^3 \alpha A_c E_c},$$

de donde

$$X = \frac{(t - t_0) \left( \frac{\alpha_c}{\cos^2 \alpha} - \alpha_a \right) A_a E_a}{1 + \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \frac{A_a E_a}{A_c E_c}}.$$

Las fatigas en el acero y el cobre se obtendrán ahora por las ecuaciones siguientes:

$$\sigma_a = \frac{X}{A_a}; \quad \sigma_c = \frac{X}{2 \cos \alpha A_c}.$$

5. Suponiendo que en el caso de la figura 17 una carga constante  $P = 50.000$  kg. se aplique a la temperatura inicial  $t_0$ , determinar para qué aumento de temperatura la carga será transmitida únicamente por el cobre si  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  y  $\alpha_c = 170 \times 10^{-7}$ .

Solución:

$$(\alpha_c - \alpha_a)(t - t_0) = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)E_c},$$

de donde

$$t - t_0 = 42^{\circ},7 \text{ C.}$$

6. Una barra de acero formada por dos partes prismáticas de longitudes  $l_1$  y  $l_2$  y de secciones rectas  $A_1$  y  $A_2$  tiene los extremos fijos. Hallar las fatigas que se originan cuando la temperatura se eleva  $60^{\circ}$  C. Supóngase  $l_1 = l_2$ ,  $A_1 = 2A_2$  y  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$ .

7. Hallar las fatigas de origen térmico en el sistema de la figura 24, si la temperatura de las tres pletinas crece  $60^{\circ}$  C. El espesor es el mismo en las tres y los coeficientes de dilatación son  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  y  $\alpha_c = 170 \times 10^{-7}$ . Supóngase  $E_c : E_a = \frac{11}{20}$ .

8. La temperatura del sistema de la figura 15 se eleva en  $60^{\circ}$  C. Hallar las fatigas de origen térmico si las tres barras son de acero y tienen la misma sección. Tómese  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  y  $E_a = 2 \times 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup>

9. Encontrar las fatigas en los alambres del sistema de la figura 18 si la sección recta de los alambres es  $0,8$  cm.<sup>2</sup>, la carga  $Q = 2.000$  kilogramos y la temperatura del sistema después del montaje aumenta en  $6^{\circ}$  C.

10. Determinar las fatigas que aparecen en el sistema representado en la figura 20 si la temperatura de la barra horizontal superior se eleva de  $t_0$  a  $t$  grados.

8. **Extensión de un anillo circular.**—Si fuerzas radiales uniformemente distribuidas actúan a lo largo del perímetro de un anillo delgado circular (fig. 25), se producirá un alargamiento uniforme del anillo. Para determinar la fuerza de extensión del anillo imaginémosle cortado por una sección diametral horizontal—fig. 25 (b)— y consideremos la parte superior como un cuerpo libre. Si  $q$  representa la carga uniforme por unidad de longitud de circunferencia y  $r$  es el radio de dicha circunferencia, la fuerza que obra en un elemento de anillo determinado

por dos secciones radiales adyacentes será  $qrd\varphi$ , donde  $d\varphi$  es el ángulo en el centro correspondiente. Tomando la suma de las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan en el medio anillo, obtendremos la siguiente ecuación de equilibrio:

$$2P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} qr \sin \varphi d\varphi = 2qr,$$

de donde

$$P = qr. \quad (13)$$

La fatiga de extensión en el anillo se obtendrá ahora dividiendo la fuerza  $P$  por el área de la sección recta del anillo.

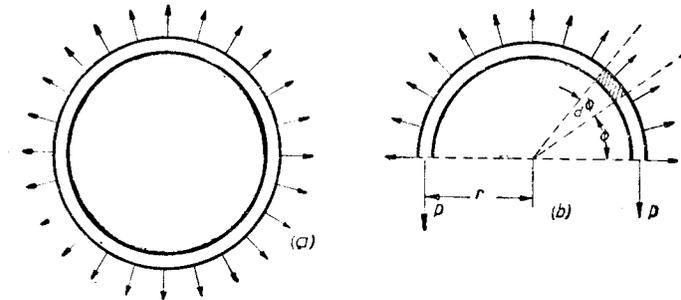


FIG. 25

En las aplicaciones prácticas es muy frecuente tener que determinar la fatiga de extensión en un anillo circular giratorio. Entonces  $q$  representa la fuerza centrífuga por unidad de longitud del anillo y viene dada por la ecuación

$$q = \frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r}, \quad (14)$$

en donde  $w$  = peso del anillo por unidad de longitud;  $r$ , radio de la circunferencia media;  $v$ , velocidad del anillo en el radio  $r$ , y  $g$ , aceleración de la gravedad. Sustituyendo esta expresión de  $q$  en la ecuación (13) se obtiene

$$P = \frac{wv^2}{g},$$

y la fatiga correspondiente será

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{wv^2}{Ag} = \frac{\gamma v^2}{g}. \quad (15)$$

Se ve que la fatiga es proporcional a la densidad  $\frac{\gamma}{g}$  del material y al cuadrado de la velocidad periférica.

### Problemas

1. Determinar la fatiga de extensión en la pared cilíndrica de la prensa de la figura 3 si el diámetro interior es 25 cm. y el espesor de la pared 2,5 cm.

*Solución:* La presión hidrostática máxima  $p$  en el cilindro se encontrará por la ecuación

$$p \frac{\pi 25^2}{4} = 50.000 \text{ kg.},$$

de donde  $p = 100 \text{ kg./cm.}^2$ . Separando del cilindro un anillo de longitud 1 cm. en dirección del eje del cilindro y aplicando la ecuación (13) se obtiene

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \times 12,5}{2,5 \times 1} = 500 \text{ kg./cm.}^2$$

2. Un tubo de acero se ha introducido en otro de cobre, estando ambos a una alta temperatura  $t$  (fig. 26), siendo el ajuste perfecto y no existiendo presión alguna entre los tubos a aquella temperatura. Determinar las fatigas que se producirán en el cobre y en el acero al enfriarse el conjunto hasta la temperatura ambiente  $t_0$  si el diámetro exterior del tubo de acero es  $d$ , el espesor del tubo de acero es  $h_a$  y el del tubo de cobre  $h_c$ .

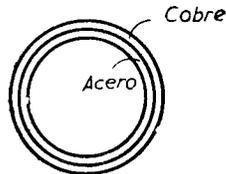


FIG. 26

*Solución:* Debido a la diferencia de coeficientes de dilatación  $\alpha_c$  y  $\alpha_a$ , existirá una presión entre los tubos exterior e interior al enfriarse. Sea  $x$  la presión en  $\text{kg./cm.}^2$ . La fatiga de extensión en el tubo de cobre será

$$\sigma_c = \frac{xd}{2h_c}$$

y la fatiga de compresión en el tubo de acero será

$$\sigma_a = \frac{xd}{2h_a}$$

La presión  $x$  puede encontrarse estableciendo en forma de ecuación la condición de que en virtud del enfriamiento ambos tubos tienen la misma contracción perimetral; o sea

$$\alpha_c (t - t_0) - \frac{xd}{2E_c h_c} = \alpha_a (t - t_0) + \frac{xd}{2E_a h_a},$$

de donde

$$\sigma_c = \frac{xd}{2h_c} = \frac{(\alpha_c - \alpha_a)(t - t_0) E_c}{1 + \frac{h_c E_c}{h_a E_a}}.$$

Del mismo modo podría calcularse la fatiga en el acero.

3. Refiriéndonos a la figura 25, ¿qué fatiga adicional de extensión se producirá en el tubo al someterle a una presión hidrostática interna de valor  $p = 7 \text{ kg./cm.}^2$ , si el diámetro interior es  $d_i = 10 \text{ cm.}$ ,  $h_a = 2,5$  milímetros y  $h_c = \frac{20}{11} \times 2,5 \text{ mm.}$ ?

*Solución:* Separemos del tubo un anillo elemental de altura 1 cm. La fuerza total de extensión en el anillo será

$$P = \frac{pd_i}{2} = 35 \text{ kg.}$$

Debido a que los alargamientos circunferenciales en el cobre y en el acero son iguales, las fatigas estarán en la relación de los módulos de elasticidad, es decir, la fatiga en el cobre será  $\frac{11}{20}$  de la del acero y, por tanto, la fuerza  $P$ , en este caso, se distribuye en partes iguales entre los dos metales y las fatigas producidas serán:

$$\sigma_c = \frac{P}{2h_c} = \frac{35}{2 \times \frac{20}{11} \times 0,25} = 38,5 \text{ kg./cm.}^2 \text{ para el cobre}$$

y

$$\sigma_a = \frac{20}{11} \sigma_c = 70 \text{ kg./cm.}^2 \text{ para el acero.}$$

4. Un anillo zunchado está formado por un anillo interior de cobre y otro anillo exterior de acero.

El diámetro interior del anillo de acero es menor que el diámetro exterior del anillo de cobre en una cantidad  $\delta$  y el conjunto se ajusta previo calentamiento del anillo de acero. Al enfriarse, el anillo de acero produce presión sobre el anillo de cobre (presión de zunchado). Determinar las fatigas en el acero y en el cobre si ambos anillos tienen secciones rectangulares de dimensiones  $h_a$  y  $h_c$  en dirección radial y la unidad en dirección perpendicular al plano del anillo. Las dimensiones  $h_a$  y  $h_c$  pueden considerarse pequeñas comparadas con el diámetro de la superficie de contacto de los dos anillos.

*Solución:* Sea  $x$  la presión uniformemente distribuida en la superficie de contacto de los anillos. La fatiga de compresión en el cobre y la de extensión en el acero serán:

$$\sigma_c = \frac{xd}{2h_c}; \quad \sigma_a = \frac{xd}{2h_a} \quad (\alpha)$$

El acortamiento del diámetro exterior del anillo de cobre será:

$$\delta_1 = \frac{\gamma_c}{E_c} \cdot d = \frac{xd^3}{2h_c E_c}$$

El alargamiento del diámetro interior del anillo de acero será:

$$\delta_2 = \frac{\sigma_a}{E_a} \cdot d = \frac{xd^3}{2h_a E_a}$$

La presión desconocida  $x$  se encontrará por la ecuación

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{xd^3}{2} \left( \frac{1}{h_c E_c} + \frac{1}{h_a E_a} \right) = \delta,$$

de donde

$$x = \frac{2\delta h_a E_a}{d^2 \left( 1 + \frac{h_a E_a}{h_c E_c} \right)}$$

Las fatigas  $\sigma_a$  y  $\sigma_c$ , por las ecuaciones (a), serán:

$$\sigma_c = \frac{\delta h_a}{d h_c} \cdot \frac{E_a}{1 + \frac{h_a E_a}{h_c E_c}}; \quad \sigma_a = \frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_a}{1 + \frac{h_a E_a}{h_c E_c}}$$

5. Determinar las fatigas que se producirán en el anillo zunchado del problema anterior al girar el anillo con una velocidad constante de  $n$  r. p. m.

*Solución:* Debido a que el cobre tiene mayor densidad y menor módulo de elasticidad que el acero, el anillo de cobre presiona sobre el anillo de acero durante la rotación. Sea  $x$  la presión por  $\text{cm.}^2$  de superficie de contacto entre los dos anillos. Las fatigas correspondientes vendrán dadas por las ecuaciones (a) del problema anterior. Es preciso sumar a estas fatigas las fatigas producidas por la fuerza centrífuga. Representando por  $\gamma_a$  y  $\gamma_c$  los pesos por unidad de volumen del acero y el cobre, y usando la ecuación (15), se obtiene:

$$\sigma_a = \frac{\gamma_a}{g} \left( \frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left( \frac{d + h_a}{2} \right)^2; \quad \sigma_c = \frac{\gamma_c}{g} \left( \frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left( \frac{d - h_c}{2} \right)^2.$$

Combinando estas fatigas con las fatigas debidas a la presión  $x$  y teniendo en cuenta que el alargamiento debe ser el mismo en ambos anillos, se obtiene la siguiente ecuación, que sirve para determinar el valor de  $x$  en cada caso particular:

$$\frac{1}{E_a} \left[ \frac{\gamma_a}{g} \left( \frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left( \frac{d + h_a}{2} \right)^2 + \frac{xd}{2h_a} \right] = \frac{1}{E_c} \left[ \frac{\gamma_c}{g} \left( \frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left( \frac{d - h_c}{2} \right)^2 - \frac{xd}{2h_c} \right].$$

Conociendo  $x$  las fatigas en el cobre y en el acero, se encuentran sin dificultad.

6. Determinar la velocidad periférica límite de un anillo de cobre si el coeficiente de trabajo es  $\sigma_t = 210 \text{ kg./cm.}^2$  y  $\gamma_c = 8.700 \text{ kg./m.}^3$ .

*Respuesta:*  $v = 48 \text{ m./seg.}$

7. Con relación al problema 2 y figura 26, determinar la fatiga en el cobre a la temperatura ambiente, si  $t - t_0 = 55^\circ \text{C}$ ,  $\alpha_c - \alpha_a = 45 \times 10^{-7}$ ,  $h_a = h_c$ .

*Respuesta:*  $\sigma_c = 175 \text{ kg./cm.}^2$ .

8. Con referencia al problema 5, determinar el número  $n$  de revoluciones por minuto al cual la fatiga en el anillo de cobre se anula si la fatiga inicial de zunchado era una compresión de valor  $\sigma_0$ , y  $h_c = h_a$  y  $E_a = 2E_c$ .

*Solución:* El número  $n$  se determinará por la ecuación

$$3\sigma_0 = \left( \frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left[ \frac{\gamma_c}{g} \left( \frac{d - h_c}{2} \right)^2 + \frac{\gamma_a}{g} \left( \frac{d + h_a}{2} \right)^2 \right].$$

9. Hallar las fatigas en el anillo zunchado del problema 4, suponiendo  $\delta = 0,025 \text{ mm.}$ ,  $d = 10 \text{ cm.}$ ,  $h_a = h_c$  y  $\frac{E_a}{E_c} = \frac{20}{11}$ . Encontrar en cuánto varían las fatigas si la temperatura del anillo aumenta después del montaje en  $6^\circ \text{C}$ . Tómese  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  y  $\alpha_c = 170 \times 10^{-7}$ .

10. En el problema 5 hallar las fatigas correspondientes al acero y al cobre si  $n = 3.000 \text{ r. p. m.}$ ;  $d = 60 \text{ cm.}$ ;  $h_a = h_c = 12,5 \text{ mm.}$ ;  $\gamma_a = 7,8 \times 10^{-3} \text{ kg./cm.}^3$ ;  $\gamma_c = 8,7 \times 10^{-3} \text{ kg./cm.}^3$ .

CAPÍTULO II

ANÁLISIS DE FATIGAS Y DEFORMACIONES

9. Variación de la fatiga en la extensión y compresión simple al considerar secciones oblicuas al eje de la barra.—Para una barra prismática sometida a un esfuerzo axial de extensión  $P$  —fig. 27 (a)—, hemos considerado solamente la fatiga en una sección normal al eje de la barra. Vamos a considerar ahora

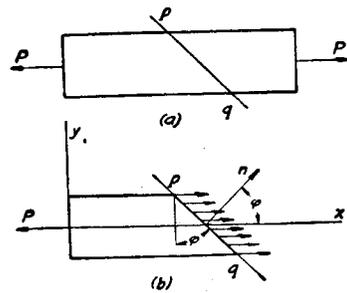


FIG. 27

el caso en que la sección  $pq$  perpendicular al plano de la figura está inclinada respecto al eje. Debido a que todas las fibras longitudinales tienen el mismo alargamiento (véase pág. 3), las fuerzas que representan la acción de la porción derecha de la barra sobre la izquierda estarán distribuidas uniformemente sobre la sección  $pq$ . Aislada la porción izquierda de la barra —fig. 27 (b)—, estará en equilibrio bajo la acción de estas fuerzas y la carga  $P$ . La fuerza por unidad de área de la sección  $pq$  se llama fatiga en esta sección. Representando por  $A$  el área de la sección recta de la barra y por  $\varphi$  el ángulo entre el eje de la barra  $x$  y la normal  $n$  a la sección  $pq$ , el área de esta sección será  $\frac{A}{\cos \varphi}$  y la fatiga  $S$  correspondiente será

$$S = \frac{P \cos \varphi}{A} = \sigma_x \cos \varphi \quad (16)$$

donde  $\sigma_x$  representa, como anteriormente, la fatiga correspondiente a la sección recta de la barra. Se ve que la fatiga  $S$  co

rrespondiente a una sección inclinada es menor que la fatiga  $\sigma_x$  en la sección recta de la barra y que disminuye al aumentar el ángulo  $\varphi$ . Para

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

la sección  $pq$  es paralela al eje de la barra y la fatiga  $S$  vale cero, es decir, no existe presión entre las superficies laterales de las fibras longitudinales. En las secciones oblicuas, la fatiga, que tiene la dirección de la fuerza  $P$ , no es perpendicular a la sección. Es corriente descomponerla en dos componentes, tal como indica la figura 28. La componente  $\sigma_n$  perpendicular a la sección se denomina fatiga normal. Su valor es

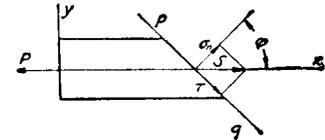


FIG. 28

$$\sigma_n = S \cos \varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi. \quad (17)$$

La componente tangencial  $\tau$  se denomina esfuerzo o fatiga cortante y su valor es

$$\tau = S \sin \varphi = \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sigma_x \sin 2\varphi}{2}. \quad (18)$$

Para individualizar la deformación que cada componente de la fatiga produce, consideraremos un elemento separado de la barra mediante dos secciones oblicuas paralelas  $pq$  y  $p_1q_1$  —figura 29 (a)—. Las fuerzas que actúan sobre él representan las acciones de las partes derecha e izquierda de la barra y se ven en la figura 29 (a).

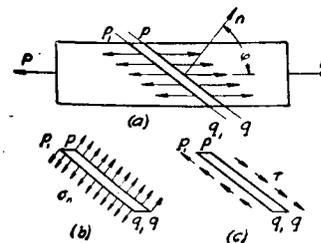


FIG. 29

Las figuras 29 (b) y 29 (c) se obtienen al descomponer dichas acciones en sus dos componentes, tal y como se dijo anteriormente, y presentar por separado la acción de estas componentes. Se ve que la fatiga normal  $\sigma_n$  produce extensión del elemento en dirección de la normal  $n$  y que el esfuerzo cortante produce un resbalamiento o deslizamiento de la sección  $pq$  con relación a la  $p_1q_1$ .

Por la expresión (17) se ve que la máxima fatiga normal se presenta en la sección recta de la barra y es  $(\sigma_n)_{\text{máx}} = \sigma_x$ .

La máxima fatiga cortante tiene lugar, como se deduce de la expresión (18), para secciones oblicuas a  $45^\circ$  y vale

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sigma_x \quad (19)$$

Aunque la máxima fatiga cortante es la mitad de la máxima fatiga normal, tiene aquella fatiga una gran importancia prác-

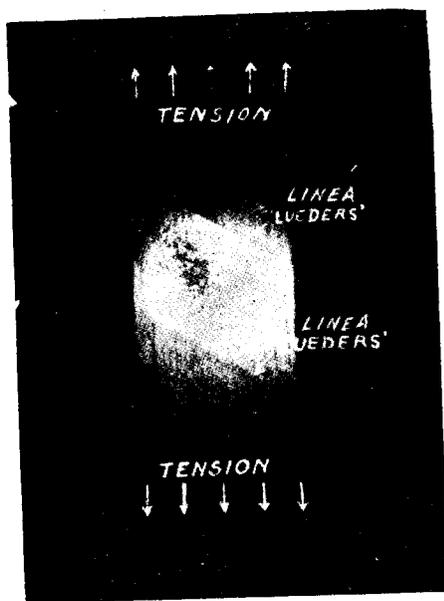


FIG. 30

tica, debido a que hay materiales menos resistentes al esfuerzo cortante que al normal. Por ejemplo, en un ensayo de tracción de una barra de acero dulce cuya superficie esté bien pulimentada, la fluencia del metal es visible a simple vista (fig. 30). Comienza por los planos oblicuos en los que la fatiga cortante es máxima.

Las fórmulas (17) y (18), deducidas para el caso de extensión simple, se aplican también cuando la sollicitación es com-

presión simple. Basta para ello atribuir a  $\sigma_x$  signo negativo en las expresiones (17) y (18). El signo negativo de  $\sigma_n$  indica que en la figura 29 (b) se obtiene compresión en lugar de extensión para el elemento infinitesimal comprendido entre las secciones  $pq$  y  $p_1q_1$ . El signo negativo en  $\tau$  (fórmula 18) indica que la acción cortante en el elemento tiene sentido contrario al indicado en la figura 29, c. La figura 31 da el convenio establecido respecto a los signos de las fatigas normal y cortante. Esta última es positiva cuando origina un par de sentido dextrorso.

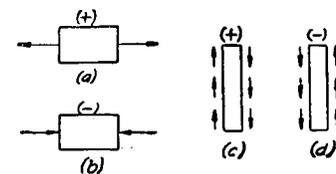


FIG. 31

10. El círculo de fatigas.—Las fórmulas (17) y (18) pueden representarse gráficamente<sup>1</sup>. Tomemos un sistema ortogonal de ejes coordenados con el origen en  $O$ , y de direcciones positivas las usuales (fig. 32). Si consideramos que la sección  $pq$  es perpendicular al eje de la barra, se tendrá, en la figura 28,  $\varphi = 0$ , y por las fórmulas (17) y (18),  $\sigma_n = \sigma_x$ ,  $\tau = 0$ . Escogiendo una escala para medir las fatigas, y tomando la componente cortante según

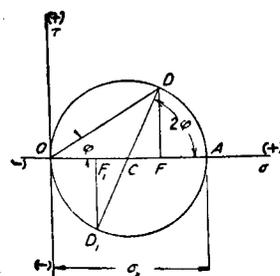


FIG. 32

el eje vertical, la fatiga ligada al plano  $\varphi = 0$  vendrá representada en la figura 32 por el punto  $A$ . Tomando ahora un plano paralelo al eje de la barra, tendremos  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , los dos componentes de la fatiga se anulan para este plano y, por tanto, en la figura 32 le corresponde el punto  $O$ . Construyendo una circunferencia sobre  $\overline{OA}$  como diámetro, se ve fácil-

mente que las componentes de la fatiga para una sección cualquiera  $pq$ , correspondiente a un ángulo  $\varphi$  (fig. 28), son las coordenadas de un punto de esta circunferencia. A fin de individua-

<sup>1</sup> Esta representación gráfica se debe a O. Mohr, *Zivilingenieur*, página 113, 1882. Véase también su *Abhandlungen*, pág. 219, 1906. En este libro pueden verse referencias a otras publicaciones sobre el mismo asunto.

lizarle, basta tomar en sentido contrario al de las agujas de un reloj, y a partir de  $A$ , el ángulo  $2\varphi$ . Sea  $D$  el punto así obtenido; de la figura se deduce:

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi,$$

$$\overline{DF} = \overline{CD} \operatorname{sen} 2\varphi = \frac{\sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\varphi.$$

Comparando estas expresiones con las (17) y (18) se ve que el punto  $D$  define la fatiga ligada al plano  $pq$  (fig. 28). Cuando la sección  $pq$  gira a izquierdas alrededor de un eje perpendicular al plano de la figura 28, y  $\varphi$  varía de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , el punto  $D$  se mueve de  $A$  hasta  $O$  por la semicircunferencia superior. Si el ángulo  $\varphi$  es superior a  $\frac{\pi}{2}$  se obtiene una sección como la representada en  $mm$  —fig. 33 (a)—, cuya normal exterior  $n_1$  forma con el eje un ángulo mayor que  $\frac{\pi}{2}$ . Al medir ahora el ángulo  $2\varphi$  a partir de  $A$ , en sentido contrario a las agujas del reloj, obtendremos puntos de la semicircunferencia inferior.

Supongamos el caso de que  $mm$  sea perpendicular a la sección  $pq$ , considerada anteriormente. El punto correspondiente  $D$  será tal que el ángulo  $DOD_1$  valga  $\pi$ ; es decir,  $DD_1$  es un diámetro. Calculando las coordenadas de  $D_1$  se obtendrán las componentes  $\sigma_{n_1}$  y  $\tau_1$ , de la fatiga ligada al plano  $mm$ :

$$\sigma_{n_1} = \overline{OF_1} = \overline{OC} - \overline{F_1C} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \operatorname{sen}^2 \varphi \quad (20)$$

$$\tau_1 = -\overline{F_1D_1} = -\overline{CD_1} \operatorname{sen} 2\varphi = -\frac{\sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\varphi. \quad (21)$$

Comparando estos resultados con las expresiones (17) y (18) se tiene

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_x \operatorname{sen}^2 \varphi = \sigma_x \quad (22)$$

$$\tau_1 = -\tau. \quad (23)$$

<sup>1</sup> El trozo de la barra sobre el que actúan las fatigas se indica en la figura mediante el rayado. La normal exterior  $n_1$  está orientada hacia afuera desde dicho trozo.

<sup>2</sup> El signo — obedece a que el punto  $D_1$  está situado del lado de las ordenadas negativas.

Se ve, por tanto, que la suma de las componentes normales de las fatigas ligadas a dos planos perpendiculares permanece constante y es igual a  $\sigma_x$ . Las componentes cortantes de las fatigas ligadas a dos planos perpendiculares son iguales, pero de signo contrario. Tomando las secciones  $m_1m_1$  y  $p_1q_1$ , adyacentes y paralelas a las  $mm$  y  $pq$ , se obtiene un elemento —fig. 33 (b)— ais-

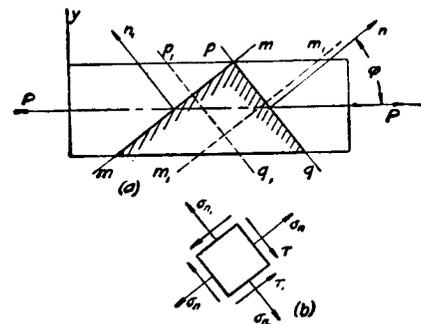


FIG. 33

lado, y las fatigas que le solicitan son las de la figura. Se ve que las fatigas cortantes que actúan sobre las caras del elemento de dirección  $pq$  producen un par dextrorso y, por tanto, de acuerdo con el convenio adoptado en la figura 31 (c) deben considerarse positivas. Las fatigas cortantes que obran sobre las otras dos caras serán, por el contrario, negativas, de acuerdo con lo establecido en la figura 31 (d).

El círculo de la figura 32, denominado círculo de fatigas, se emplea, tal como hemos indicado, para determinar las componentes  $\sigma_n$  y  $\tau$  de la fatiga ligada a un plano  $pq$ , definido por el ángulo  $\varphi$ , que su normal exterior forma con el eje  $x$  (fig. 28). También puede resolverse el problema inverso; es decir, dadas las componentes  $\sigma_n$  y  $\tau$ , hallar la fatiga axial  $\sigma_x$  y el ángulo  $\varphi$ . Se ve que el ángulo que forma la cuerda  $OD$  y el eje  $x$  es igual a  $\varphi$  (fig. 32). Conocido  $\varphi$ , puede trazarse el radio  $DC$ , que forma el ángulo  $2\varphi$  con el eje  $OC$ , y de este modo obtener el centro  $C$  del círculo.

## Problemas

1. Determinar  $\sigma_n$  y  $\tau$  analíticamente y gráficamente si  $\sigma_x = 1.200$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $\varphi = 30^\circ$  ó  $\varphi = 120^\circ$ . Aislar para estos ángulos un elemento como el de la figura 33 (b) e indicar con flechas el sentido de las fatigas que actúan sobre él.

2. Resolver el problema anterior suponiendo que en lugar de la fatiga de extensión  $\sigma_x$  actúa una compresión del mismo valor absoluto. En este caso, el diámetro del círculo de la figura 32 caerá del lado de las abscisas negativas.

3. Sobre un plano  $pq$ , (fig. 28), actúan una fatiga normal  $\sigma_n = 960$  kg./cm.<sup>2</sup> y una fatiga cortante  $\tau = 320$  kg./cm.<sup>2</sup>. Hallar el ángulo  $\varphi$  y la fatiga  $\sigma_x$ .

Respuesta:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}, \quad \sigma_x = \frac{\sigma_n}{\cos^2 \varphi} = 1.06674 \text{ kg./cm.}^2$$

4. Sobre dos caras perpendiculares del elemento de la figura 33 (b) actúan las fatigas normales  $\sigma_n = 960$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $\sigma_n = 480$  kg./cm.<sup>2</sup>. Hallar  $\sigma_x$  y  $\tau$ .

Respuesta:

$$\sigma_x = 1.440 \text{ kg./cm.}^2; \quad \tau = \pm 678,8 \text{ kg./cm.}^2$$

5. Hallar la fatiga cortante máxima en el problema 1.

6. Determinar la posición de las secciones para las que la fatiga normal es igual a la tangencial o cortante.

11. **Tracción o compresión en dos direcciones perpendiculares.**—Hay casos en los que el material está sometido a la acción de extensión o compresión en dos direcciones perpendiculares. Como ejemplo de fatigas combinadas vamos a encontrar las fatigas normales y cortantes en la pared cilíndrica de una caldera sometida a la presión interna de  $p$  kg./cm.<sup>2</sup>. Representando el diámetro interno por  $d$ , y el espesor de la plancha por  $h$  (fig. 34), separaremos un elemento de pared definido por dos secciones longitudinales y dos transversales. Debido a la presión interna el cilindro se dilatará en las direcciones axial y transversal. La fatiga de extensión  $\sigma_y$ , en sentido circunferen-

<sup>1</sup> En realidad,  $p$  presenta la diferencia entre la presión interna y la externa igual a la atmosférica.

cial, se determinará del mismo modo que en el caso de un anillo circular (artículo 8):

$$\sigma_y = \frac{pd}{2h}. \quad (24)$$

Para calcular la fatiga de extensión  $\sigma_x$  en dirección axial se supondrá que la fuerza de extensión que produce el alargamiento del hervidero es igual a la fuerza que actúa en dichos extremos, es decir, igual a

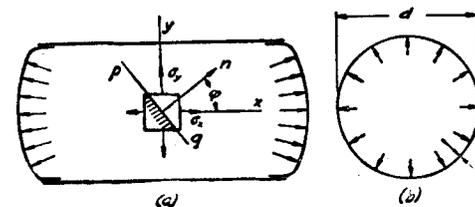


FIG. 34

El área de la sección recta del hervidero es <sup>1</sup>

$$P = p \left( \frac{\pi d^2}{4} \right).$$

El área de la sección recta del hervidero es <sup>1</sup>

$$A = \pi dh;$$

por tanto,

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{pd}{4h}. \quad (25)$$

Se ve que la fatiga en sentido circunferencial es doble que la fatiga en dirección axial <sup>2</sup>. Para una sección  $pq$  perpendicular al plano  $xy$ , definida por el ángulo  $\varphi$ —fig. 34 (a)—, las fórmulas (17) y (18) del artículo anterior darán las componentes normal y cortante de la fatiga ligada al plano  $pq$  y debida a la fatiga extensora  $\sigma_x$ ; sus valores son

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi, \quad \tau = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi. \quad (a)$$

<sup>1</sup> El espesor de la pared se supone pequeño comparado con el diámetro.

<sup>2</sup> La presión  $p$  que actúa sobre la cara cilíndrica interna del elemento se desprecia frente a los valores de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ .

Para calcular las componentes producidas en el mismo plano  $pq$  por la fatiga extensora  $\sigma_y$ , observaremos que el ángulo entre  $\sigma_y$  y la normal  $n$  —fig. 34 (a)— es  $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ , medido a derechas. Por tanto, al utilizar las ecuaciones (17) y (18) es necesario substituir  $\sigma_x$  por  $\sigma_y$ , y  $\varphi$  por  $-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ . Así obtendremos

$$\sigma_n'' = \sigma_y \cos^2 \varphi, \quad \tau'' = -\frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\varphi. \quad (b)$$

Sumando las expresiones (a) y (b) se obtiene como resultado

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi, \quad (26)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi. \quad (27)$$

12. El círculo de Mohr para fatigas combinadas.—Procediendo del modo empleado en el artículo 10 pueden representarse fácilmente, mediante una circunferencia, las fórmulas (26)

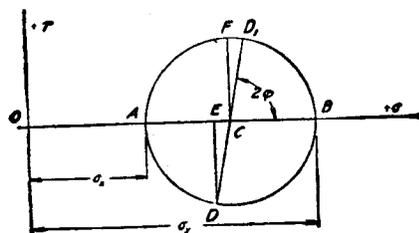


Fig. 35

y (27). Supongamos, como entonces, que abscisas y ordenadas representan, a una cierta escala, las componentes normal y cortante de la fatiga; por consiguiente, los puntos  $A$  y  $B$  (fig. 35), de abscisas  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , representan las fatigas ligadas a las caras del elemento de la figura 34 (a), perpendiculares a los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente. Para obtener las componentes de la fatiga ligada a un plano oblicuo, definido por un ángulo  $\varphi$  —fig. 34 (a)—, basta construir una circunferencia con  $AB$  como diámetro y trazar el radio  $CD$ , que forma un ángulo  $ACD$  igual a  $2\varphi$ , con-

tado a partir del punto  $A$ , en sentido contrario al de las agujas del reloj. De la figura se deduce

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OC} - \overline{CE} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB}) - \frac{1}{2} (\overline{OB} - \overline{OA}) \cos 2\varphi = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Lo que indica que la abscisa  $\overline{OE}$  del punto  $D$  de la circunferencia, medida a la escala adoptada, da la componente normal  $\sigma_n$  de la fatiga (26).

La ordenada del punto  $D$  es

$$\overline{DE} = \overline{CD} \sin 2\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\varphi.$$

Como en este caso esta ordenada es negativa, se deduce que la ordenada del punto  $D$ , tomada con el signo que la corresponde, nos da la componente cortante de la fatiga (27).

Cuando el plano  $pq$  gira en sentido contrario al de las agujas del reloj, respecto a un eje perpendicular al plano  $xy$  —figura 34 (a)—, el punto  $D$  correspondiente se mueve también en sentido contrario al de las agujas del reloj sobre el círculo de Mohr (fig. 35); de forma que para cada valor de  $\varphi$  las componentes  $\sigma_n$  y  $\tau$  de la fatiga se obtienen como coordenadas del punto  $D$ .

De esta representación gráfica de las fórmulas (26) y (27) se deduce que la componente normal máxima del estado elástico es, en nuestro caso,  $\sigma_y$ , y que la componente cortante máxima, representada por el radio  $\overline{CF}$  de la circunferencia de la figura 35, es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \quad (28)$$

y acontece cuando  $\sin 2\varphi = -1$  y  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Igual valor para la fatiga cortante, pero con el signo negativo, corresponde al plano, para el que  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

Tomando dos planos perpendiculares, definidos por los ángulos  $\varphi$  y  $\frac{\pi}{2} + \varphi$ , que sus normales  $n$  y  $n_1$  forman con el eje  $x$ ,

las fatigas ligadas a ellos son las coordenadas de los puntos  $D$  y  $D_1$  de la figura 35, y geoméricamente se deduce que

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x + \sigma_y, \quad (29)$$

$$\tau_1 = -\tau. \quad (30)$$

Esto indica que la suma de las componentes normales de las fatigas ligadas a dos planos perpendiculares es constante al variar el ángulo  $\varphi$ , y que las componentes cortantes son iguales, pero de signo opuesto. Una circunferencia análoga a la de la figura 35 puede construirse cuando una o las dos fatigas  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$

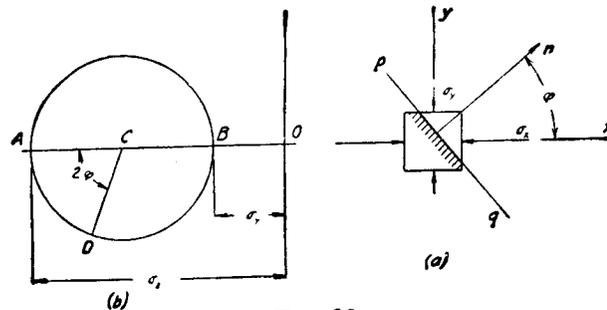


FIG. 36

son compresiones; basta para ello tomar las que lo sean en sentido negativo sobre el eje de abscisas.

Si suponemos, por ejemplo, que las fatigas que actúan sobre el elemento son las indicadas en la figura 36 (a), la circunferencia correspondiente es la de la figura 36 (b). Las componentes de la fatiga ligada al plano  $pq$ , de normal  $n$ , vienen dadas por las coordenadas del punto  $D$  del diagrama.

Problemas

1. La caldera de la figura 34 tiene  $d = 2,5$  m.,  $h = 1,25$  cm. Determinar  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  si  $p = 8$  kg./cm.<sup>2</sup> Aislar un elemento por planos a 30° y 120° y representar los valores y direcciones de las componentes de las fatigas ligadas a las caras laterales de dicho elemento.

2. Determinar las fatigas  $\sigma_n$ ,  $\sigma_{n_1}$ ,  $\tau$  y  $\tau_1$ , si en la figura 36 (a)  $\sigma_x = 800$  kg./cm.<sup>2</sup>,  $\sigma_y = -400$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\varphi_1 = 120^\circ$ .

Respuesta:

$$\sigma_n = 500 \text{ kg./cm.}^2, \sigma_{n_1} = -100 \text{ kg./cm.}^2, \tau = \tau_1 = 520 \text{ kg./cm.}^2.$$

3. Determinar  $\sigma_n$ ,  $\sigma_{n_1}$ ,  $\tau$  y  $\tau_1$  en el problema anterior, si el ángulo  $\varphi$  se escoge de modo que  $\tau$  sea máximo.

Respuesta:

$$\sigma_n = \sigma_{n_1} = 200 \text{ kg./cm.}^2, \tau = \tau_1 = 600 \text{ kg./cm.}^2.$$

13. **Fatigas principales.**—En el artículo anterior hemos visto que, para extensión o compresión en dos direcciones perpendiculares  $x$  e  $y$ , una de las dos fatigas  $\sigma_x$  o  $\sigma_y$  es la fatiga normal máxima, y la otra la mínima. Para cualquier plano inclinado, tal como el  $pq$ —figs. 34 (a) y 36 (a)—, el valor de la fatiga normal  $\sigma_n$  queda entre dichos límites.

Sobre los planos inclinados actúan, además de las fatigas normales  $\sigma_n$ , fatigas cortantes  $\tau$ . Las fatigas  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , de las cua-

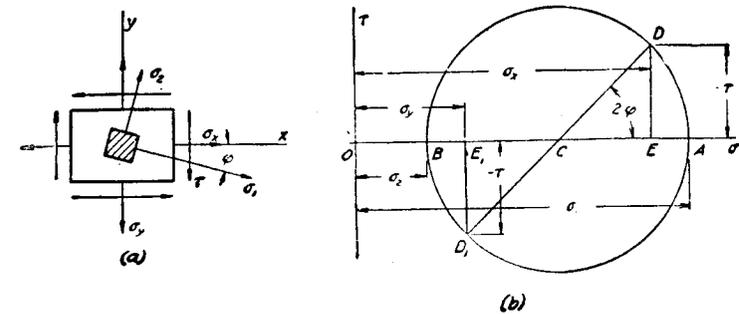


FIG. 37

les una es la máxima y otra la mínima fatiga normal, se denominan fatigas principales, y los dos planos perpendiculares a los que están ligadas se denominan planos principales. Sobre estos planos no actúan fatigas cortantes; en el ejemplo del artículo anterior (fig. 34) encontramos las fatigas principales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  por simples consideraciones, y en función de ellas calculamos las componentes normal y cortante de la fatiga ligada a un plano inclinado, tal como el  $pq$ —fig. 34 (a)—. En otros casos (véase página 118) es más fácil determinar las componentes normales y cortantes de las fatigas ligadas a dos planos perpendiculares. El camino más sencillo para determinar en estos casos las fatigas principales es emplear el círculo de Mohr. Supongamos conocidas las fatigas que obran sobre un paralelepípedo rectangular elemental—fig. 37 (a)—. Las fatigas  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  no son las princi-

pales, puesto que no solamente actúan fatigas normales, sino también cortantes, sobre los planos perpendiculares a los ejes  $x$  e  $y$ .

Para construir el círculo de fatigas en este caso emplearemos primeramente las componentes de las fatigas  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau$ , y obtendremos los puntos  $D$  y  $D_1$  —fig. 37 (b)—. Puesto que estos dos puntos corresponden a dos planos perpendiculares, la longitud  $DD_1$  será un diámetro del círculo de fatigas. La intersección de este diámetro con el eje  $x$  nos da el centro  $C$  del círculo, y, por tanto, puede éste construirse. Los puntos de intersección  $A$  y  $B$  de la circunferencia con el eje  $x$  definen los valores de las fatigas normales máxima y mínima que representaremos por  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Mediante sencillas consideraciones geométricas se deduce

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad (31)$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (32)$$

De la figura se deducen también las direcciones correspondientes a las fatigas principales. Sabemos que el ángulo  $DCA$  es el doble del que forman la fatiga  $\sigma_1$  y el eje  $x$ , y puesto que  $2\varphi$  se mide de  $D$  a  $A$ , en el sentido de las agujas del reloj, la dirección de  $\sigma_1$  será la indicada en la figura 37 (a). Si aislamos el elemento rayado en la figura mediante planos normales y paralelos a  $\sigma_1$ , sobre estos planos actuarán ahora únicamente fatigas normales de valor  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Para el cálculo numérico del ángulo  $\varphi$  se deduce de la figura

$$|\operatorname{tg} 2\varphi| = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}.$$

Teniendo en cuenta que el signo del ángulo  $\varphi$  debe ser en este caso negativo, puesto que se mide desde el eje  $x$  en sentido de las agujas del reloj —fig. 37, (a)—, se deduce

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (33)$$

La fatiga cortante máxima viene dada por el radio de la circunferencia y vale

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (34)$$

Las ecuaciones (31) a (34) resuelven por completo el problema de la determinación de las fatigas normales máxima y mínima y de la fatiga cortante máxima, conocidas las componentes normales y cortantes de las fatigas ligadas a dos planos perpendiculares cualesquiera.

### Problemas

1. Un elemento —fig. 37 (a)— está sometido a la acción de las fatigas  $\sigma_x = 350 \text{ kg./cm.}^2$ ;  $\sigma_y = 210 \text{ kg./cm.}^2$ ;  $\tau = 70 \text{ kg./cm.}^2$ . Determinar las magnitudes y las direcciones de las fatigas principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

*Solución:* Mediante las ecuaciones (31) y (32) se obtiene

$$\sigma_1 = \frac{350 + 210}{2} + \sqrt{\left(\frac{350 - 210}{2}\right)^2 + 70^2} = 379 \text{ kg./cm.}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{350 + 210}{2} - \sqrt{\left(\frac{350 - 210}{2}\right)^2 + 70^2} = 161 \text{ kg./cm.}^2$$

y empleando (33),

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -1; \quad 2\varphi = -45^\circ; \quad \varphi = -22\frac{1}{2}^\circ.$$

Las direcciones de los ejes principales están indicadas en la figura 37 (a).

2. Determinar las direcciones de las fatigas principales en el problema anterior, suponiendo  $\sigma_x = -350 \text{ kg./cm.}^2$ .

*Solución:* El círculo correspondiente se ve en la figura 38. El ángulo  $\varphi$  entre la normal exterior de la cara en la cual actúa la fatiga  $\sigma_x$  y la fatiga máxima principal  $\sigma_1$  se hallará del modo siguiente:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = +\frac{1}{4}; \quad 2\varphi = 14^\circ 2'; \quad \varphi = 7^\circ 1'$$

medido en sentido contrario al de las agujas del reloj desde el eje  $x$ .

3. Hallar el círculo de Mohr para el caso de dos fatigas principales de extensión iguales  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  o dos de compresión iguales,  $\sigma_x = \sigma_y = -\sigma$ .  $\tau = 0$ , en ambos casos.

*Respuesta:* En este caso los círculos se transforman en dos puntos sobre el eje de abscisas  $+\sigma$  y  $-\sigma$ , respectivamente.

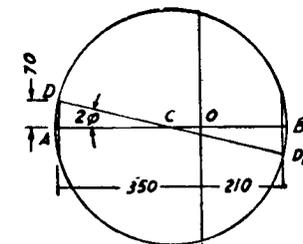


FIG. 38

4. Sobre las caras del elemento de la figura 39 (a) obran las fatigas  $\sigma_x = -40 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $\sigma_y = 120 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $\tau = 80 \text{ kg./cm.}^2$ . Encontrar, mediante el círculo de fatigas, los valores de las fatigas normales y cortantes ( $\alpha$ ) para los planos principales ( $\beta$ ), para los planos de fatiga cortante máxima.

*Solución:* El círculo de fatigas correspondiente se ve en la figura 39 (b). Los puntos  $D$  y  $D_1$  representan las fatigas que actúan sobre

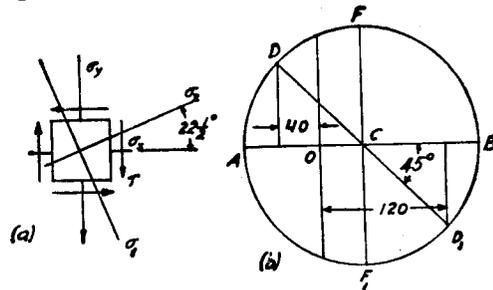


FIG. 39

las caras del elemento de la figura 39 (a), perpendiculares a los ejes  $x$  e  $y$ ; y  $OB$  y  $OA$  son las fatigas principales. Sus valores son  $\sigma_1 = 153 \text{ kg./cm.}^2$  y  $\sigma_2 = -73 \text{ kg./cm.}^2$ , respectivamente. La dirección de la fatiga de compresión máxima  $\sigma_2$  forma un ángulo de  $22\frac{1}{2}^\circ$  con el eje  $x$ , medido este ángulo desde el eje  $x$  y en sentido contrario al de las agujas del reloj, tal como indica la figura 39 (a). Los puntos  $F$  y  $F_1$  representan las fatigas que actúan sobre los planos de máxima fatiga cortante. El valor de esta fatiga cortante es  $113 \text{ kg./cm.}^2$ .  $OC$  representa la componente normal de la fatiga ligada al mismo plano y vale  $40 \text{ kg./cm.}^2$ .

5. Resolver el problema anterior si  $\sigma_x = -400 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $\sigma_y = 240 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $\tau = 80 \text{ kg./cm.}^2$ .

14. Análisis de la deformación en el caso de extensión simple.—En el artículo 2.º se ha visto el alargamiento axial de una barra sometida a extensión. Experimentalmente se ha comprobado que el alargamiento axial viene acompañado de una contracción lateral de la barra y que la relación

$$\frac{\text{contracción lateral unitaria}}{\text{alargamiento axial unitario}}$$

es constante para una barra dada entre los límites elásticos. Esta constante se representa por  $\mu$  y se denomina relación de

Poisson, en honor al matemático francés que determinó esta relación de modo analítico usando la teoría molecular como hipótesis de constitución de los materiales. Para materiales que tengan las mismas propiedades elásticas en todas direcciones, materiales isotrópicos, Poisson halló el valor  $\mu = \frac{1}{4}$ . Ensayos ex-

perimentales han hecho ver que la contracción lateral en probetas metálicas<sup>1</sup> tiene un valor próximo al calculado por Poisson. En el caso particular del acero puede tomarse  $\mu = 0,3$ . Conociendo la relación o módulo de Poisson, de un material, el cambio de volumen de la barra extendida puede calcularse fácilmente. La longitud de la barra aumenta en la relación  $(1 + \epsilon) : 1$ . Las dimensiones laterales disminuyen en la relación  $(1 - \mu\epsilon) : 1$ , por lo que el área de la sección recta disminuye en la relación  $(1 - \mu\epsilon)^2 : 1$ . Por tanto, el volumen de la barra cambia en la relación  $(1 + \epsilon)(1 - \mu\epsilon)^2 : 1$ , o sea  $(1 + \epsilon - 2\mu\epsilon) : 1$ , al tener en cuenta el pequeño valor de  $\epsilon$  y despreciar sus potencias. De aquí se deduce que la dilatación cúbica unitaria es  $\epsilon(1 - 2\mu)$ . Para materiales como la goma y parafina, el valor de  $\mu$  está próximo a 0,50 y el volumen permanece aproximadamente constante durante la extensión. Si  $\mu$  fuese mayor que 0,50, el volumen disminuiría al extender la barra. Hay materiales tales como el hormigón, en los que  $\mu$  tiene un valor reducido ( $\mu = \frac{1}{8}$  a  $\frac{1}{12}$ ), y otros, como el corcho, en los que  $\mu$  puede suponerse nulo.

Todas estas conclusiones son aplicables con el adecuado cambio de signos al caso de compresión. El acortamiento longitudinal viene acompañado de una dilatación transversal, para cuyo cálculo puede usarse el mismo valor de  $\mu$  que en el caso de extensión.

#### Problemas

1. Determinar el aumento unitario de volumen de una barra extendida si  $\sigma_t = 448 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $\mu = 0,30$ ,  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2$ .

*Solución:* La dilatación cúbica unitaria es

$$\epsilon(1 - 2\mu) = \frac{\sigma_t}{E}(1 - 2\mu) = \frac{448}{2 \times 10^6}(1 - 0,6) = 89,6 \times 10^{-6}$$

<sup>1</sup> Estos materiales se consideran isotrópicos (véase Segunda parte).

2. Determinar el aumento de volumen de una barra producido por una fuerza  $P$  que actúa en su extremo inferior y el peso propio de la barra (véase artículo 5.º, pág. 14).

*Respuesta:* El aumento de volumen es

$$\frac{Al(1-2\mu)}{E} \left( \frac{P}{A} + \frac{\gamma l}{2} \right).$$

15. Deformación en el caso de extensión o compresión en dos direcciones perpendiculares.—Si una barra cuya forma es un paralelepípedo rectangular está sometida a fuerzas de extensión que actúan en dos direcciones perpendiculares  $x$  e  $y$  (fig. 34), el alargamiento en una de las direcciones depende no solamente de la fatiga en esa dirección, sino también de la fatiga existente en la dirección perpendicular. El alargamiento unitario en la dirección del eje  $x$  debido a la fatiga  $\sigma_x$ , será  $\frac{\sigma_x}{E}$ . La fatiga  $\sigma_y$  produce una contracción lateral unitaria en la dirección  $x$ , cuyo valor es  $\mu \frac{\sigma_y}{E}$ ; por tanto, al actuar ambas fatigas  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  simultáneamente, el alargamiento unitario en la dirección  $x$  será

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} \quad (35)$$

Análogamente, para la dirección  $y$  se obtiene

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} \quad (36)$$

En el caso particular de que las dos fatigas de extensión sean iguales  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ , se obtiene

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\sigma}{E} (1 - \mu) \quad (37)$$

De las ecuaciones (35) y (36) se pueden despejar las fatigas  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , en función de los alargamientos unitarios  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$ , obteniéndose

$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \mu\epsilon_y) E}{1 - \mu^2}; \quad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \mu\epsilon_x) E}{1 - \mu^2} \quad (38)$$

### Problemas

1. Determinar el aumento de volumen del hervidero cilíndrico de acero sometido a presión interior, de la figura 34, despreciando la deformación de los extremos y tomando  $\sigma_y = 400$  kg./cm.<sup>2</sup>.

*Solución:* Usando las ecuaciones (35) y (36),

$$\epsilon_y = \frac{400}{2 \times 10^6} - 0,3 \frac{200}{2 \times 10^6} = \frac{340}{2 \times 10^6} = 17 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_x = \frac{200}{2 \times 10^6} - 0,3 \frac{400}{2 \times 10^6} = \frac{80}{2 \times 10^6} = 4 \times 10^{-6}$$

El volumen del hervidero aumenta en la relación

$$(1 + \epsilon_y)^3 (1 + \epsilon_x) : 1 = (1 + 2\epsilon_y + \epsilon_x) : 1 = 1.00038 : 1.$$

2. Un cubo de hormigón está comprimido en dos direcciones perpendiculares por el dispositivo que indica la figura 40. Determinar la disminución de volumen del cubo si su lado es 10 cm. y la fatiga de compresión se distribuye de modo uniforme sobre sus caras;  $\mu = 0,1$  y  $P = 10.000$  kg.

*Solución:* Despreciando el rozamiento en los nudos y considerando el equilibrio de cada uno —fig. 40 (b)— se puede ver fácilmente que el cubo está sometido a compresiones iguales en dos direcciones perpendiculares y que la fuerza de compresión es igual a  $P\sqrt{2} = 14.000$  kg.

La deformación correspondiente (ecuación 37) es

$$\epsilon_x = \epsilon_y = - \frac{14.100}{10^3 \times 2,8 \times 10^6} (1 - 0,1) = - 0,000453.$$

En dirección perpendicular al plano de la figura el alargamiento unitario del cubo valdrá

$$\epsilon_z = - \mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = 0,2 \frac{14.100}{10^3 \times 2,8 \times 10^6} = 0,0001.$$

La dilatación cúbica unitaria del cubo será

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = - 2 \times 0,000453 + 0,0001 = - 0,000806.$$

3. Determinar el aumento de la superficie lateral del hervidero considerado en el problema 1.

*Solución:* El incremento unitario de área será:

$$\epsilon_x + \epsilon_y = 21 \times 10^{-6}.$$

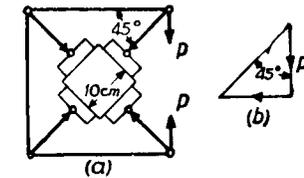


FIG. 40

4. Determinar el alargamiento unitario en la dirección  $\sigma_1$  de una barra de acero, si el estado de fatiga es el indicado en el problema 1, página 47.

Solución:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \times 10^6} (379 - 0,3 \times 161) = 165,3 \times 10^{-6}$$

16. **Fatiga cortante pura.**—Consideremos el caso particular de acción de una fatiga de extensión  $\sigma_x$  y otra de compresión  $\sigma_y$  de la misma magnitud —fig. 41 (a)—. El círculo de Mohr corres-

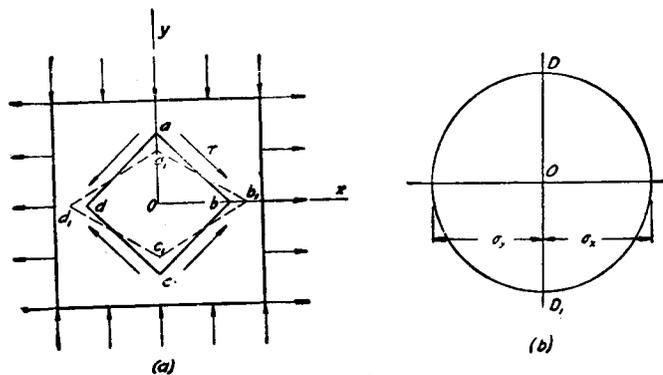


FIG. 41

pondiente es el de la figura 41 (b). El punto  $D$  de este círculo representa las fatigas ligadas a las secciones  $ab$  y  $cd$ , cuya normal está inclinada  $45^\circ$  con el eje  $x$ , y el punto  $D_1$  representa las fatigas para las secciones  $ad$  y  $bc$ , perpendiculares a las primeras. Se ve en el círculo que las fatigas normales para cada una de estas secciones son nulas y que la fatiga cortante para esas mismas secciones está representada por el radio del círculo y es

$$\tau = \sigma_x = -\sigma_y. \quad (a)$$

De aquí se deduce que un elemento como el  $abcd$  puede considerarse aislado y estar en equilibrio bajo la acción de fatiga cortantes solamente —fig. 41 (a)—. Un estado de fatiga como éste se denomina fatiga cortante pura. Si la sección no es inclinada a  $45^\circ$  con relación al eje  $x$ , existirán en ella fatiga normal y fatiga cortante. La magnitud de estas fatigas puede obtenerse utilizando el círculo de Mohr para este caso —fig. 41 (b).

Consideremos ahora la deformación del elemento  $abcd$ . Al no existir fatigas normales a las caras del elemento, las longitudes  $ab$ ,  $ad$ ,  $bc$  y  $dc$  no cambiarán durante la deformación; pero la diagonal vertical acortará y la diagonal horizontal  $db$  alargará, mientras que el cuadrado  $abcd$  se transforma en el rombo indicado en la figura con líneas de trazos. El ángulo en  $a$ , que era  $\frac{\pi}{2}$  antes

de la deformación, se hace mayor que  $\frac{\pi}{2}$ ; por ejemplo,  $\frac{\pi}{2} + \gamma$ , y al mismo tiempo el ángulo en  $b$  disminuye y se transforma en  $\frac{\pi}{2} - \gamma$ . El pequeño ángulo  $\gamma$  mide la distorsión del elemento

$abcd$  y se denomina deformación angular unitaria. La existencia de esta deformación puede verse también del modo siguiente. El elemento  $abcd$  de la figura 41 (a) se gira  $45^\circ$  y queda en la posición indicada en la figura 42. Después de la distorsión, producida por la fatiga cortante, el mismo elemento toma la posición representada por las líneas de trazos. La deformación angular  $\gamma$  será igual al cociente  $\frac{\overline{aa_1}}{ad}$  entre

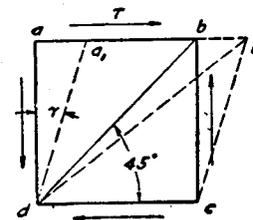


FIG. 42

el deslizamiento  $aa_1$  del lado  $ab$  con relación al lado  $dc$  y la distancia entre esos dos lados. Debe subrayarse el hecho de que una aplicación uniforme de fatigas cortantes en las caras de un bloque tal como indica la figura 42 es muy difícil de realizar. Los cálculos prácticos, en caso de fatiga cortante, de elementos como remaches y pernos, en los que se supone una distribución uniforme de la fatiga cortante en las secciones rectas, son solamente una grosera aproximación.

Para establecer relaciones entre la deformación angular unitaria y la fatiga cortante que actúa en los lados del elemento  $abcd$  consideraremos el triángulo rectángulo  $Oab$  —fig. 41 (a)—. El alargamiento del lado  $Ob$  y el acortamiento del lado  $Oa$  de este triángulo durante la deformación se encontrará usando las ecuaciones (35) y (36). Como en este caso

$$\sigma_x = -\sigma_y = \tau,$$

se tiene

$$\varepsilon_x = \frac{\tau(1+\mu)}{E}; \quad \varepsilon_y = -\frac{\tau(1+\mu)}{E}.$$

Como

$$Ob_1 = Ob \left[ 1 + \frac{\tau(1+\mu)}{E} \right]; \quad Oa_1 = Oa \left[ 1 - \frac{\tau(1+\mu)}{E} \right],$$

mediante el triángulo rectángulo  $Oa_1b_1$  se obtiene

$$\operatorname{tg} Oa_1b_1 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{Ob_1}{Oa_1} = \frac{1 + \frac{\tau(1+\mu)}{E}}{1 - \frac{\tau(1+\mu)}{E}}. \quad (b)$$

Para un ángulo pequeño como  $\gamma$  puede ponerse

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Sustituyendo en la ecuación (a), se obtiene

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau(1+\mu)}{E},$$

y usando la notación

$$\frac{E}{2(1+\mu)} = G, \quad (39)$$

resulta

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (40)$$

Se ve que la deformación o distorsión angular es proporcional a la fatiga cortante e inversamente proporcional a la cantidad  $G$ , que depende de las propiedades elásticas del material y se llama módulo de elasticidad transversal o módulo de esfuerzo cortante. Puede calcularse por la ecuación (39), en cuanto se conozcan  $E$  y  $\mu$ . Para el acero,

$$G = \frac{2 \times 10^6}{2(1+0,3)} = 0,77 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2$$

El estado elástico de fatiga cortante pura se produce corrientemente en la torsión de un tubo circular (fig. 43). Debido a la

pequeña rotación de un extremo del tubo respecto al otro, las generatrices trazadas sobre la superficie cilíndrica se inclinan respecto al eje del cilindro, y un elemento  $abcd$ , formado por dos generatrices y dos secciones rectas adyacentes, experimenta una distorsión análoga a la expuesta en la figura 42.

El problema de la torsión se verá más adelante (capítulo IX) y mostraremos cómo puede determinarse la fatiga cortante  $\tau$  y la distorsión  $\gamma$  del elemento  $abcd$ , si se miden o conocen el momento torsor y el ángulo de torsión correspondiente. Encontrados  $\tau$  y  $\gamma$  por el ensayo de torsión, puede calcularse el módulo  $G$  mediante su cociente. Con este valor de  $G$  y conocido  $E$  por un ensayo a tracción, se calcula fácilmente el coeficiente de Poisson  $\mu$  mediante la expresión (39). La determinación directa de  $\mu$ , midiendo la contracción lateral durante el ensayo a tracción, es más difícil, puesto que dada su pequeñez se necesitan aparatos de gran precisión.

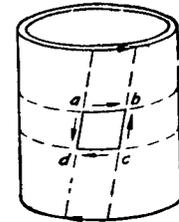


FIG. 43

#### Problemas

1. El bloque  $abcd$  de la figura 42 está hecho de un material para el que  $E = 8 \times 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $\mu = 0,25$ . Hallar  $\gamma$  y el alargamiento unitario de la diagonal  $bd$  si  $\tau = 800$  kg./cm.<sup>2</sup>.
2. Hallar en el problema anterior el corrimiento  $aa_1$  de la cara  $ab$  respecto a la  $cd$  si la diagonal  $bd = 5$  cm.
3. Probar que el cambio de volumen del bloque  $abcd$  de la figura 42 es nulo si se consideran despreciables las potencias de orden superior al primero de las componentes de la deformación  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$ .

× 17. **Fatigas de trabajo por cortadura.**—Sometiendo un material a fatiga cortante pura puede establecerse la relación existente entre fatiga cortante y distorsión unitaria. Esta relación se da usualmente en forma de diagrama (figura 44). Las abscisas representan las distorsiones y las ordenadas las fatigas cortantes. El diagrama es análogo al del ensayo a tracción y puede señalarse en él el límite de proporcionalidad  $A$  y el punto

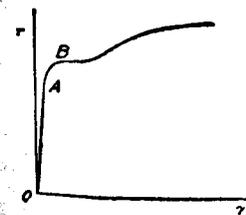


FIG. 44

de rotura  $B$ . El diagrama es análogo al del ensayo a tracción y puede señalarse en él el límite de proporcionalidad  $A$  y el punto

de fluencia <sup>1</sup> B. Los ensayos muestran que para un material como el acero corriente el punto de fluencia por cortadura  $\tau_{Fl}$  vale de 0,55 a 0,60 de  $\sigma_{Fl}$ . Puesto que en el punto de fluencia se presenta una distorsión considerable, sin incremento de la fatiga cortante, es lógico tomar como fatiga cortante de trabajo solamente una fracción de la fatiga cortante de fluencia, de modo que

$$\tau_t = \frac{\tau_{Fl}}{n} \quad (41)$$

donde  $n$  es el coeficiente de seguridad. Tomando este coeficiente del mismo orden que en el caso de extensión o compresión, se tiene

$$\tau_t = 0,55 \text{ a } 0,60 \sigma_t$$

lo que indica que la fatiga de trabajo por cortadura deberá ser mucho menor que la fatiga de trabajo a extensión.

Se comprende fácilmente que en las aplicaciones prácticas no se encuentre la distribución uniforme de fatiga cortante supuesta para el bloque de la figura 42. Más adelante veremos que

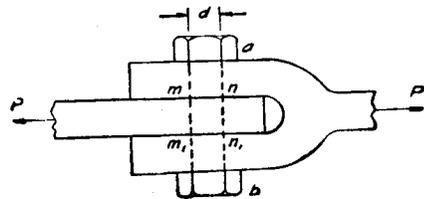


FIG. 45

la fatiga cortante pura se presenta no solamente en la torsión sino también en la flexión de vigas. Sin embargo, muchos casos prácticos se resuelven suponiendo la distribución uniforme de fatigas, aunque solamente sea una grosera aproximación. Sea, por ejemplo, el caso del empalme de la figura 45. Es evidente que si el diámetro del perno  $ab$  no es suficiente el empalme puede fallar, debido a cortadura por las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$ . Un es-

<sup>1</sup> Para obtener un punto de fluencia bien marcado se emplean probetas tubulares en los ensayos a torsión.

tudio a fondo del problema muestra que las fatigas cortantes no se distribuyen de modo uniforme sobre dichas secciones y que el perno experimenta no sólo cortadura, sino también flexión bajo la acción de las fuerzas extensoras  $P$ . De modo grosero, el diámetro suficiente para el perno se obtiene suponiendo en dichos planos  $mn$  y  $m_1n_1$  una distribución uniforme de fatigas cortantes  $\tau$ , cuyo valor se obtiene dividiendo la fuerza  $P$  por la suma de las áreas de dichas secciones  $mn$  y  $m_1n_1$ . Por consiguiente,

$$\tau = \frac{2P}{\pi d^2},$$

y el diámetro necesario para el perno se obtiene de la ecuación

$$\tau_t = \frac{2P}{\pi d^2} \quad (42)$$

Otro caso simple de aplicación de este método elemental es el de problemas de cortadura en juntas roblonadas (fig. 46).

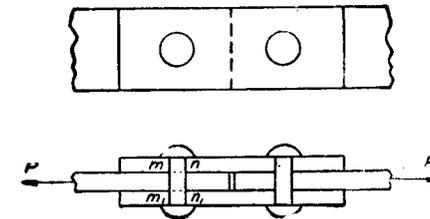


FIG. 46

Como las cabezas de los roblones se forman a altas temperaturas, los roblones producen al enfriarse una gran compresión sobre las planchas <sup>1</sup>. Al aplicar las fuerzas extensoras  $P$ , el movimiento relativo entre las planchas está impedido por el rozamiento debido a la presión anteriormente indicada entre planchas. Solamente después de vencido este rozamiento empiezan a trabajar por cortadura los roblones, y si su diámetro no es suficiente, puede presentarse una rotura por cortadura a lo lar-

<sup>1</sup> Experimentalmente se ha visto que las fatigas de extensión en los roblones son del orden de la fatiga de fluencia del material con que están hechos. Véase C. Bach, *Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing.* 1912.

go de los planos  $mn$  y  $m_1n_1$ . Se ve, por consiguiente, que el estudio minucioso del problema de las juntas roblonadas es muy complicado. El problema se resuelve corrientemente de un modo grosero despreciando el rozamiento y suponiendo que las fatigas cortantes se distribuyen uniformemente a lo largo de las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$ . Se obtiene, por consiguiente, el diámetro suficiente de los roblones utilizando la misma ecuación (42) del ejemplo anterior.

**Problemas**

1. Determinar el diámetro del perno del empalme de la figura 45 si  $P = 5.000$  kg. y  $\tau_t = 480$  kg./cm.<sup>2</sup>.
2. Hallar la longitud de seguridad  $2l$  del enlace de las dos piezas de madera de la figura 47 sometido a extensión, si  $P = 5.000$  kg.,  $\tau_t = 8$

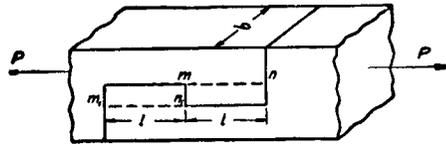


FIG. 47

kg./cm.<sup>2</sup> para cortadura paralela a las fibras y  $b = 25$  cm. Determinar la altura apropiada del retallo  $mn_1$  si el límite de seguridad para las fatigas de compresión local a lo largo de las fibras de la madera es  $64$  kg./cm.<sup>2</sup>.

3. Hallar el diámetro de los roblones de la figura 46 si  $\tau_t = 640$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $P = 4.000$  kg.

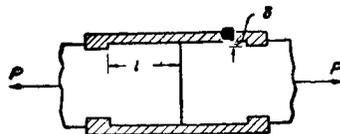


FIG. 48

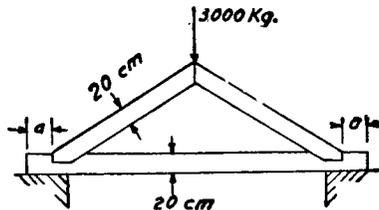


FIG. 49

4. Determinar las dimensiones  $l$  y  $\delta$  en el enlace de dos barras rectangulares por planchas de acero (fig. 48), si las fuerzas, las dimensiones y las fatigas de trabajo son las mismas que en el problema 2.

5. Determinar la distancia  $a$  necesaria en la estructura de la figura 49 si la fatiga cortante de trabajo es la misma que en el proble-

ma 2 y las dimensiones de las secciones rectas de todas las barras son  $10 \times 20$  cm. Se desprecia el efecto del rozamiento.

18. **Tracción o compresión en tres direcciones perpendiculares.**—Si una barra de forma de paralelepípedo rectangular está sometida a la acción de fuerzas  $P_x, P_y$  y  $P_z$  (fig. 50), las tensiones normales a los ejes  $x, y$  y  $z$  son, respectivamente,

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_x}; \quad \sigma_y = \frac{P_y}{A_y}; \quad \sigma_z = \frac{P_z}{A_z}.$$

Se supone  $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$ .

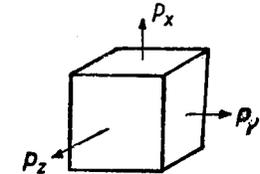


FIG. 50

Combinando los efectos de las fuerzas

$P_x, P_y$  y  $P_z$ , se deduce que sobre una sección cuyo plano pase por el eje  $z$  solamente producen fatigas las fuerzas  $P_x$  y  $P_y$ , y también que estas fatigas pueden calcularse por las ecuaciones (26) y (27) y representarse gráficamente usando el círculo de Mohr. En la figura 51 el círculo de diámetro  $AB$  representa estas fatigas. De la misma manera, las fatigas ligadas a una sección que pase por el eje  $x$  pueden representarse por el círculo cuyo diámetro es

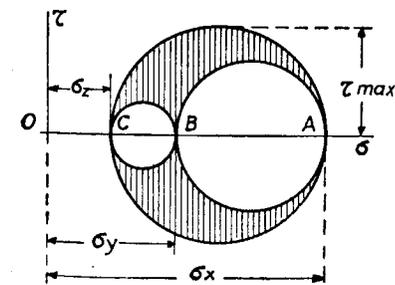


FIG. 51

$BC$ . El círculo de diámetro  $AC$  representa las fatigas afectas a secciones producidas a través del eje  $y$ . Los tres círculos de Mohr representan las fatigas para las tres series de secciones a través de los ejes  $x, y$  y  $z$ . Para otra sección inclinada respecto a los ejes  $x, y$  y  $z$ , las componentes normal y cortante de la fatiga son las coordenadas de un punto situado en el área rayada de la figura 51<sup>1</sup>.

Sentado esto, se deduce que el máximo esfuerzo cortante estará representado por el radio del mayor de los tres círculos y vendrá dado por la ecuación

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}.$$

<sup>1</sup> La demostración de esta propiedad puede verse en el libro de A. Föppl, *Technische Mechanik*, vol. V, pág. 18, 1918. Véase también H. M. Westergaard, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. IV, pág. 520, 1924.

Tiene lugar para la sección que pasando por el eje de las  $y$  biseca el ángulo de los ejes  $x$  y  $z$ .

Las ecuaciones para el cálculo de las deformaciones unitarias en las direcciones de los ejes pueden obtenerse combinando los efectos de  $P_x$ ,  $P_y$  y  $P_z$  del mismo modo que se ha hecho para el caso de tracción o compresión en dos direcciones perpendiculares (véase artículo 15). De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z), \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).\end{aligned}\quad (43)$$

El volumen de la barra aumenta en la relación

$$(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) : 1,$$

o despreciando cantidades de orden superior

$$(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) : 1,$$

de donde la dilatación cúbica unitaria es

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (44)$$

La relación entre la dilatación cúbica unitaria y las fatigas que actúan en las caras de la barra puede obtenerse sumando las ecuaciones (43).

De este modo se obtiene

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (45)$$

En el caso particular de presión hidrostática uniforme se tiene

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Las ecuaciones (43) dan

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{P}{E}(1-2\mu), \quad (46)$$

y la ecuación (44),

$$\Delta = -\frac{3(1-2\mu)}{E}p. \quad (47)$$

Usando la notación

$$\frac{E}{3(1-2\mu)} = K, \quad (48)$$

se obtiene

$$\Delta = -\frac{p}{K}. \quad (49)$$

La dilatación cúbica es proporcional a la fatiga de compresión  $p$  e inversamente proporcional a la cantidad  $K$ , a la cual se conoce con el nombre de módulo de elasticidad de volumen o módulo volumétrico.

### Problemas

1. Determinar la disminución de volumen de una esfera maciza de acero de 25 cm. de diámetro sometida a una presión hidrostática  $p = 700 \text{ kg./cm.}^2$

Solución: De la ecuación (49),

$$\Delta = -\frac{p}{K} = -\frac{700 \times 3(1-2 \times 0.3)}{2 \times 10^6} = -\frac{4,2}{10^4}$$

La disminución de volumen es, por tanto,

$$\frac{4,2}{10^4} \times \frac{\pi d^3}{6} = 3,43 \text{ cm.}^3$$

2. En la figura 52 un cilindro de goma  $A$  está comprimido dentro de un cilindro de acero  $B$  por una fuerza  $P$ . Determinar la presión entre la goma y el acero si  $P = 500 \text{ kg.}$ ;  $d = 5 \text{ cm.}$ , el módulo de Poisson para la goma  $\mu = 0.45$ . Se desprecia el rozamiento entre la goma y el acero.

Solución: Sea  $p$  la fatiga de compresión en cualquier sección normal al eje del cilindro y  $q$  la presión entre la goma y la superficie interna del cilindro de acero. Fatigas de compresión del mismo valor  $q$  actuarán entre las superficies laterales de las fibras longitudinales del cilindro de goma, del que hemos aislado un elemento de forma de paralelepípedo rectangular con caras paralelas al eje del cilindro (véase figura 52). Este elemento está en equilibrio bajo la acción de la fatiga de compresión axial  $p$  y las fatigas  $q$ . Suponiendo que el cilindro de acero es absolutamente rígido, el alargamiento interno de la goma

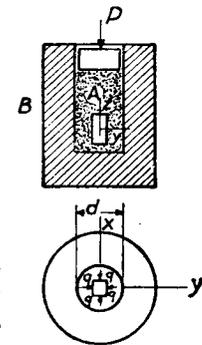


FIG. 52

en las direcciones  $x$  e  $y$  deberá ser nulo, y por las ecuaciones (43) se obtiene

$$0 = \frac{q}{E} - \frac{\mu}{E} (p + q)$$

de donde

$$q = \frac{\mu p}{1 - \mu} = \frac{0,45}{1 - 0,45} \frac{500 \times 4}{\pi \times 5^2} = 20,8 \text{ kg./cm.}^2$$

3. Una columna de hormigón está encofrada en un tubo de acero (figura 53). Determinar la presión entre el acero y el hormigón y la fatiga de extensión transversal en el tubo, suponiendo que no hay rozamiento entre hormigón y acero y que todas las dimensiones y la fatiga de compresión en la columna de hormigón son conocidas (fig. 53).

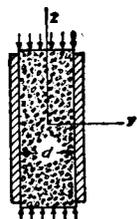


Fig. 53

*Solución:* Sean  $p$  y  $q$  las fatigas longitudinal y lateral de compresión, respectivamente;  $d$  el diámetro interior del tubo de acero,  $h$  su espesor,  $E_a$  el módulo de elasticidad del acero,  $E_h$  y  $\mu_h$  los módulos de elasticidad y de Poisson del hormigón. El alargamiento unitario del hormigón en una dirección lateral, teniendo en cuenta la ecuación (43), será

$$\epsilon_x = -\frac{q}{E_h} + \frac{\mu_h}{E_h} (p + q). \quad (a)$$

Este alargamiento será igual al alargamiento circunferencial unitario del tubo de acero (véase ecuación 13).

$$\epsilon = \frac{qd}{2hE_a}. \quad (b)$$

Con las ecuaciones (a) y (b) se obtiene

$$\frac{qd}{2hE_a} = -\frac{q}{E_h} + \frac{\mu_h}{E_h} (p + q),$$

de donde

$$q = p \cdot \frac{\frac{\mu_h d}{2hE_a} + 1 - \mu_h}{\frac{d}{E_h} + 1 - \mu_h}.$$

La fatiga lateral de extensión en el tubo se calculará ahora por la ecuación

$$\sigma = \frac{qd}{2h}.$$

4. Determinar la fatiga cortante máxima en la columna de hormigón del problema anterior, suponiendo que  $p = 70 \text{ kg./cm.}^2$ ;  $\mu_h = 0,10$ ;  $\frac{d}{2h} = 7,5$ .

*Solución:*

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{p - q}{2} = \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{0,1}{1,95} \right) = 33,2 \text{ kg./cm.}^2$$

## CAPITULO III

### FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

19. Tipos de vigas.—En este capítulo vamos a analizar los tipos sencillos de vigas que muestra la figura 54. La figura 54 (a) representa una viga con los extremos apoyados. Los puntos de apoyo  $A$  y  $B$  están articulados y, por tanto, los extremos de la viga pueden girar libremente durante la flexión. Se supone también que uno de ellos está montado sobre rodillos y puede moverse libremente en dirección horizontal. La figura 54 (b) representa un voladizo o ménsula. El extremo  $A$  de esta viga está empotrado en la pared y no puede girar durante la flexión, mientras que el extremo  $B$  está completamente libre. La figura 54 (c) representa una viga apoyada con voladizo. Esta viga tiene el apoyo  $A$  en forma de articulación fija y el  $C$  es una articulación móvil.

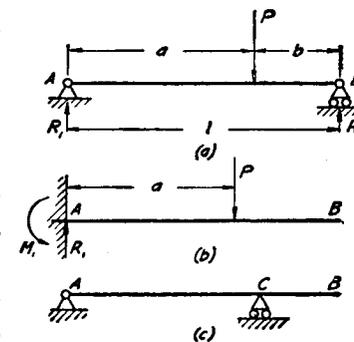


Fig. 54

Los tres casos representan vigas estáticamente determinadas, puesto que las reacciones en los apoyos correspondientes a cualquier caso de carga pueden determinarse por las ecuaciones de la estática. Sea, por ejemplo, la viga apoyada solicitada por una carga vertical  $P$ —fig. 54 (a)—. La reacción  $R_2$  en  $B$  debe ser vertical, puesto que este apoyo puede moverse libremente de modo horizontal. De la ecuación de la estática,  $\Sigma X = 0$ , se deduce que la reacción  $R_1$  es también vertical. Los valores de  $R_1$  y  $R_2$  se determinan por las ecuacio-

nes de momentos. Igualando a cero la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al punto *B*, se obtiene

$$R_1 l - Pb = 0$$

de donde

$$R_1 = \frac{Pb}{l}$$

De modo análogo, tomando momentos respecto al punto *A* se obtiene

$$R_2 = \frac{Pa}{l}$$

Las reacciones en el caso de una viga apoyada con voladizos —fig. 54 (c)— se calculan de igual modo.

En el caso de una ménsula —fig. 54 (b)— la carga *P* se equilibra por los elementos de reacción que actúan en el extremo empotrado. De las ecuaciones de la estática  $\Sigma X = 0$  y  $\Sigma Y = 0$ , se deduce que la resultante de las fuerzas de reacción debe ser vertical e igual a *P*. De la ecuación de momentos  $\Sigma M = 0$  se sigue que el momento  $M_1$  de las fuerzas de reacción respecto a *A* debe ser igual a *Pa* y actuar, tal como indica la figura, en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Las reacciones producidas por otro tipo de cargas sobre los tipos anteriores de vigas pueden calcularse por procedimiento análogo.

Debe significarse que solamente en el caso de vigas de gran luz, tales como las que se emplean en puentes, se adoptan disposiciones especiales que permitan la libre rotación de los extremos y el libre desplazamiento del apoyo móvil. En los casos corrientes, de luces pequeñas las condiciones de los apoyos son las representadas en la figura 55

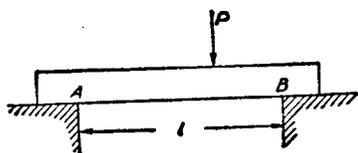


Fig. 55

Durante la flexión de vigas tales, las fuerzas de rozamiento entre las superficies de apoyo y la viga se oponen a la rotación y movimiento horizontal de los extremos de la viga. Estas fuerzas pueden tener importancia práctica en el caso de vigas poco rígidas y en el de pletinas (véase pág. 171); pero para una viga rígida

da cuya deformación es muy pequeña comparada con su luz *l*, estas fuerzas pueden despreciarse y calcular las reacciones como en la viga simplemente apoyada —fig. 54 (a).

20. **Momento flector y fuerza cortante.**—Consideremos ahora una viga simplemente apoyada sobre la que actúan fuerzas verticales  $P_1, P_2$  y  $P_3$  —fig. 56 (a)—. Supondremos que la viga tiene un plano axial de simetría y que las cargas actúan en este

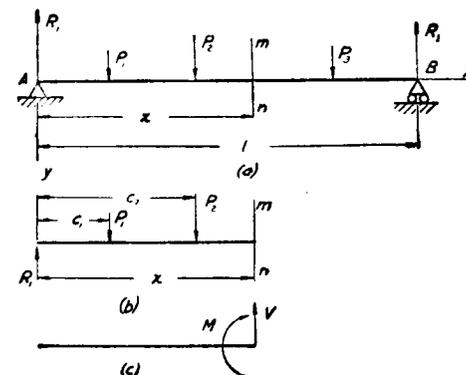


FIG. 56

plano. Por esto, y debido a la simetría, deducimos que la flexión acontece también en este plano. En la mayoría de los casos prácticos se cumple esta condición de simetría, puesto que las secciones más usuales, circular, rectangular, I o T, lo son. El caso general, de sección asimétrica, se analizará más adelante (véase página 89).

Para investigar las fatigas producidas en una viga durante la flexión, se procede de modo análogo a lo realizado en el caso de una barra sometida a extensión (fig. 1). Supongamos que la viga *AB* se divide en dos trozos por una sección recta *mn* situada a la distancia *x* del apoyo izquierdo *A* —fig. 56 (a)— y que se prescinde del trozo situado a la derecha de la sección. Para analizar el equilibrio del trozo de la viga que conservamos —figura 56 (b)—, debemos considerar no solamente las fuerzas externas tales como las cargas  $P_1, P_2$  y la reacción  $R_1$ , sino también las fuerzas internas distribuidas sobre la sección *mn* y que representan la acción del trozo de la viga a la derecha de la sección.

ción sobre el trozo de la izquierda. Estas fuerzas internas deben ser tales que equilibren a las fuerzas exteriores anteriormente mencionadas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $R_1$ .

Todas estas fuerzas exteriores, por las condiciones de la estática, pueden sustituirse por una fuerza vertical  $V$  que obra en el plano de la sección  $mn$  y por el par  $M$ . El valor de la fuerza es

$$V = R_1 - P_1 - P_2, \quad (a)$$

y el valor del par es

$$M = R_1x - P_1(x - c_1) - P_2(x - c_2). \quad (b)$$

La fuerza  $V$  es igual a la suma algebraica de las fuerzas externas situadas a la izquierda de la sección  $mn$  y se denomina fuerza cortante en la sección recta  $mn$ . El par  $M$  es igual a la suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores situadas a la izquierda de la sección  $mn$  con relación al c. de g. de esta sección y se denomina momento flector en la sección recta  $mn$  —fig. 56 (c)—. Las fatigas distribuidas sobre la sección  $mn$  y que representan la acción del trozo derecho de la viga sobre la porción izquierda, deben, por tanto, equilibrar el momento flector  $M$  y la fuerza cortante  $V$ .

Si sobre la viga actúa una carga distribuida en lugar de varias concentradas, se puede utilizar el mismo razonamiento. Sea, por ejemplo, la viga de la figura 57 (a) cargada de modo uniforme. Representando la intensidad de la carga o carga por unidad de longitud por  $q$ , las reacciones serán

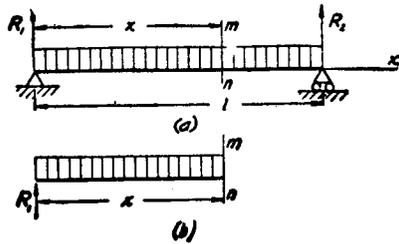


Fig. 57

$$R_1 = R_2 = \frac{ql}{2}.$$

Para investigar la distribución de fatigas sobre una sección  $mn$ , consideraremos

nuevamente el equilibrio del trozo izquierdo de la viga —figura 57 (b)—. Las fuerzas exteriores que actúan sobre esa porción de la viga son la reacción  $R_1$  y la carga uniformemente distribuida a lo largo de la longitud  $x$ . Esta última carga tiene una resultante igual a  $qx$ . La suma algebraica de todas las fuerzas a

la izquierda de la sección  $mn$  es, por consiguiente,  $R_1 - qx$ . La suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas situadas a la izquierda de la sección  $mn$  con relación a su c. de g. se obtiene restando del momento  $R_1x$  de la reacción el momento de la resultante de la carga distribuida.

El momento de la carga distribuida es evidentemente igual a

$$qx \times \frac{x}{2} = \frac{qx^2}{2}.$$

Por consiguiente, la suma algebraica de los momentos será:

$$R_1x - \frac{qx^2}{2}.$$

Todas las fuerzas que obran sobre el trozo izquierdo de la viga pueden reemplazarse por una fuerza que obra en el plano de la sección  $mn$  igual a

$$V = R_1 - qx = q \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad (c)$$

unida a un par igual a

$$M = R_1x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2} (l - x). \quad (d)$$

Las expresiones (c) y (d) representan, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flector en la sección  $mn$ . En los ejemplos anteriores hemos considerado el equilibrio del trozo de la viga situado a la izquierda de la sección considerada. Si en lugar del trozo izquierdo se conserva el derecho, la suma algebraica de las fuerzas a la derecha de la sección y la suma algebraica de los momentos de estas fuerzas tendrán los mismos valores  $V$  y  $M$  que anteriormente, pero serán de sentido opuesto. Esto es debido a que las cargas que obran sobre una viga junto con las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  representan un sistema de fuerzas en equilibrio y, por tanto, su suma algebraica y la de sus momentos con relación a cualquier punto de su plano debe ser nula. Por consiguiente, el momento de las fuerzas que actúan sobre el trozo izquierdo de la viga con relación al c. de g. de la sección recta  $mn$  debe ser igual y opuesto al momento con relación al mismo punto de las fuerzas que obran sobre el trozo de la viga situado a la derecha de la sección. También la suma algebraica

de las fuerzas que actúan sobre el trozo izquierdo debe ser igual y opuesta a la suma algébrica de las fuerzas que actúan sobre el trozo derecho.

En lo que sigue, el momento flector y la fuerza cortante en una sección recta  $mn$  se tomarán positivos si considerando el tro-

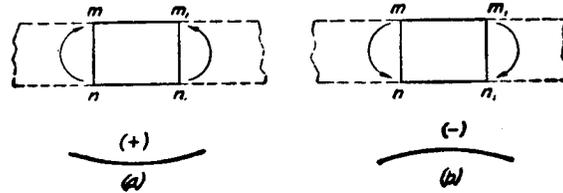


FIG. 58

zo de viga a la izquierda de la sección las direcciones obtenidas son las de la figura 57 (c). Para materializar esta regla del signo del momento flector, aislemos un elemento de la viga por dos secciones adyacentes  $mn$ ,  $m_1n_1$  (fig. 58). Si el momento flector en estas secciones es positivo, las fuerzas a la izquierda de la sección  $mn$  dan un momento en el sentido de las agujas del reloj y las fuerzas a la derecha de la sección  $m_1n_1$  un momento en sentido contrario al de las agujas del reloj, tal como indica la figura 58 (a). Por este sentido de los momentos, al flexarse la

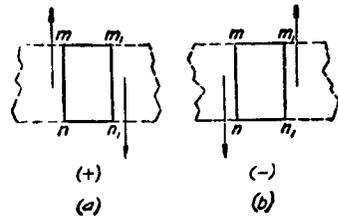


FIG. 59

viga, resulta convexa por debajo. Si los momentos flectores en las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$  son negativos, la convexidad se produce hacia arriba, tal como indica la figura 58 (b). Por consiguiente, en aquellos trozos de una viga para los que el momento flector es positivo, la elástica o curva de flexión es convexa hacia

abajo, mientras que en los trozos donde el momento flector es negativo dicha elástica es convexa hacia arriba.

La regla de los signos para fuerzas cortantes se materializa en la figura 59.

21. Relación entre el momento flector y la fuerza cortante.— Consideremos un elemento de una viga separado por dos secciones adyacentes  $mn$  y  $m_1n_1$  separadas una distancia  $dx$  (figu-

ra 60). Suponiendo positivos el momento flector y la fuerza cortante en la sección  $mn$ , la acción del trozo izquierdo de la viga sobre el elemento está representado por la fuerza  $V$  y el par  $M$ , tal como indica la figura 60 (a). Del mismo modo, suponiendo que en la sección  $m_1n_1$  son también positivos el momento flec-

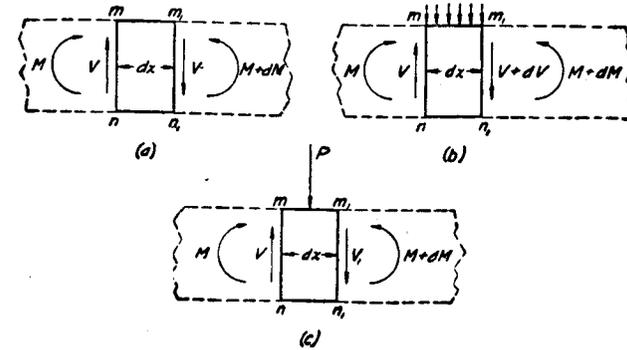


FIG. 60

tor y la fuerza cortante, la acción del trozo derecho de la viga sobre el elemento está representado por el par y la fuerza indicados. Si no actúan fuerzas sobre la viga entre las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$  —fig. 60 (a)—, las fuerzas cortantes en las dos secciones son iguales <sup>1</sup>.

Examinando los momentos flectores, se ve que para el equilibrio del elemento es preciso que los momentos flectores no sean iguales y que el incremento  $dM$  del momento flector iguale al par que representan las dos fuerzas opuestas  $V$ ; es decir,

$$dM = Vdx$$

y

$$\frac{dM}{dx} = V. \tag{50}$$

Por consiguiente, para trozos de una viga entre cargas la fuerza cortante es la derivada del momento flector respecto de  $x$ .

Consideremos ahora el caso en que una carga distribuida de intensidad  $q$  actúa entre las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$  —fig. 60 (b).

<sup>1</sup> El peso del elemento de la viga se desprecia en este análisis.

La carga total que actúa sobre el elemento es  $qdx$ . Si consideramos positiva  $q$  cuando la carga actúa hacia abajo, del equilibrio del elemento se deduce que la fuerza cortante en la sección  $m_1n_1$  difiere de la existente en  $mn$  en la cantidad

$$dV = -qdx,$$

de donde se deduce que

$$\frac{dV}{dx} = -q. \quad (51)$$

Por consiguiente, la derivada de la fuerza cortante respecto a  $x$  es igual a la intensidad de la carga con signo negativo.

Tomando el momento de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento se obtiene

$$dM = Vdx - qdx \times \frac{dx}{2}.$$

Despreciando el segundo término del segundo miembro, por ser una cantidad de segundo orden, se obtiene de nuevo la ecuación (50) y se deduce que también en el caso de carga distribuida la fuerza cortante es la derivada del momento flector respecto a  $x$ .

Si entre las secciones adyacentes  $mn$  y  $m_1n_1$  actúa una carga concentrada  $P$  —fig. 60 (c)—, se presentará un salto brusco en el valor de la fuerza cortante. Sea  $V$  la fuerza cortante en la sección  $mn$  y  $V_1$  la correspondiente a la sección  $m_1n_1$ .

Del equilibrio del elemento  $mm_1n_1n$ , se deduce

$$V_1 = V - P.$$

Por consiguiente, el valor de la fuerza cortante varía en la cantidad  $P$  al pasar por el punto de aplicación de la carga. De la ecuación (50) se deduce que en el punto de aplicación de una carga concentrada se presenta un salto brusco en el valor de la derivada

$$\frac{dM}{dx}$$

**22. Diagramas del momento flector y de la fuerza cortante.**—En el artículo anterior se ha visto que las fatigas que actúan sobre una sección  $mn$  de una viga equilibran el momento flector  $M$  y la fuerza cortante  $V$  correspondientes a dicha sec-

ción. Por tanto, de estos valores dependen los de las fatigas. Para simplificar el estudio de las fatigas en una viga es conveniente representar de modo gráfico la variación del momento flector y de la fuerza cortante a lo largo del eje de la viga. En esta representación las abscisas indican la posición de la sección y las ordenadas los valores del momento flector y de la fuerza cortante, respectivamente, que actúan sobre la sección, tomán-

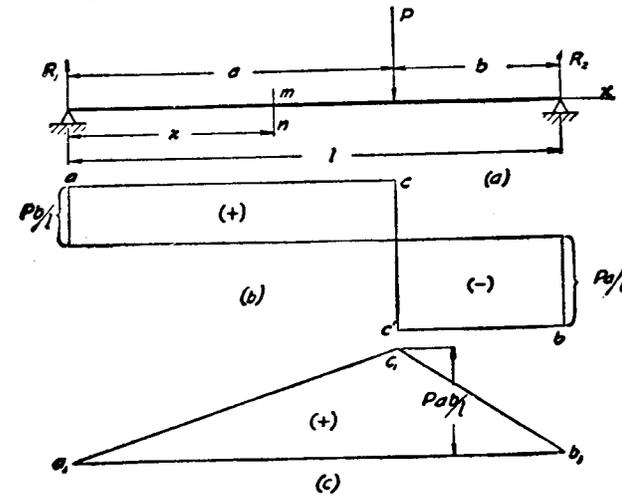


FIG. 61

dose los valores positivos sobre el eje horizontal y los negativos por debajo. Estas representaciones gráficas se denominan diagramas del momento flector y de la fuerza cortante, respectivamente. Consideremos, por ejemplo, una viga simplemente apoyada solicitada por una carga aislada  $P$  (fig. 61)<sup>1</sup>. Las reacciones en este caso son

$$R_1 = \frac{Pb}{l} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{Pa}{l}.$$

Tomando una sección  $mn$  a la izquierda de  $P$ , se deduce que para ella

$$V = \frac{Pb}{l} \quad \text{y} \quad M = \frac{Pb}{l} x. \quad (a)$$

<sup>1</sup> Por sencillez se omiten los rodillos en los apoyos móviles de esta figura y siguientes.

La fuerza cortante y el momento flector tienen el mismo sentido que los de las figuras 58 (a) y 59 (a) y son, por consiguiente, positivos. Se ve que la fuerza cortante permanece constante a lo largo del trozo de viga situado a la izquierda de la carga y que el momento flector varía proporcionalmente a  $x$ . Para  $x = 0$ , el momento es nulo, y para  $x = a$ , es decir, para la sección de aplicación de la carga, el momento vale  $\frac{Pab}{l}$ . Los trozos correspondientes de los diagramas de fuerza cortante y momento flector se ven en las figuras 61 (b) y 61 (c) respectivamente, y son las líneas  $ac$  y  $a_1c_1$ . Para una sección situada a la derecha de la carga, se tiene

$$V = \frac{Pb}{l} - P = -\frac{Pa}{l} \quad \text{y} \quad M = \frac{Pb}{l}x - P(x-a), \quad (b)$$

donde  $x$  es siempre la distancia al extremo izquierdo de la viga. La fuerza cortante para este trozo de la viga permanece constante y negativa. En la figura 61 (b) esta fuerza está representada por la línea  $c'b$  paralela al eje  $x$ . El momento flector es una función lineal de  $x$  que para  $x = a$  vale  $\frac{Pab}{l}$  y que para  $x = l$  es nula. Es siempre positivo y su variación a lo largo de la parte de viga a la derecha de la carga está representada por la línea recta  $c_1b_1$ . Las líneas quebradas  $acc'b$  y  $a_1c_1b_1$  de las figuras 61 (b) y 61 (c) representan, respectivamente, los diagramas de fuerza cortante y momento flector para toda la longitud de la viga.

En el punto de aplicación de la carga  $P$  se presenta un salto brusco en el valor de la fuerza cortante desde el positivo  $\frac{Pb}{l}$  al negativo  $-\frac{Pa}{l}$  y un cambio brusco en el coeficiente angular de la tangente al diagrama del momento flector.

Al deducir las expresiones (b) para la fuerza cortante y el momento flector, se ha considerado el trozo izquierdo de la viga sobre el que actúan dos fuerzas  $R_1$  y  $P$ . Más sencillo es en este caso considerar el trozo de la viga a la derecha de la sección sobre el que actúa únicamente la reacción  $\frac{Pa}{l}$ . Siguiendo es

procedimiento y utilizando la regla de los signos indicada en las figuras 58 y 59, se obtiene

$$V = -\frac{Pa}{l} \quad \text{y} \quad M = \frac{Pa}{l}(l-x). \quad (c)$$

Las expresiones (b) anteriormente obtenidas pueden también ponerse en esta forma, si se observa que  $a = l - b$ .

Es interesante notar que el diagrama de fuerza cortante se compone de dos rectángulos cuyas áreas son iguales.

Teniendo en cuenta el signo opuesto de dichas áreas, se deduce que el área total del diagrama de fuerza cortante es nula. Este resultado no es casual. Integrando (50), sale

$$\int_A^B dM = \int_A^B V dx, \quad (d)$$

donde los límites  $A$  y  $B$  indican que la integración se toma a lo largo de la longitud de la viga, desde el extremo  $A$  al extremo  $B$ . El segundo miembro de (d) representa el área total del diagrama de fuerza cortante. El primer miembro de la misma ecuación da, después de integrar, la diferencia  $M_B - M_A$  de los momentos flectores en los extremos  $B$  y  $A$ . En el caso de una viga simplemente apoyada, los momentos en los extremos son nulos y, por tanto, también el área total del diagrama de fuerza cortante. Si sobre la viga actúan varias cargas (fig. 62), se divide en varios trozos y las expresiones de  $V$  y  $M$  deben establecerse para cada uno de ellos. Midiendo  $x$  desde el extremo izquierdo de la viga y tomando  $x < a_1$ , se obtiene para el primer trozo de la viga

$$V = R_1 \quad \text{y} \quad M = R_1 x. \quad (e)$$

Para el segundo trozo de la viga, es decir, para  $a_1 < x < a_2$ , se obtiene

$$V = R_1 - P_1 \quad \text{y} \quad M = R_1 x - P_1(x - a_1). \quad (f)$$

Para el tercer trozo de la viga, es decir, para  $a_2 < x < a_3$ , es más sencillo considerar el trozo de la derecha que el de la izquierda. De este modo, sale

$$V = -(R_2 - P_3) \quad \text{y} \quad M = R_2(l-x) - P_3(l-x-b_3). \quad (g)$$

Finalmente, para el último trozo de la viga se tiene

$$V = -R_2, \quad M = R_2(l-x). \quad (h)$$

Por las expresiones (e) a (h) se ve que en cada trozo de la viga la fuerza cortante tiene la forma indicada en la figura 62 (b). El momento flector en cada trozo de la viga es una función lineal de  $x$ , y por ello el diagrama correspondiente está formado

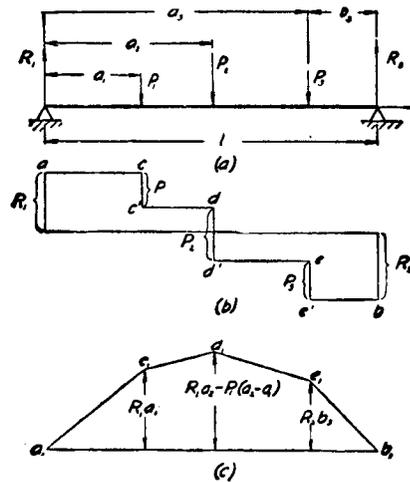


FIG. 62

por líneas rectas inclinadas. Para el trazado de estas líneas se ve que (e) y (h), para los extremos  $x = 0$  y  $x = l$ , dan valores nulos. Los momentos en los puntos de aplicación de las cargas se obtienen substituyendo en las expresiones (e), (f) y (h),  $x = a_1$ ,  $x = a_2$  y  $x = a_3$ , respectivamente. De este modo se obtienen para dichos momentos los valores

$$M = R_1 a_1, \quad M = R_1 a_2 - P_1(a_2 - a_1), \quad \text{y} \quad M = R_2 b_3.$$

Mediante estos valores puede trazarse fácilmente el diagrama de momentos flectores —fig. 62 (c).

En las aplicaciones es importante encontrar las secciones para las que el momento flector toma su valor máximo o mínimo. En el caso considerado (fig. 62), el momento flector máximo acontece bajo la carga  $P_2$ . A esta carga corresponde en

diagrama de momento flector el punto  $d_1$ , en el que la inclinación del diagrama cambia de signo. Según la ecuación (50), esta inclinación es igual a la fuerza cortante. Por consiguiente, el momento flector toma sus valores mínimos o máximos en las secciones para los que la fuerza cortante cambia de signo. Si, moviéndonos a lo largo del eje  $x$ , la fuerza cortante cambia de un

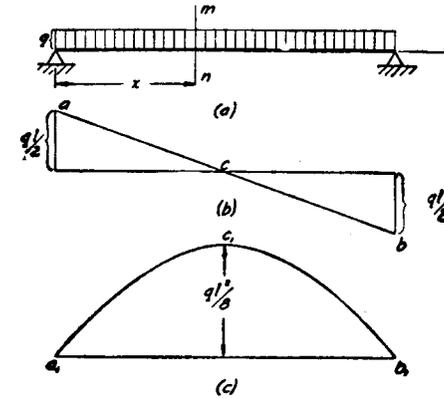


FIG. 63

valor positivo a otro negativo como en la sección de aplicación de la carga  $P_2$  (fig. 62), la pendiente en el diagrama de momento flector cambia también de positiva a negativa. De aquí se deduce que en esta sección se presenta el momento flector máximo. Si  $V$  cambia de negativa a positiva, indica que a la sección le corresponde un momento flector mínimo. En el caso general, el diagrama de fuerza cortante puede cortar al eje horizontal en varios puntos. A cada punto de intersección le corresponde un máximo o un mínimo en el diagrama del momento flector. Los valores numéricos de todos estos máximos y mínimos deben calcularse para encontrar el mayor de todos, numéricamente considerado.

Consideremos ahora el caso de una carga uniformemente distribuida (fig. 63). Por lo expuesto anteriormente (pág. 67), tenemos que para una sección a distancia  $x$  del apoyo izquierdo

$$V = q \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad \text{y} \quad M = \frac{qx}{2} (l - x). \quad (i)$$

Se ve que el diagrama de fuerza cortante consiste, en este caso,

en una línea recta inclinada, cuyas ordenadas para  $x = 0$  y  $x = l$  son  $\frac{ql}{2}$  y  $-\frac{ql}{2}$ , respectivamente —fig. 63 (b)—. De la expresión (i) se deduce que el diagrama del momento flector es en este caso una curva parabólica, cuyo eje es vertical y pasa por el centro del vano —fig. 63 (c)—. Los momentos en los apoyos, es decir, para  $x = 0$  y  $x = l$ , son nulos, y el valor máximo del momento acontece en el centro de la luz, allí donde la fuerza cortante cambia de signo. Este máximo se obtiene poniendo  $x = \frac{l}{2}$  en la expresión (i), lo que da

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

Si la carga uniforme cubre sólo una parte de la luz (fig. 64), podemos considerar tres trozos de la viga de longitudes  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

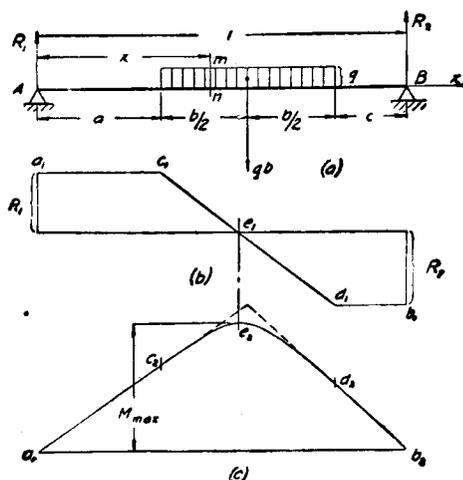


FIG. 64

Para la determinación de las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  substituiremos la carga uniformemente repartida por su resultante  $qb$ . De las ecuaciones de momentos de la estática, con relación a  $A$ , se obtiene

$$R_1 = \frac{qb}{l} \left( c + \frac{b}{2} \right) \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{qb}{l} \left( a + \frac{b}{2} \right).$$

La fuerza cortante y el momento flector para el trozo izquierdo de la viga ( $0 < x < a$ ) son

$$V = R_1 \quad \text{y} \quad M = R_1 x \quad (j)$$

Para una sección  $mn$ , tomada en el trozo cargado de la viga, la fuerza cortante se obtiene restando la carga  $q(x-a)$ , a la izquierda, de la reacción  $R_1$ . El momento flector en la misma sección se obtiene restando el momento de la carga a la izquierda de la sección, del momento de la reacción  $R_1$ . De esta forma encontramos

$$V = R_1 - q(x-a) \quad \text{y} \quad M = R_1 x - q(x-a) \times \frac{x-a}{2} \quad (k)$$

Para el trozo derecho de la viga, considerando las fuerzas a la derecha de la sección, se tiene

$$V = -R_2 \quad \text{y} \quad M = R_2(l-x). \quad (l)$$

Mediante las expresiones (j), (k) y (l) los diagramas de fuerza cortante y momento flector pueden construirse con facilidad. El diagrama de fuerza cortante —fig. 64 (b)— consta de los trozos horizontales  $a_1c_1$  y  $d_1b_1$ , correspondientes a las partes descargadas de la viga y de la línea inclinada  $c_1d_1$ , que se refiere al trozo cargado uniformemente. El diagrama del momento flector —figura 64 (c)— consta de las dos líneas inclinadas  $a_2c_2$  y  $b_2d_2$ , correspondientes a los trozos descargados y de la curva parabólica  $c_2d_2$ , de eje vertical, afecta a la parte cargada de la viga. El momento flector máximo se presenta en el punto  $e_2$ , correspondiente al  $e_1$ , donde la fuerza cortante cambia de signo. En los puntos  $c_2$  y  $d_2$  la parábola es tangente a las líneas inclinadas  $a_2c_2$  y  $d_2b_2$ , respectivamente. Ello se deduce del hecho de que en los puntos  $c_1$  y  $d_1$  del diagrama de fuerza cortante no existe cambio brusco en el valor de dicha fuerza cortante; por consiguiente, en virtud de la ecuación (50), no puede presentarse cambio brusco en el valor de la pendiente del diagrama del momento flector en los puntos correspondientes  $c_2$  y  $d_2$ .

En el caso de una ménsula (fig. 65) se emplea el mismo método para construir los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Midiendo  $x$  desde el extremo izquierdo de la viga, y

considerando el trozo a la izquierda de la carga  $P_2$  ( $0 < x < a$ ), se obtiene

$$V = -P_1 \quad \text{y} \quad M = -P_1x.$$

El signo menos de estas expresiones resulta de la regla de los signos indicados en las figuras 58 (b) y 59 (b). Para el trozo a la derecha de dicha carga ( $a < x < l$ ) se tiene

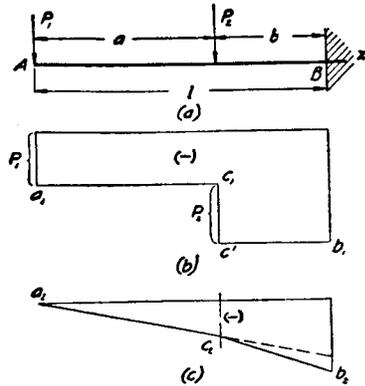


FIG. 65

$$V = -P_1 - P_2$$

$$\text{y} \quad M = -P_1x - P_2(x - a).$$

Los diagramas correspondientes de fuerza cortante y momento flector se ven en las figuras 65 (b) y 65 (c). El área total del diagrama de fuerza cortante no es nula en este caso y vale  $-P_1l - P_2b$ , que es lo que vale

el momento flector  $M$  en el extremo  $B$  de la viga. El diagrama del momento flector consta de las dos líneas inclinadas  $a_2c_2$  y  $c_2b_2$ , cuyas pendientes son iguales a los valores de la fuerza cortante en los trozos correspondientes de la ménsula. El momento flector máximo, en valor numérico, acontece en el extremo empotrado  $B$  de la viga.

Si una ménsula sufre una carga uniforme (fig. 66), la fuerza cortante y el momento flector, a la distancia  $x$  de su extremo izquierdo, son

$$V = -qx$$

y

$$M = -qx \times \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

El diagrama de fuerza cortante es la recta inclinada  $ab$ , y el del momento flector la parábola  $a_1b_1$ , de eje vertical y tangente al eje horizontal en  $a_1$ , punto en que la fuerza cor

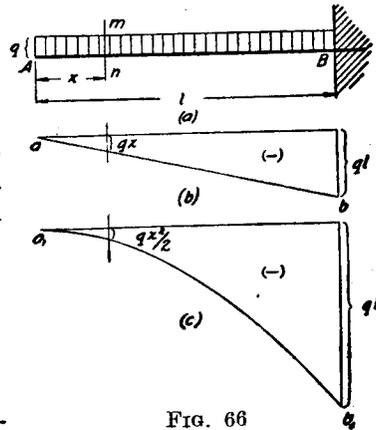


FIG. 66

es nula. El momento flector máximo en valor numérico, así como la fuerza cortante máxima, acontecen en el extremo  $B$  de la viga. Si sobre la viga actúan simultáneamente cargas concentradas y distribuidas, es conveniente dibujar por separado los diagramas correspondientes a cada clase de cargas, y obtener los valores totales de  $V$  o  $M$ , para cualquier sección, sumando las ordenadas correspondientes a los dos diagramas parciales. Si, por ejemplo, tenemos las cargas concentradas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  (figura 62) simultáneamente con una carga uniforme (fig. 63), el momento flector para cualquier sección se obtiene sumando las ordenadas correspondientes de los diagramas representados en las figuras 62 (c) y 63 (c).

Problemas

1. Dibujar, aproximadamente, a escala, los diagramas de fuerza cortante y momento flector correspondientes a las vigas de la figura 67. Acotar en dichos diagramas los valores máximos tanto positivos como negativos de la fuerza cortante y del momento flector.

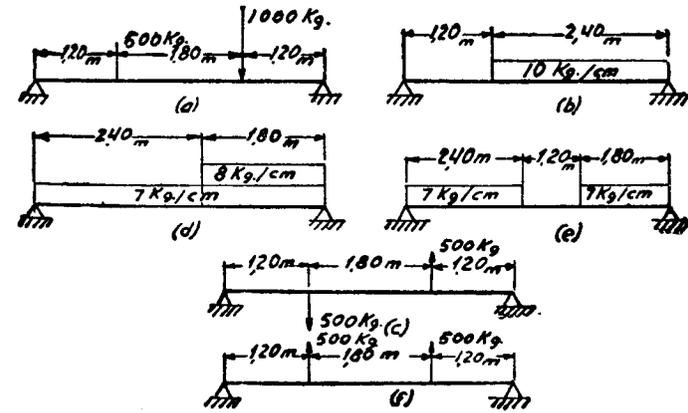


FIG. 67

2. Resolver las mismas cuestiones del problema anterior para las vigas de la figura 68.  
 3. Una ménsula solicitada por una carga total  $W$  distribuida de modo que aumente uniformemente desde cero, en el extremo izquierdo, del modo que indica la recta inclinada  $AC$  —fig. 69 (a)—, está empo-

trada en el extremo derecho. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

*Solución:* La fuerza cortante en la sección *mn* a distancia *x* del extremo izquierdo de la ménsula es numéricamente igual a la parte

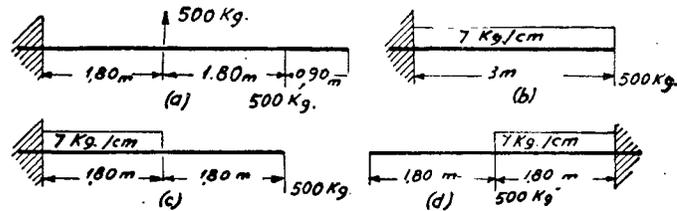


FIG. 68

de carga rayada. Puesto que la carga total vale *W* y está representada por el triángulo *ACB*, la parte rayada es  $\frac{Wx^2}{l^2}$ . Por la regla de los signos anteriormente adoptada (fig. 59), se obtiene

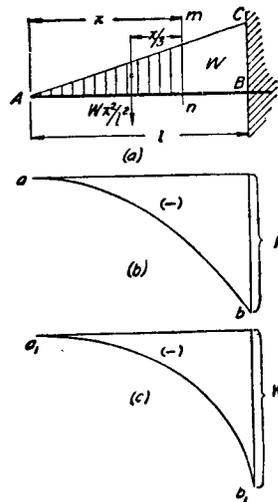


FIG. 69

El diagrama de fuerza cortante está representado en la figura 69 (b) por la parábola *ab* de eje vertical que pasa por el punto *a*. El momento flector en la sección *mn* se obtiene tomando el momento de la parte de carga rayada respecto al *C* de *G* de la sección *mn*. Por tanto,

$$V = -W \frac{x^2}{l^2}$$

$$M = -W \frac{x^2}{l^2} \times \frac{x}{3}$$

Este momento está representado por la curva *a<sub>1</sub>b<sub>1</sub>* en la figura 69 (c).

4. Una viga de longitud *l* apoyada uniformemente en toda su longitud soporta en los extremos dos cargas iguales *P* (fig. 70). Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

5. Una viga de longitud *l* apoyada uniformemente en toda su longitud soporta

en su centro una carga concentrada *P* = 500 kg. (fig. 71). Hallar momento flector máximo en valor numérico. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

6. Una viga simplemente apoyada de longitud *l* soporta una carga total *W* distribuida de modo que su intensidad crece, tal como indica

la figura 72 (a), desde cero, en el extremo izquierdo. Dibujar a escala los diagramas de fuerza cortante y momento flector si *W* = 6.000 kg. y *l* = 7,20 m.

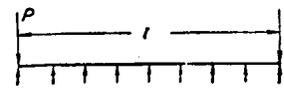


FIG. 70

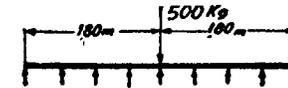


FIG. 71

*Solución:* Las reacciones en los apoyos son, en este caso,

$$R_1 = \frac{1}{3} W = 2.000 \text{ kg.} \quad \text{y} \quad R_2 = 4.000 \text{ kg.}$$

La fuerza cortante en la sección *mn* se obtiene restando la parte rayada de la carga de la reacción *R<sub>1</sub>*. Por tanto,

$$V = R_1 - W \frac{x^2}{l^2} = W \left( \frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

El diagrama de fuerza cortante es la curva parabólica *acb* de la figura 72 (b). El momento flector en la sección *mn* es

$$M = R_1 x - W \frac{x^2}{l^2} \times \frac{x}{3} = \frac{1}{3} W x \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

Este momento está representado por la curva *a<sub>1</sub>c<sub>1</sub>b<sub>1</sub>* de la figura 72 (c). El momento flector máximo acontece en *c<sub>1</sub>*, donde la fuerza cortante cambia de signo y donde  $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ .

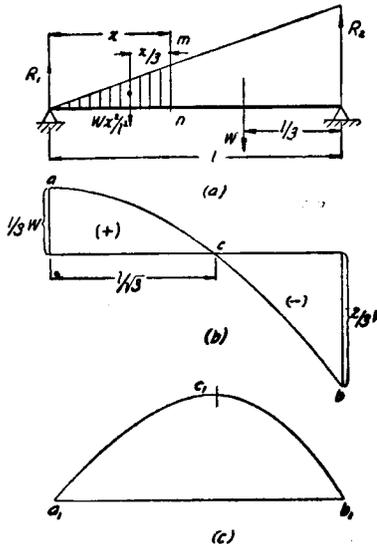


FIG. 72

7. Una viga simplemente apoyada *AB* soporta una carga distribuida, cuya intensidad está representada por la línea *ACB* (figura 73). Hallar las expresiones de la fuerza cortante y del momento flector en la sección *mn*.

*Solución:* Suponiendo a la carga total *W* aplicada en el *C* de *G* del triángulo *ACB*, las reacciones en los apoyos son:

$$R_1 = W \frac{l+b}{3l} \quad \text{y} \quad R_2 = W \frac{l+a}{3l}$$

La carga total se divide en dos partes representadas por los triángulos  $ACD$  y  $CBD$ , de valores  $\frac{Wa}{l}$  y  $\frac{Wb}{l}$ , respectivamente. La parte

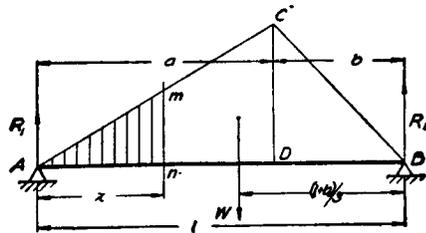


FIG. 73

yada de carga vale  $W \frac{a}{l} \times \frac{x^2}{a^2} = W \frac{x^2}{al}$ . La fuerza cortante y el momento flector en  $mn$  serán, por consiguiente,

$$V = R_1 - W \frac{x^2}{al} \quad \text{y} \quad M = R_1 x - W \frac{x^3}{al} \times \frac{x}{3}$$

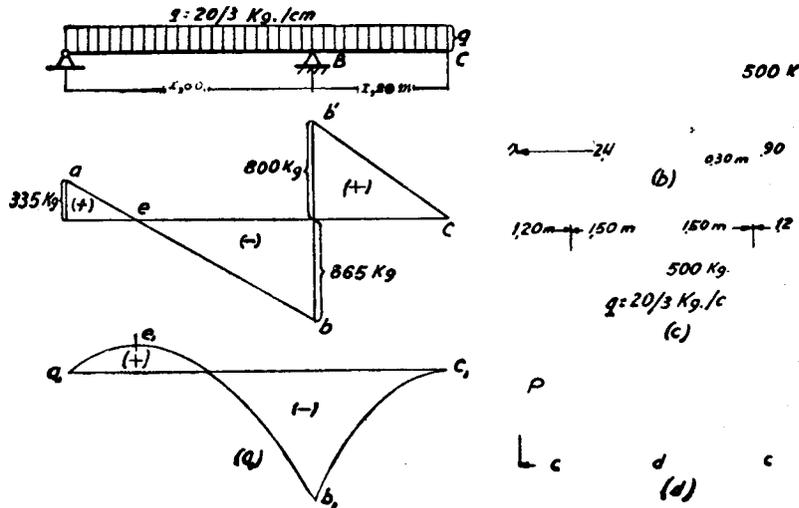


FIG. 74

De modo análogo se deducen la fuerza cortante y el momento tor para una sección correspondiente al trozo  $DB$  de la viga.

8. Hallar  $M_{\text{máx}}$  en el problema anterior si  $l = 3,60$  m.  $b = 0,90$   $W = 6.000$  kg.

Respuesta:

$$M_{\text{máx}} = 3.360 \text{ m. kg.}$$

9. Dibujar a escala aproximada los diagramas de fuerza cortante y momento flector y acotar en ellos los valores máximos positivos y negativos para las vigas con voladizos de la figura 74.

Solución: En el caso de la figura 74 (a) las reacciones son 335 kg. y 1.665 kg. La fuerza cortante en el trozo izquierdo de la viga es  $V = 335 - 60x$ . Está representada en la figura por la línea inclinada  $ab$ . La fuerza cortante para el trozo derecho de la viga se encuentra como en el caso de una ménsula y está representada por la recta inclinada  $b'c$ .

El momento flector para el trozo izquierdo de la viga es  $M = 335x - 60 \frac{x^2}{2}$ . Está representado por la parábola  $a_1e_1b_1$ . El momento máximo acontece en  $e_1$ , punto correspondiente al  $e$ , en el que la fuerza cortante cambia de signo. El diagrama del momento flector para el trozo de la

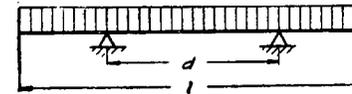


FIG. 75

derecha es análogo al de una ménsula y está representado por la parábola  $b_1c_1$ , tangente en  $c_1$ .

10. Una viga con dos voladizos iguales (fig. 75) sufre una carga uniformemente distribuida y tiene una longitud  $l$ . Hallar la distancia  $d$  entre los apoyos para la que el momento flector en el centro de la viga es numéricamente igual a los momentos en los apoyos. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para este caso.

Respuesta:

$$d = 0.586l$$

CAPITULO IV

FATIGAS EN LAS VIGAS

23. Flexión pura de barras prismáticas.—Una barra prismática sometida a la acción de pares iguales y opuestos en sus extremos, se dice que está solicitada a flexión pura. La parte central *CD* de la barra *AB* (fig. 76) está sometida a una solici-

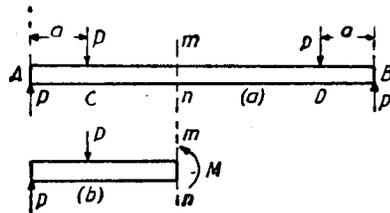


FIG. 76

tación de este tipo. La magnitud *Pa* del par que produce la flexión se llama momento flector. Considerando la sección *mn*, y quedándonos con la parte izquierda de la barra, se deduce que para el equilibrio es necesario que las fuerzas internas distribuidas en la sección *mn*, y que representan las acciones en dicha sección de la parte de la barra situada a su derecha, sean estáticamente equivalentes a un momento *M* igual y opuesto al momento flector *Pa*. Para encontrar la distribución de estas fuerzas internas consideraremos la deformación de la barra. En el caso sencillo de una barra que tenga un plano longitudinal de simetría, y cuando los pares flectores actúan en este plano, la flexión tendrá lugar en dicho plano. Si la barra es de sección rectangular y se trazan dos líneas verticales *mm* y *pp* en sus lados, los ensayos experimentales realizados han hecho ver que dichas líneas permanecen rectas durante la flexión y giran hasta quedar perpendiculares a las fibras longitudinales de la barra (figura 77). La teoría que vamos a exponer de la flexión se basa en la hipótesis de que no solamente las líneas, tales como *mm*,

está sometida a una solici-  
tación de este tipo. La magnitud *Pa* del par que produce la flexión se llama momento flector. Considerando la sección *mn*, y quedándonos con la parte izquierda de la barra, se deduce que para el equilibrio es necesario que las fuerzas internas distribuidas en la sección *mn*, y que representan las acciones en dicha sección de la parte de la barra situada a su derecha, sean estáticamente equivalentes a un momento *M* igual y opuesto al momento flector *Pa*. Para encontrar la distribución de estas fuerzas internas consideraremos la deformación de la barra. En el caso sencillo de una barra que tenga un plano longitudinal de simetría, y cuando los pares flectores actúan en este plano, la flexión tendrá lugar en dicho plano. Si la barra es de sección rectangular y se trazan dos líneas verticales *mm* y *pp* en sus lados, los ensayos experimentales realizados han hecho ver que dichas líneas permanecen rectas durante la flexión y giran hasta quedar perpendiculares a las fibras longitudinales de la barra (figura 77). La teoría que vamos a exponer de la flexión se basa en la hipótesis de que no solamente las líneas, tales como *mm*,

permanecen rectas, sino que toda la sección transversal de la barra, primitivamente plana, queda plana y normal a las fibras longitudinales de la barra después de la flexión. Los ensayos realizados han dado resultados concordantes con los obtenidos desarrollando la teoría, basada en aquella hipótesis, en lo concerniente a la flexión de la barra y a la deformación de las fibras longitudinales. De la hipótesis anterior se deduce que du-

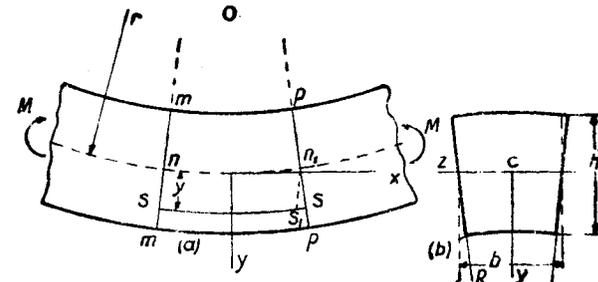


FIG. 77.

rante la flexión las secciones *mm* y *pp* giran, una respecto a otra, alrededor de ejes perpendiculares al plano de flexión, de tal modo que las fibras longitudinales del lado convexo sufren extensión, y compresión las del lado cóncavo. La línea *nn<sub>1</sub>* es la traza sobre el plano de la figura de la superficie cuyas fibras no sufren deformación durante la flexión. Esta superficie se llama superficie neutra, y su intersección con cualquier sección recta de la barra se denomina línea neutra.

El alargamiento *s's<sub>1</sub>* de cualquier fibra situada a una distancia *y* de la superficie neutra se obtiene trazando la línea *n<sub>1</sub>s<sub>1</sub>*, paralela a *mm* —fig. 77 (a)—. Representando por *r* el radio de curvatura del eje de la barra después de la flexión<sup>1</sup>, y usando la semejanza de los triángulos *non<sub>1</sub>* y *s<sub>1</sub>n<sub>1</sub>s'*, el alargamiento unitario de la fibra *ss'* será

$$\epsilon_x = \frac{s's_1}{nn_1} = \frac{y}{r} \tag{52}$$

<sup>1</sup> El eje de la barra es la línea que pasa por los centros de gravedad de sus secciones. *O* representa el centro de curvatura.

Se ve, por tanto, que la deformación unitaria en cada fibra longitudinal es proporcional a su distancia a la superficie neutra, e inversamente proporcional al radio de curvatura.

Los ensayos realizados han puesto de manifiesto que la extensión de las fibras del lado convexo de la barra viene acompañada de una contracción lateral, y la contracción longitudinal del lado cóncavo de una expansión lateral, tal como en el caso de extensión o compresión simple (véase artículo 14). Esto cambia la forma de todas las secciones rectas. Los lados verticales de la sección rectangular se inclinan tal como indica la figura 77 (b). La deformación unitaria en sentido lateral es

$$\epsilon_z = -\mu\epsilon_x = -\mu\frac{y}{r} \quad (53)$$

donde  $\mu$  es el módulo de Poisson.

Debido a esta distorsión todas las líneas rectas situadas en la sección recta y paralelas al eje  $z$  se transforman en curvas normales a los lados de la sección.

Su radio de curvatura  $R$  será mayor que  $r$  y estará con él en la misma relación que  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_z$  (véase ecuación 53); por tanto,

$$R = \frac{1}{\mu} r. \quad (54)$$

La fatiga en las fibras longitudinales, deducida de la ley de Hooke, es

$$\sigma_x = \frac{Ey}{r}. \quad (55)$$

La distribución de estas fatigas se ve en la figura 78. La fatiga en cualquier fibra es proporcional a su distancia al eje neutro  $mn$ . La posición del eje neutro y el valor del radio de curvatura  $r$  pueden determinarse por la condición de que las fuerzas ligadas a la sección determinen un par resistente que equilibre al par exterior  $M$  (fig. 76).

Sea  $dA$  el área de un elemento de una sección recta e  $y$  su distancia al eje neutro (fig. 78). La fuerza ligada a este área elemental es el producto del área por la fatiga (ecuación 55), es decir,  $\frac{Ey}{r} dA$ . Puesto que el sistema de fuerzas elementales que

actúa sobre la sección recta equivale a un par, la resultante de dichas fuerzas será cero, y tendremos

$$\int \frac{Ey}{r} dA = \frac{E}{r} \int y dA = 0,$$

es decir, el momento estático del área de la sección recta con relación al eje neutro es cero, o, lo que es lo mismo, la línea neutra pasa por el centro de gravedad de la sección.

El momento de la fuerza ligada al elemento antes dicho, respecto a la línea neutra, es  $\frac{Ey}{r} dAy$ .

Sumando todos los momentos de las fuerzas ligadas a la sección recta de la barra, y escribiendo que el resultado es igual al momento  $M$  de las fuerzas exteriores, se tendrá la siguiente ecuación, que sirve para determinar el radio de curvatura:

$$\int \frac{E}{r} y^2 dA = \frac{EI_z}{r} = M \quad \text{o} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}, \quad (56)$$

en la cual  $I_z = \int y^2 dA$  es el momento de inercia de la sección recta con relación al eje neutro  $z$  (véase *Apéndice*, pág. 335). En la ecuación (56) se ve que la curvatura varía en proporción directa con el momento flector, e inversa respecto a la cantidad  $EI_z$ , que por esto se denomina rigidez a la flexión de la barra. Eliminando  $r$  entre las ecuaciones (55) y (56), se obtiene la expresión siguiente para la fatiga:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z}. \quad (57)$$

El análisis precedente se ha hecho para una sección rectangular. Es válido también para el caso de una barra de cualquier tipo, de sección recta, que tenga un plano longitudinal de simetría y esté solicitado a flexión por pares que actúen en sus extremos y obren en este plano, puesto que en tal caso la flexión de la barra se presenta en dicho plano, y las secciones rectas,

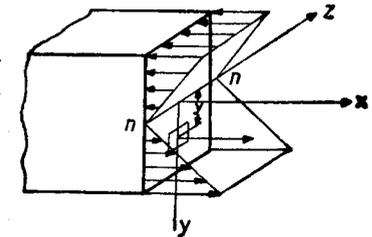


FIG. 78

primitivamente planas y normales al eje de la barra, quedan planas y normales a las fibras longitudinales después de la flexión.

En la ecuación (57),  $M$  es positivo cuando produce una flexión como la de la figura 77;  $y$  es positiva hacia abajo.

Un signo negativo para  $\sigma_x$  indica, según sabemos, una fatiga de compresión.

Las fatigas máximas de compresión y extensión se presentan en las fibras más alejadas de la línea neutra, y para la sección rectangular, o cualquier otra forma de sección que tenga el centro de gravedad a la mitad de la altura o canto de la viga  $h$ , en que  $y_{m\acute{a}x} = \frac{h}{2}$ , valen

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = \frac{Mh}{2I_z}, \quad y \quad (\sigma_x)_{m\grave{a}n} = -\frac{Mh}{2I_z}. \quad (58)$$

Para simplificar se acostumbra a usar la anotación

$$Z = \frac{2I_z}{h} \quad (59)$$

y entonces

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = \frac{M}{Z}; \quad (\sigma_x)_{m\grave{a}n} = -\frac{M}{Z}. \quad (60)$$

La cantidad  $Z$  se denomina módulo o momento resistente de la sección. En el caso de una sección rectangular —fig. 77 (b)— se tiene

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad Z = \frac{bh^2}{6}.$$

Para una sección circular de diámetro  $d$ ,

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad Z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Para las diversas formas de perfiles,  $\Gamma$ ,  $\square$ , etc., los diferentes valores de  $I_z$  y  $Z$  están tabulados en los manuales y catálogos.

Cuando el centro de gravedad de la sección recta no está a la mitad de la altura de la viga, como, por ejemplo, en el caso de una viga en T, si  $h_1$  y  $h_2$  representan las distancias de la línea

neutra a las fibras más alejadas hacia abajo y hacia arriba, las fatigas máximas para un momento  $M$  positivo serán

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = \frac{Mh_1}{I_z}, \quad (\sigma_x)_{m\grave{a}n} = -\frac{Mh_2}{I_z}. \quad (61)$$

Para un momento negativo,

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = -\frac{Mh_2}{I_z}, \quad (\sigma_x)_{m\grave{a}n} = \frac{Mh_1}{I_z}. \quad (62)$$

Los anteriores razonamientos y consecuencias se han hecho en la hipótesis de que la barra tuviese un plano longitudinal de simetría en el cual actuasen los momentos flectores; sin embar-

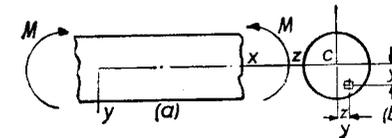


FIG. 79

go, los resultados pueden aplicarse también cuando dicho plano no existe, con tal de que los pares de flexión actúen en un plano axial que contenga uno de los dos ejes principales de la sección recta (véase *Apéndice*, pág. 344). Estos planos se denominan planos principales de flexión.

Cuando hay un plano de simetría y los pares de flexión actúan en este plano, la flexión se presenta en él. El momento de las fuerzas interiores, tales como las que muestra la figura 78, respecto al eje horizontal, equilibra al par de las fuerzas exteriores.

Los momentos de dichas fuerzas interiores, respecto al eje vertical, se anulan unos con otros, debido a que los momentos de las fuerzas a un lado del eje son exactamente equilibrados por los momentos de las fuerzas correspondientes del otro lado.

Cuando no hay plano de simetría, pero los pares flectores actúan en un plano axial que pasa por uno de los ejes principales de la sección,  $xy$  en la figura 79, una distribución de fatigas que sigue la ley de la ecuación (56) satisface a las condiciones de equilibrio. Esta distribución da, según se ha visto, un par

alrededor del eje horizontal (eje principal  $z$ ) que equilibra al par exterior. Alrededor del otro eje principal  $y$ , el momento resultante vale

$$M_y = \int z \frac{E y}{r} dA = \frac{E}{r} \int y z dA.$$

Esta integral es el producto de inercia de la sección recta (véase Apéndice, pág. 341), y es cero si  $y$  y  $z$  son los ejes principales de la sección.

En nuestro caso así se verifica y, por tanto, las condiciones de equilibrio quedan satisfechas.

**Problemas**

1. Determinar la fatiga máxima en un eje de locomotora (fig. 80) si  $c = 35$  cm., el diámetro  $d$  del eje es 25 cm. y la carga  $P$  en el extremo es 13.000 kg.

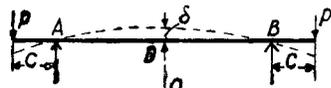


FIG. 80

*Solución:* El momento flector que actúa en la parte media del eje es  $M = P \times c = 13.000 \times 35$  kg.  $\times$  cm.

La fatiga máxima por la ecuación (60) es

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \frac{32 \cdot M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 13.000 \times 35}{\pi \times 25^3} = 300 \text{ kg./cm.}^2$$

2. Determinar el radio de curvatura  $r$  y la flecha del eje del problema anterior si el material es acero y la distancia entre los centros de los apoyos es 150 cm.

*Solución:* El radio de curvatura  $r$  se determina por la ecuación (55), sustituyendo  $y = \frac{d}{2} = 12,5$  cm. y  $\sigma_{\max} = 300$  kg./cm.<sup>2</sup>

$$r = \frac{E d}{\sigma} = \frac{2 \times 10^6 \times 25}{2 \times 300} = 833 \text{ m.}$$

Para calcular  $\delta$  (fig. 80), se tendrá en cuenta que la curva de flexión es un círculo de radio  $r$  y  $\overline{DB}$  es un cateto del triángulo rectángulo  $DOB$ , en el que  $O$  es el centro de curvatura. Por tanto,

$$\overline{DB}^2 = r^2 - (r - \delta)^2 = 2 r \delta - \delta^2,$$

$\delta$  es muy pequeño comparado con el radio  $r$  y la cantidad  $\delta^2$  puede despreciarse en la expresión anterior, de este modo:

$$\delta = \frac{\overline{DB}^2}{2r} = \frac{150^2}{8 \times 83,300} = 0,0337 \text{ cm.}$$

3. Una viga de madera de sección cuadrada de  $25 \times 25$  cm. está apoyada en  $A$  y  $B$  (fig. 80), y en sus extremos se aplican las cargas  $P$ . Determinar el valor de  $P$  y la flecha  $\delta$  en el centro, si  $AB = 5,4$  m.,  $c = 0,90$  m.;  $(\sigma_x)_{\max} = 70$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $E = 10^5$  kg./cm.<sup>2</sup>.

El peso de la viga se desprecia.

*Respuesta:*

$$P = 2.025 \text{ kg.}; \quad \delta = 0,204 \text{ cm.}$$

4. Una vigueta comercial de 30 cm. está apoyada como indica la figura 81 y cargada en los voladizos con una carga uniformemente distribuida de 1.000 kg./m. Determinar la fatiga máxima en la parte central de la viga y la flecha en su punto medio, si  $I_z = 9.785$  cm.<sup>4</sup>.

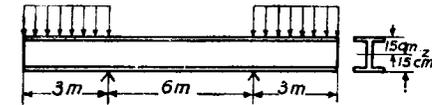


FIG. 81

*Solución:* El momento flector en la parte central de la viga será  $M = 1.000 \times 3 \times 150 = 450.000$  kg.  $\times$  cm.

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{450.000 \times 15}{9785} = 690 \text{ kg./cm.}^2;$$

$$\delta = 1,03 \text{ cm.}$$

5. Determinar la fatiga máxima producida en un alambre de acero de diámetro  $d = 0,8$  mm., cuando se arrolla a una polea de diámetro  $D = 50$  cm.

*Solución:* El alargamiento máximo debido a la flexión, ecuación 52, es

$$\epsilon = \frac{d}{D} = \frac{0,08}{50}$$

y la fatiga de extensión correspondiente es

$$(\sigma_x)_{\max} = \epsilon E = \frac{0,08 \times 2 \times 10^6}{50} = 3.200 \text{ kg./cm.}^2$$

6. Una regla de acero de sección recta  $0,08 \times 2,5$  cm. y una longitud  $l = 25$  cm. se flexa, aplicando pares en sus extremos en forma de arco circular de  $60^\circ$ .

Determinar la fatiga máxima y la flecha.

*Solución:* El radio de curvatura  $r$  se determina por la ecuación  $l = \frac{1}{6} 2 \pi r$ , de donde  $r = 23,87$  cm., y la fatiga máxima por la ecuación (55),

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E \times 0,04}{r} = \frac{8 \times 10^4}{23,87} = 3.350 \text{ kg./cm.}^2$$

La flecha calculada para un arco de círculo es

$$\delta = r (1 - \cos 30^\circ) = 3,2 \text{ cm.}$$

7. Determinar la fatiga máxima y el valor de los pares aplicados en los extremos de la regla del problema anterior si la flecha en el centro es 2,5 cm.

*Respuesta:*

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = 2.600 \text{ kg./cm.}^2; \quad M = 6,9 \text{ kg.} \times \text{cm.}$$

8. Determinar la curvatura producida en una viga de acero libremente apoyada de sección rectangular por un calentamiento no uniforme a lo largo del canto  $h$  de la sección. La temperatura en un punto a la distancia  $y$  del plano medio  $xx$  de la viga (fig. 77) viene dada por la ecuación

$$t = \frac{t_1 + t_0}{2} + \frac{(t_1 - t_0)}{h} y,$$

donde  $t_1$  es la temperatura en la cara inferior de la viga,  $t_0$  la temperatura en la cara superior,  $t_1 - t_0 = 80^\circ \text{C}$  y el coeficiente de dilatación  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$ . ¿Qué fatiga se producirá si los extremos de la viga están empotrados?

*Solución:* La temperatura del plano medio  $xx$  es la constante  $\frac{t_1 + t_0}{2}$  y la variación de temperatura de las demás fibras respecto a ella es proporcional a  $y$ . El alargamiento unitario térmico correspondiente es también proporcional a  $y$ , es decir, sigue la misma ley que el alargamiento dado por la ecuación (52). Como resultado de esta dilatación no uniforme de las fibras, la viga flexa y el radio de curvatura  $r$  se halla por la ecuación (52), utilizando  $\frac{\alpha_a(t_1 - t_0)}{2}$  en lugar de  $\epsilon_x$  y  $\frac{h}{2}$  en lugar de  $y$ . O sea

$$r = \frac{h}{\alpha_a (t_1 - t_0)} = 1.000 h.$$

Si los extremos de la viga están empotrados, aparecen en ellos pares de reacción tales que deshagan la curvatura debida al calentamiento no uniforme. Por tanto,

$$M = \frac{EI_x}{r} = \frac{EI_x}{1.000 h}$$

Sustituyendo en la ecuación (57), se tiene

$$\sigma_x = \frac{Ey}{1.000 h}$$

y la fatiga máxima es

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = \frac{E}{2 \times 1.000} = 1.000 \text{ kg./cm.}^2$$

9. Resolver los problemas 6 y 7 si el arco es de  $10^\circ$  y el material es cobre.

10. Resolver el problema 4, suponiendo que la viga es de madera, tiene sección cuadrada de  $30 \times 30 \text{ cm.}$  y la intensidad de la carga uniformemente distribuida es  $1.500 \text{ kg./m.}$

24. Vigas con formas diversas de sección recta<sup>1</sup>.—De la discusión del párrafo anterior se deduce que la fatiga máxima de extensión o compresión en una barra sometida a flexión pura es proporcional a la distancia de la fibra más alejada a la línea neutra de la sección. Por tanto, si el material tiene la misma resistencia a extensión y compresión, será lógico tomar aquellas formas de sección recta para las que su centro de gravedad está a la mitad del canto de la viga. De este modo tendremos el mismo coeficiente de seguridad para las fibras extendidas que para las comprimidas. Es por esto por lo que se escogen secciones simétricas para materiales que, como el acero, tienen el mismo punto de fluencia a extensión y compresión. Si la sección no es simétrica respecto a la línea neutra, como, por ejemplo, en un carril, el material se distribuye entre la cabeza y la base, de modo que el centro de gravedad quede en el punto medio de su altura.

Para materiales de pequeña resistencia a la extensión y alta resistencia a la compresión, como la fundición o el hormigón, la sección recomendable es la asimétrica respecto a la línea neutra, de tal modo que las distancias  $h_1$  y  $h_2$  de la línea neutra a las fibras más alejadas estén en la misma relación que las resistencias del material a extensión y compresión. De este modo se obtiene igual resistencia a una y otra clase de esfuerzos. Por ejemplo, en una sección en T, el centro de gravedad puede llevarse a una posición conveniente a lo largo de la altura, proporcionando de modo oportuno las dimensiones del ala y del alma.

Para un momento flector dado la fatiga máxima depende del módulo resistente de la sección, y es interesante ver que hay casos en los que un aumento de área no origina una disminución de la fatiga.

Ejemplo: Sea una barra de sección cuadrada flexada por

<sup>1</sup> Un análisis completo sobre las diversas formas de las secciones rectas de las vigas puede verse en las notas del libro de Navier *Resistance des corps solides*, ed. 1864 de Barré de Saint Venant. Véanse páginas 128-162.

pares que actúan en el plano vertical que pasa por una diagonal (fig. 82), la fatiga máxima se produce en los ángulos *pp*. Si ahora cortamos las partes rayadas, dejando una sección hexagonal de menor área, la fatiga máxima se habrá hecho menor también.

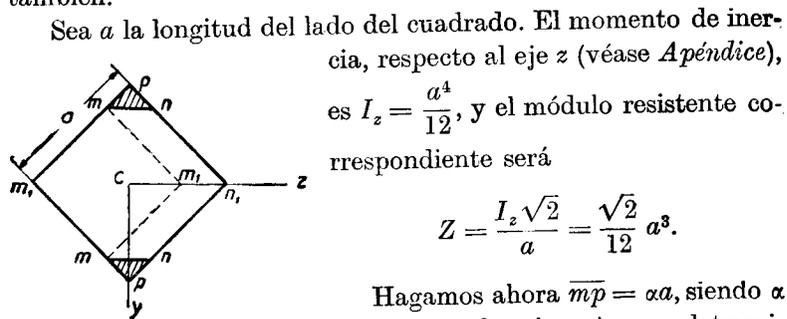


FIG. 82

Sea *a* la longitud del lado del cuadrado. El momento de inercia, respecto al eje *z* (véase *Apéndice*), es  $I_z = \frac{a^4}{12}$ , y el módulo resistente correspondiente será

$$Z = \frac{I_z \sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

Hagamos ahora  $\overline{mp} = \alpha a$ , siendo  $\alpha$  un número fraccionario que determinaremos más adelante.

La nueva sección recta se puede considerar formada por el cuadrado  $mm_1m_1m_1$  de lados  $a(1 - \alpha)$ , y de dos paralelogramos  $mn n_1m_1$ .

Su momento de inercia respecto al eje *z* es

$$I'_z = \frac{a^4(1 - \alpha)^4}{12} + 2 \cdot \frac{\alpha a \sqrt{2} \left[ \frac{a(1 - \alpha)}{\sqrt{2}} \right]^3}{3} = \frac{a^4(1 - \alpha)^3}{12} (1 + 3\alpha)$$

y su módulo resistente será

$$Z' = \frac{I'_z \sqrt{2}}{a(1 - \alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 (1 - \alpha)^2 (1 + 3\alpha).$$

Si ahora se determina el valor de  $\alpha$ , que hace máximo a  $Z'$ , se encuentra  $\alpha = \frac{1}{9}$ . Dando este valor a  $\alpha$  se ve que, cortando los ángulos de la sección cuadrada en la forma dicha, la fatiga máxima por la flexión disminuye alrededor de un 5 por 100. Este resultado se comprende fácilmente considerando que el momento resistente de la sección es la relación entre el momento de inercia y la mitad de la altura de la sección. Al cortar los ángulos, el momento de inercia de la sección ha disminuído en menor proporción que la altura, por lo que el módulo resistente ha aumentado y  $(\sigma_x)_{\max}$  disminuído. Efectos análogos pueden

obtenerse en otros casos. En la figura 83 (a) puede aumentarse, a veces, el módulo resistente de la sección quitando las partes rayadas.

En una sección circular —fig. 83 (b)— se aumenta el módulo resistente en un 0,7 por 100, quitando los segmentos rayados cuya flecha es  $\delta = 0,011 d$ . En el caso de una sección triangular —fig. 83 (c)—, el momento resistente puede aumentarse matando el ángulo rayado.

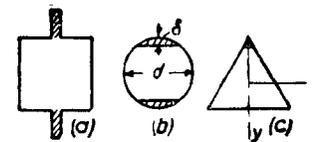


FIG. 83

Al proyectar una viga sometida a flexión pura, no solamente debe considerarse la condición de resistencia, sino la de economía, al tener en cuenta su peso. De dos secciones de igual momento resistente, es decir, respondiendo a la resistencia con el mismo coeficiente de seguridad, es más económica la de menor área.

Consideraremos, en primer término, la sección rectangular de altura *h* y ancho *b*. El módulo resistente es

$$Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{1}{6} Ah, \tag{a}$$

donde *A* representa el área de la sección.

Se ve que la sección rectangular es tanto más económica cuanto mayor es su altura *h*. Sin embargo, hay un límite para el aumento de *h*, debido a que la estabilidad de la viga disminuye a medida que la sección se estrecha. El fallo de una viga de sección rectangular muy estrecha puede deberse, no a sobrepasar la resistencia del material, sino a pandeo lateral (véase *Segunda parte*).

En el caso de una sección circular se tiene

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{1}{8} A \cdot d. \tag{b}$$

Comparemos dos secciones: una circular y otra cuadrada, de igual área. El lado *h* de la sección cuadrada deberá ser

$$h = \frac{\sqrt{\pi d}}{2}.$$

Aplicando la ecuación (a), resulta

$$Z = 0,147 A \cdot d.$$

Si este resultado le comparamos con la ecuación (b), se ve que la sección cuadrada es más económica que la circular.

Estudiando la distribución de la fatiga con la altura (fig. 78), se llega a la conclusión de que para que una sección sea económica, la mayor parte del material de la viga debe situarse tan alejado como sea posible de la línea neutra. El caso límite sería: dada una altura  $h$  y un área  $A$ , situar áreas de valor  $\frac{A}{2}$  a distancias  $\frac{h}{2}$  de la línea neutra. Entonces,

$$I_x = 2 \times \frac{A}{2} \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ah^2}{4}; \quad Z = \frac{1}{2} Ah. \quad (c)$$

A este límite se aproximan las secciones en I de la práctica, en las que la mayor parte del material está en las alas. Debido a la existencia necesaria del alma de la viga no puede alcanzarse el valor (c) y para la mayoría de los perfiles de catálogo se tiene, de modo aproximado,

$$Z \approx 0,30 Ah. \quad (d)$$

La comparación de (d) y (a) muestra que la sección en I es más económica que la rectangular de la misma altura. Al mis-

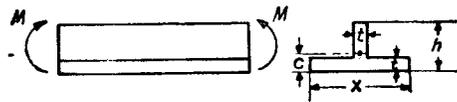


FIG. 84

mo tiempo, y debido a la anchura de las alas, una viga en I será siempre más estable respecto a efectos laterales de pandeo que otra rectangular de la misma altura y momento resistente

**Problemas**

1. Determinar la anchura  $x$  del ala de una viga de fundición cuya sección es la de la figura 84, si la fatiga máxima de extensión debe ser un tercio de la máxima fatiga de compresión. La altura de viga es  $h = 10$  cm.; el grueso del alma y del ala es  $t = 2$  cm.

*Solución:* Para satisfacer la condición del enunciado es necesario que la distancia del centro de gravedad de la sección a la fibra más alejada del ala satisfaga a la condición  $c = \frac{1}{4} h$ .

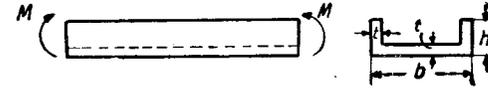


FIG. 85

Tomando momentos respecto a la cara inferior del ala, se tiene (figura 84):

$$c = \frac{ht \cdot \frac{h}{2} + (x-t) \frac{t^2}{2}}{ht + (x-t)t} = \frac{h}{4},$$

de donde

$$x = t + \frac{h^2}{h - 2t} = 2 + \frac{100}{10 - 4} = 18 \text{ cm.}$$

2. Determinar la relación  $(\sigma_x)_{\text{máx}} : (\sigma_x)_{\text{mín}}$  para una sección en I como la de la figura 85, si  $t = 5$  cm.,  $h = 25$  cm.,  $b = 60$  cm.

*Respuesta:*

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} : (\sigma_x)_{\text{mín}} = 3 : -7.$$

3. Determinar la condición para la que la disminución de altura  $h_1$  de la sección de la figura 86 venga acompañada de un aumento del momento resistente.

*Solución:*

$$Z = \frac{bh^3}{6h_1} + \frac{dh_1^3}{6},$$

$$\frac{dZ}{dh_1} = -\frac{bh^3}{6h_1^2} + \frac{dh_1}{3}.$$

La condición para que aumente  $Z$  al disminuir  $h_1$  es

$$\frac{bh^3}{6h_1^2} > \frac{dh_1}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{b}{2d} > \frac{h_1^3}{h^3}.$$

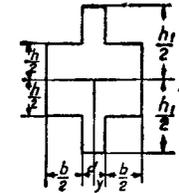


FIG. 86

4. Determinar qué cantidad debe quitarse de una sección en forma de triángulo equilátero —fig. 83 (c)— para obtener el máximo de  $Z$

5. Determinar la relación entre los pesos de tres vigas de la misma longitud, sometidas al mismo momento flector  $M$  y con igual  $(\sigma_x)_{\text{máx}}$  si las secciones rectas son un círculo, un cuadrado y un rectángulo de dimensiones  $h = 2b$ .

*Solución:*

$$1,12 : 1 : 0,793.$$

25. **Caso general de vigas cargadas transversalmente.**—En el caso general de vigas cargadas transversalmente, la distribución de fatigas sobre una sección transversal de la viga equilibra a la fuerza cortante y al momento flector correspondientes a dicha sección. El cálculo de las fatigas se hace corrientemente en dos etapas, determinando primeramente las fatigas producidas por el momento flector, llamadas fatigas de flexión y después las fatigas cortantes producidas por la fuerza cortante. En este artículo nos limitaremos al cálculo de las fatigas de flexión, dejando para el próximo artículo el análisis de las fatigas cortantes.

Para calcular las fatigas de flexión supondremos que dichas fatigas se distribuyen del mismo modo que en el caso de la flexión pura y emplearemos las fórmulas deducidas en el artículo 23. Los resultados experimentales muestran que esta hipótesis es suficientemente aproximada si la sección que se considera no está muy próxima al punto de aplicación de una carga concentrada. En las proximidades de la aplicación de una carga concentrada la distribución de fatigas es más complicada. Este problema se estudiará en la *Segunda parte*. El cálculo de las fatigas de flexión se realiza para las secciones en las que el momento flector tiene su valor máximo positivo o negativo. Conocido el valor máximo del momento flector y el valor de la fatiga de trabajo a flexión del material  $\sigma_t$ , las dimensiones de la sección recta de la viga se calculan por la ecuación

$$\sigma_t = \frac{M_{\max}}{Z} \quad (63)$$

A continuación damos diversos ejemplos de aplicación de esta ecuación.

**Problemas**

1. Determinar las dimensiones necesarias de un perfil comercial en I que ha de soportar una carga distribuida de 600 kg./m. tal como indica la figura 87, siendo el coeficiente de trabajo  $\sigma_t = 1.200$  kg./cm.<sup>2</sup>. Se tendrá en cuenta solamente la fatiga normal y se despreciará el de la viga.

*Solución:* Para obtener la sección peligrosa de la viga se cons

el diagrama del esfuerzo cortante —fig. 87 (b)—. La reacción en el soporte izquierdo es

$$R_1 = \frac{3,6 \times 600 \times 4,5 + 1,8 \times 600 \times 0,9}{6,3} = 1.700 \text{ kg.}$$

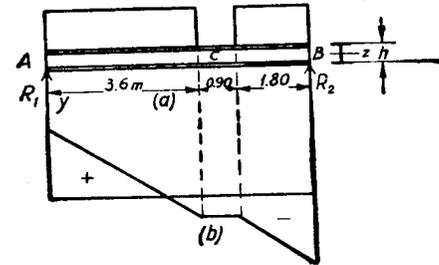


FIG. 87

La fuerza cortante para cualquier sección de la parte AC de la viga es

$$Q = R_1 - qx = 1.700 - 600x.$$

Esta fuerza es cero para  $x = \frac{1.700}{600} = 2,83$  m. Para esta sección el momento es un máximo:

$$M_{\max} = 1.700 \times 2,83 - 600 \times \frac{1}{2} \cdot 2,83^2 = 240.000 \text{ kg.} \times \text{cm.}$$

El momento resistente necesario es

$$Z = \frac{240.000}{1.200} = 200 \text{ cm.}^3$$

Esta condición queda satisfecha para una I laminada de altura 20 cm. área, de la sección recta 33,40 cm.<sup>2</sup> y  $Z = 214$  cm.<sup>3</sup>, catálogo de la Sociedad Metalúrgica Duro-Felguera.

2. Una presa de madera (fig. 88) está formada por tablones verticales tales como AB, de sección rectangular, cuya dimensión h es 30 cm., apoyados en sus extremos. Determinar  $(\sigma_x)_{\max}$  si la longitud de las barras es  $l = 5,4$  m. y su peso se desprecia.

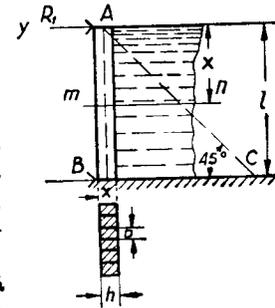


FIG. 88

*Solución:* Sea b el ancho de un tablón. La presión hidrostática sobre él, representada por el prisma triangular ABC, es  $W = \frac{1}{2} bl^2$ , la

reacción en A es  $R_1 = \frac{1}{3} W = \frac{1}{6} bl^2$  y la fuerza cortante en cualquier sección  $mn$  es igual a la reacción  $R_1$  menos el peso del prisma de agua  $Amn$ , es decir,

$$V = R_1 - W \frac{x^2}{l^2} = W \left( \frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

La posición de la sección correspondiente a  $M_{\max}$  se encuentra por la condición  $V = 0$ , o sea

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} = 0,$$

de donde

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 3.12 \text{ m.}$$

El momento flector para cualquier sección  $mn$  es igual al momento de la reacción  $R_1$  menos el momento de la carga distribuida representada por el prisma triangular  $Amn$ . Es decir,

$$M = R_1 x - \frac{Wx^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{Wx}{3} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Sustituyendo, según hemos visto,  $\frac{x^2}{l^2} = \frac{1}{3}$  y  $x = 3.12$  m., se obtiene

$$M_{\max} = \frac{1}{9} bl^2 x,$$

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = 6 \frac{M_{\max}}{bh^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{l}{h} \right)^2 \times \frac{312}{1.000} = 67 \text{ kg./cm.}^2$$

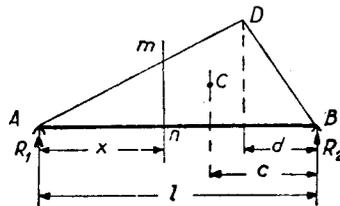


Fig. 89

La reacción en el apoyo A es

$$R_1 = \frac{W \cdot c}{l} = \frac{6.000 \times 1.5}{3.6} = 2.500 \text{ kg.}$$

La fuerza cortante para cualquier sección  $mn$  es igual a la reacción  $R_1$  menos el peso de la carga representada por  $Amn$ .

La carga que representa el área  $ADE$  es

$$ADE = \frac{W(l-d)}{l} = \frac{3}{4} W,$$

3. Determinar el valor de  $M_{\max}$  en una viga que soporta la carga triangular  $ADB$  igual a  $W = 6.000$  kg. si  $l = 3,60$  m. y  $d = 0,90$  m. (figura 89).

Solución: La distancia  $c$  del apoyo B a la vertical que pasa por el centro de gravedad del triángulo es

$$c = \frac{1}{3}(l + d) = 1,5 \text{ m.}$$

por tanto,

$$V = R_1 - \frac{3}{4} W \frac{x^2}{(l-d)^2}.$$

La posición de la sección para la que  $M$  es máximo se encontrará por la ecuación

$$R_1 - \frac{3}{4} W \frac{x^2}{(l-d)^2} = 0$$

o

$$\frac{x^2}{(l-d)^2} = \frac{4R_1}{3W} = \frac{5}{9},$$

de donde

$$x = 2,01 \text{ m.}$$

El momento flector para cualquier sección  $mn$  es igual al momento de la reacción menos el momento de la carga  $Amn$ . Será, por tanto,

$$M = R_1 x - \frac{3}{4} W \frac{x^2}{(l-d)^2} \cdot \frac{x}{3}.$$

Sustituyendo el valor calculado de  $x$ ,

$$M_{\max} = 336.000 \text{ kg.} \times \text{cm.}$$

4. Construir los diagramas del momento flector y de la fuerza cortante para el caso de la figura 90 (a) y determinar el perfil comercial en I necesario si  $a = c = \frac{l}{4} = 1,8$  m.,  $P = 1.000$  kg.,  $q = \frac{20}{3}$  kg./cm.

$\sigma_x = 1.200$  kg./cm.<sup>2</sup> El peso de la viga puede despreciarse.

Solución: En la figura 90 (b) y (c) se ven los diagramas del momento flector y de la fuerza cortante correspondientes a las cargas distribuidas. A ellos deben añadirse el momento flector y la fuerza cortante producidos por la carga P.

El momento flector máximo se presenta a la mitad de la luz

$$M_{\max} = 288.000 \text{ kg.} \times \text{cm.}$$

Se necesita

$$Z = \frac{288.000}{1.200} = 240 \text{ cm.}^3$$

El perfil I comercial de altura 22 cm. y área de sección recta 39,50 cm.<sup>2</sup>,  $Z = 278$  cm.<sup>3</sup>, es la sección más aproximada por exceso que cumple las condiciones de resistencia.

5. Determinar la posición más desfavorable de una vagoneta mó-

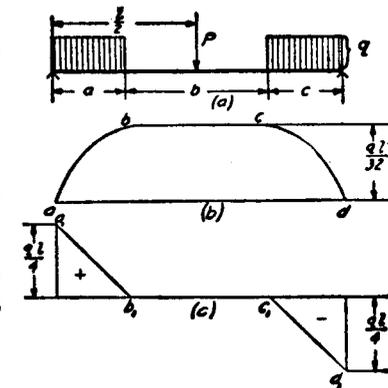


Fig. 90

vil sobre una viga tal como indica la figura 91. Encontrar  $M_{\text{máx}}$  si la carga por rueda es  $P = 5.000 \text{ kg.}$ ,  $l = 7,20 \text{ m.}$ ,  $d = 1,80 \text{ m.}$  El peso de la viga se desprecia.

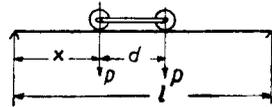


Fig. 91

*Solución:* Si  $x$  es la distancia de la rueda izquierda al apoyo izquierdo de la viga, el momento flector debajo de dicha rueda izquierda es

$$\frac{2P \left( l - x - \frac{1}{2}d \right) x}{l}$$

Este momento es máximo cuando

$$x = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}$$

Por tanto, para obtener el máximo momento flector bajo la rueda izquierda, es preciso desplazar la vagoneta desde la posición central la cantidad  $\frac{d}{4}$  hacia el apoyo derecho. Puede obtenerse el mismo valor para el momento flector en el punto de apoyo de la rueda derecha, desplazando la vagoneta desde la posición central la cantidad  $\frac{d}{4}$  hacia el apoyo izquierdo de la viga.

6. Los carriles de una grúa (fig. 92) están sostenidos por dos vigas de sección en I y perfil comercial.

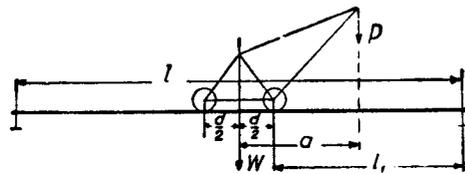


Fig. 92

Determinar la posición más desfavorable de la grúa, el  $M_{\text{máx}}$  correspondiente y las dimensiones de las vigas en I si  $\sigma_t = 1.200 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $l = 9 \text{ m.}$ ,  $a = 3,60 \text{ m.}$ ,  $d = 1,8 \text{ m.}$ , el peso de la grúa  $W = 5.000 \text{ kg.}$  y la carga levantada por la grúa  $P = 1.000 \text{ kg.}$  Las cargas actúan en el plano medio correspondiente a las dos vigas en I y se reparten por igual entre ellas.

*Solución:* El momento flector máximo se presenta en el punto de apoyo de la rueda derecha cuando la distancia de esta rueda al apoyo derecho es

$$l_1 = \frac{1}{2} \left( l - \frac{1}{6}d \right); \quad M_{\text{máx}} = 1.261.250 \text{ kg.} \times \text{cm.}$$

Repartiendo el momento en partes iguales entre las dos vigas, el momento resistente de cada una deberá ser

$$Z = \frac{M_{\text{máx}}}{2 \sigma_t} = 525,5 \text{ cm.}^3$$

La sección en I necesaria tiene una altura de  $28 \text{ cm.}$ , área  $61 \text{ cm.}^2$  y  $Z = 541 \text{ cm.}^3$ . El peso de la viga se desprecia.

7. Una viga de madera de sección circular apoyada en C y unida a la fundación en A (fig. 93) sufre una carga de  $q = 500 \text{ kg./m.}$  uniformemente distribuida a lo largo de la porción BC.

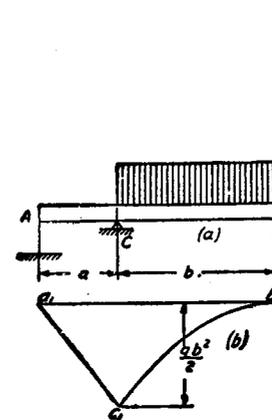


Fig. 93

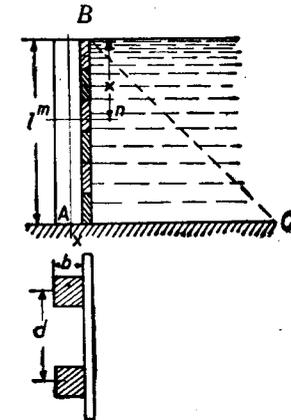


Fig. 94

Construir el diagrama del momento flector y determinar el diámetro necesario  $d$  si  $\sigma_t = 81 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $a = 0,90 \text{ m.}$ ,  $b = 1,8 \text{ m.}$

*Solución:* El diagrama del momento flector se ve en la figura 93 (b). Numéricamente, el momento máximo se presenta en C y vale  $81.000 \text{ kg.} \times \text{cm.}$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot \frac{M}{\sigma_t}} = 21 \text{ cm.}$$

8. Una presa de madera sostenida por pilares verticales empotrados en su extremo inferior (fig. 94) está hecha con tablas horizontales. Determinar la dimensión de los pilares cuya forma es cuadrada si  $l = 1,8 \text{ m.}$ ,  $d = 0,90 \text{ m.}$  y  $\sigma_t = 40 \text{ kg./cm.}^2$ . Dibujar los diagramas del momento flector y de la fuerza cortante.

*Solución:* La carga lateral total de un pilar está representada por el peso  $W$  del prisma triangular de agua ABC. Para cualquier sección  $mn$ , el esfuerzo cortante y el momento flector son:

$$V = -\frac{Wx^2}{l^2}; \quad M = -\frac{Wx^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3}$$

Al determinar los signos de  $V$  y  $M$  se ha supuesto que la figura 94 ha girado  $90^\circ$  en sentido contrario a las agujas del reloj, de tal modo

que los ejes  $x$  e  $y$  vayan a coincidir con los de la figura 56. El valor necesario de  $b$  lo da la expresión

$$Z = \frac{b^3}{6} = \frac{M_{\max}}{\sigma_t} = \frac{87,400}{40}$$

de donde

$$b = 23,5 \text{ cm.}$$

La construcción de los diagramas se deja como ejercicio.

9. Determinar las dimensiones de una viga en voladizo de sección I comercial uniformemente cargada a razón de  $q = 350 \text{ kg./m.}$  y sometida además a la acción en su extremo de una carga concentrada de valor  $P = 250 \text{ kg.}$  La longitud es  $l = 1,5 \text{ m.}$  y  $\sigma_t = 1.000 \text{ kg./cm.}^2$

Solución:

$$Z = \frac{(250 \times 1,5 + 525 \times 0,75) \times 100}{1.000} = 76,87 \text{ cm.}^3$$

El perfil comercial necesario es una I de 14 cm. de altura y 18,20 cm. de sección.

10. Determinar las fatigas de flexión en un roblón suponiendo que las cargas que obran sobre él están distribuidas en la forma que indica la figura 95.

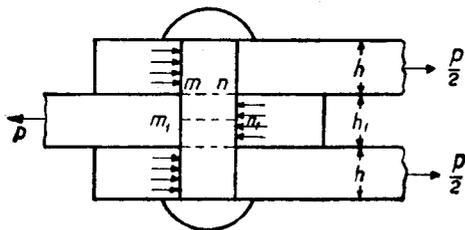


FIG. 95

El diámetro del roblón  $2 \text{ cm.}$ ,  $h = 0,6 \text{ cm.}$ ,  $h_1 = 1 \text{ cm.}$ ,  $P = 5.000 \text{ kg.}$

Solución: El momento flector en la sección  $mn$  es  $\frac{P}{2} \cdot \frac{h}{2}$ . El momento de flexión en la sección central  $m_1n_1$  es

$$\frac{P}{2} \left( \frac{h}{2} + \frac{h_1}{4} \right)$$

Este momento, que es el máximo, se tomará para calcular la fatiga

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{P}{2} \left( \frac{h}{2} + \frac{h_1}{4} \right) : \frac{\pi d^3}{32} = \frac{4P}{\pi d^3} \times \frac{2h + h_1}{d} = 1.750 \text{ kg./cm.}^2$$

11. Determinar el perfil en I necesario para los casos de las figuras 67 (a), 67 (d) y 68 (b), suponiendo una fatiga de trabajo de  $1.200 \text{ kg./cm.}^2$ .

12. Determinar el perfil necesario para una viga apoyada de sección en I solicitada por una carga uniforme a razón de  $650 \text{ kg. por}$

metro y por una carga  $P = 2.000 \text{ kg.}$  que actúa en su centro. La longitud de la viga es  $4,50 \text{ m.}$  y la fatiga de trabajo  $\sigma_t = 1.200 \text{ kg. por cm.}^2$ .

13. Una U, cuya sección es la de la figura 85, está apoyada en sus extremos y solicitada por una carga concentrada en su sección central. Calcular el valor máximo que puede tomar la carga si la fatiga de trabajo es  $80 \text{ kg./cm.}^2$  a extensión, y  $160 \text{ kg./cm.}^2$  a compresión.

26. La fatiga cortante en la flexión.—En el párrafo anterior se vió que al flexarse una viga por la acción de cargas transversales, a las fatigas normales  $\sigma_x$  debían acompañar otras  $\tau$ , ligadas ambas a la sección  $mn$  de la viga (fig. 96). Considerando la acción en el trozo a la derecha de la sección (fig. 96), se deduce, para que subsista el equilibrio, que la sumación de estas fatigas cortantes debe igualar a la fuerza cortante  $V$ . Para encontrar la ley de su distribución a lo largo de la sección, empezaremos por considerar el caso sencillo de una sección rectangular (fig. 97). En este caso es lógico suponer que las fatigas cortantes  $\tau$  son paralelas en cada punto a la fuerza cortante  $V$ , es decir, paralelas a los lados  $mn$  de la sección y que su distribución es uniforme a lo largo del ancho de la viga  $cc_1$ . Representaremos las fatigas en este caso con  $\tau_{xy}$ . El subíndice  $y$  indica que la fatiga cortante es paralela al eje  $y$ , y el subíndice  $x$ , que está ligada a un plano perpendicular al eje  $x$ . Estas dos hipótesis nos servirán para la determinación completa de la distribución de las fatigas cortantes. Un estudio más detenido del problema muestra que la solución aproximada que obtengamos es suficientemente exacta para las aplicaciones y que en el caso de una sección rectangular estrecha ( $h$  grande comparado con  $b$ , figura 97) prácticamente coincide con la solución exacta <sup>1</sup>.

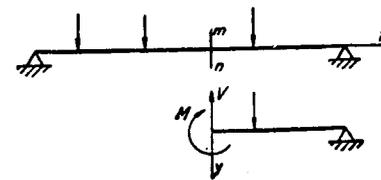


FIG. 96

<sup>1</sup> La solución exacta de este problema se debe a De Saint Venant, *Journal de Math.* (Liouville), 1856. Un resumen del famoso trabajo de De Saint Venant puede verse en la *History of the Theory of Elasticity*, de Todhunter y Pearson. La solución aproximada que damos se debe a Jouravski. La traducción francesa de este trabajo figura en *Annales des ponts et chaussées*, 1856. La teoría exacta muestra que cuando la altura de la viga es pequeña comparada con su ancho, la discrepancia entre la solución exacta y la aproximada es considerable.

Si se separa un elemento de la viga por dos secciones adyacentes y por dos planos paralelos al plano neutro e infinitamente próximos —fig. 97 (b)—, la fatiga cortante  $\tau_{xy}$  en la cara vertical  $acc_1a_1$  tendrá una distribución uniforme de acuerdo con la hipótesis establecida. Estas fatigas tienen un momento  $(\tau_{xy} b dy) dx$

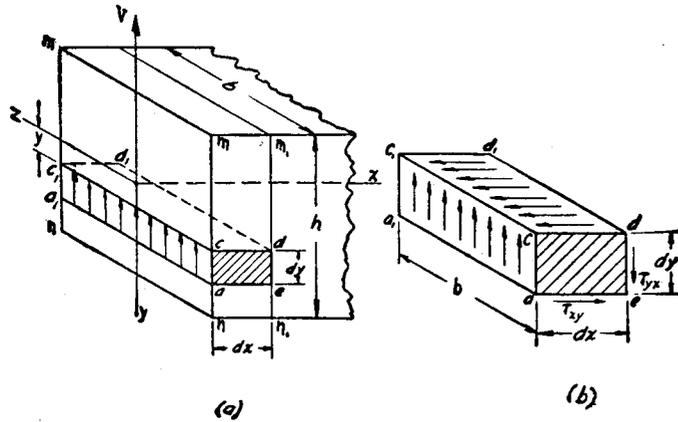


FIG. 97

respecto a la arista  $ee$  del elemento que debe equilibrar al momento  $(\tau_{yx} b dx) dy$  debido a las fatigas cortantes distribuidas sobre la cara horizontal  $cdd_1c_1$  del elemento.

Por tanto,

$$\tau_{xy} b dy dx = \tau_{yx} b dx dy \quad \text{y} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

es decir, las fatigas cortantes que actúan en dos caras perpendiculares del elemento son iguales. Este mismo resultado se obtuvo anteriormente al estudiar la extensión simple (véase página 39) y también en el caso de compresión o extensión en dos direcciones perpendiculares (véase pág. 43). La existencia de las fatigas cortantes en los planos paralelos al plano neutro puede ponerse de manifiesto con experimentos sencillos. Sea, por ejemplo, dos barras iguales rectangulares dispuestas en conjunto sobre apoyos simples, tal como indica la figura 98, y sometidas a flexión por la acción de una carga concentrada  $P$ . Si no existe rozamiento entre las vigas, la flexión de cada una será independiente de la otra y en ambas tendremos compresión en la cara

superior y extensión en la inferior, tomando el conjunto la forma de equilibrio indicada en la figura 98 (b). Las fibras longitudinales inferiores de la barra superior deslizarán, respecto a las fibras superiores de la barra inferior. En el caso de una sola barra de altura  $2h$  —fig. 98 (a)—, existirán fatigas cortantes a lo largo del plano neutro  $nn$  de una magnitud que evite el deslizamiento de la parte superior de la barra respecto a la inferior —véase figura 98 (b)—. Debido a esto, la barra única de altura  $2h$  es mucho más rígida y resistente que el conjunto de las dos barras de altura  $h$ . Como aplicación práctica, citaremos el caso de la unión de vigas de madera para formar una sola

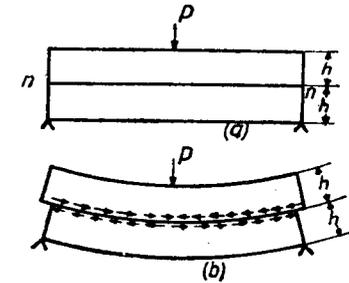


FIG. 98

—figura 99 (a)—; entonces se acostumbra a practicar cajas comunes a las vigas, tales como las  $a, b, c, \dots$ , donde se introducen las llaves correspondientes, cuyo objeto es evitar el deslizamiento y favorecer la robustez. Observando los juegos alrededor de la llave —fig. 99 (b)—, se ve fácilmente la dirección en que tiende a producirse el deslizamiento y, por consiguiente, la dirección de la fatiga cortante a lo largo del plano neutro, en el caso de viga única.

Anteriormente vimos que la fatiga cortante  $\tau_{xy}$  en cualquier punto de la sección vertical de la viga tiene dirección verti-

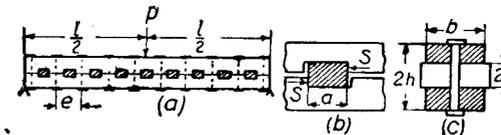


FIG. 99

cal y es numéricamente igual a la fatiga cortante  $\tau_{yx}$  afecta al plano horizontal que pasa por el mismo punto. Esta última puede calcularse fácilmente por la condición de equilibrio del elemento  $pp_1nn_1$ , separado de la viga en virtud de dos secciones adyacentes verticales  $mn$  y  $m_1n_1$  y una horizontal  $pp_1$  —fig. 100 (a) y (b)—. Las únicas fuerzas que actúan sobre este elemento en la

dirección del eje  $x$  son: la fatiga cortante  $\tau_{yx}$  afecta a la cara  $pp_1$  y las fatigas normales  $\sigma_x$  sobre las caras  $np$  y  $n_1p_1$ . Si el momento flector en las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$  vale lo mismo, es decir, estamos en un caso de flexión pura, las fatigas normales  $\sigma_x$  sobre las caras  $np$  y  $n_1p_1$  serán iguales y se equilibrarán entre sí. En este caso, la fatiga cortante  $\tau_{yx}$  será igual a cero.

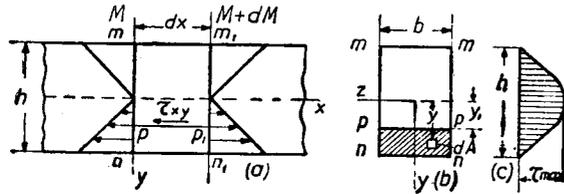


FIG. 100

Consideremos ahora el caso más general de que el momento flector varíe y sean  $M$  y  $M + dM$  los momentos en las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$ , respectivamente. En este caso, la fuerza normal que obra en el área elemental  $dA$  de la cara  $nppn$  será (ecuación 57)

$$\sigma_x dA = \frac{My}{I_z} dA.$$

La suma de todas estas fuerzas repartidas a lo largo de la cara  $nppn$  del elemento valdrá

$$\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{My}{I_z} dA. \tag{a}$$

De la misma manera, la suma de las fuerzas normales ligadas a la cara  $n_1p_1p_1n_1$ , será

$$\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA. \tag{b}$$

La fuerza total debida a la fatiga cortante  $\tau_{yx}$  que obra en la cara  $pp_1$  del elemento es

$$\tau_{xy} b dx, \tag{c}$$

y como las fuerzas dadas por (a), (b) y (c) deben estar en equilibrio, resulta:

$$\tau_{xy} b dx = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA - \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{My}{I_z} dA,$$

de donde

$$\tau_{xy} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{bI_z} \cdot \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA,$$

o, aplicando la ecuación (50),

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{bI_z} \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA. \tag{64}$$

La integral de esta ecuación tiene una interpretación muy sencilla.

Representa el momento estático de la parte rayada de la sección recta —fig. 100 (b)—, respecto al eje neutro  $z$ . Para nuestra sección

$$dA = b dy$$

y la integral vale

$$\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} by dy = \left| \frac{by^2}{2} \right|_{y_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left[ \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right] \tag{d}$$

El mismo resultado puede obtenerse multiplicando el área  $b \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - y_1 \right]$  de la parte rayada por la distancia  $\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right) + y_1 \right]$  de su centro de gravedad al eje neutro de la sección.

Sustituyendo (d) en la ecuación (64), se obtiene para la sección rectangular

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{2I_z} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \tag{65}$$

Se ve que las fatigas cortantes  $\tau_{xy}$  se distribuyen de modo variado desde la parte superior a la inferior de la viga. El máximo valor se presenta para  $y_1 = 0$ , es decir, para los puntos de la línea neutra, y es (ecuación 65):

$$(\tau_{xy})_{\text{máx}} = \frac{Vh^2}{8I_z};$$

y como

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad (\tau_{xy})_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{bh}. \tag{66}$$

Se ve, por tanto, que la fatiga cortante máxima en el caso

de una sección rectangular es un 50 por 100 mayor que la fatiga cortante media obtenida dividiendo la fuerza cortante por el área de la sección.

En los extremos superior e inferior de la sección recta,  $y_1 = \pm \frac{h}{2}$  y la ecuación (65) da  $\tau_{xy} = 0$ . La representación gráfica de la ecuación (65) —fig. 100 (c)— muestra que la distribución de fatiga cortante a lo largo de la altura de la viga sigue una ley parabólica. El área rayada, limitada por la parábola, multiplicada por el ancho de la viga, da  $\frac{2}{3} (\tau_{xy})_{m\acute{a}x} hb = V$ , como es natural que ocurriese.

Una consecuencia lógica de estas fatigas cortantes es la distorsión por la que las secciones, inicialmente planas, se alabean.

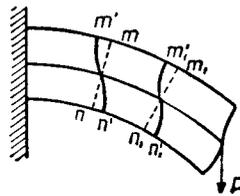


FIG. 101

Este alabeamiento puede observarse fácilmente flexando por la acción de una fuerza en su extremo una pieza de goma de sección rectangular (fig. 101), en cuyas caras laterales se hayan trazado líneas verticales. Las líneas no permanecen rectas, tal como se indica de puntos en la figura, sino que se curvan de tal modo que la distorsión máxima se presenta en la superficie neutra. En los puntos  $m', m'_1, n', n'_1$ , la distorsión es cero y las curvas  $m'n'$  y  $m'_1n'_1$  quedan normales a las superficies superior e inferior de la barra después de la flexión. En la superficie neutra los ángulos que forman las tangentes a las curvas  $m'n'$  y  $m'_1n'_1$  y las secciones normales  $mn$  y  $m_1n_1$  valen  $\gamma = \frac{1}{G} (\tau_{xy})_{m\acute{a}x}$ .

Si la fuerza cortante permanece constante a lo largo de la viga, el alabeamiento de todas las secciones rectas es el mismo, de modo que  $mm' = m_1m'_1$ ,  $nn' = n_1n'_1$  y el acortamiento o alargamiento de las fibras longitudinales producido por la flexión es el mismo que si no existiese dicha fuerza y estuviésemos en un caso de flexión pura.

Esto explica la validez de la ecuación (57), establecida en la hipótesis de que las secciones primitivamente planas lo son después de la flexión.

Un estudio más detenido del problema<sup>1</sup> muestra que el alabeamiento de las secciones rectas no afecta de modo sustancial a la deformación de las fibras longitudinales si sobre la viga actúa una carga distribuida y la fuerza cortante varía de modo continuo a lo largo de la viga.

En el caso de cargas concentradas, la distribución de fatigas en las proximidades de la carga es más complicada; pero esta complicación tiene un carácter local (véase Segunda parte).

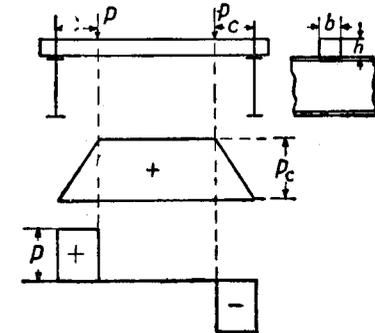


FIG. 102

Problemas

1. Determinar el valor límite de las cargas  $P$  que obran sobre la viga rectangular de madera de la figura 102, si  $b = 20$  cm.,  $h = 25$  cm.,  $\sigma_t = 60$  kg./cm.<sup>2</sup>,  $\tau_t = 15$  kg./cm.<sup>2</sup>,  $c = 45$  cm.

Solución: Los diagramas del momento flector y de la fuerza cortante son los de la figura 102:

$$V_{m\acute{a}x} = P; \quad M_{m\acute{a}x} = P \cdot c.$$

Por las ecuaciones

$$\frac{Pc}{Z} = \sigma_t \quad \text{y} \quad \frac{3}{2} \frac{P}{bh} = \tau_t,$$

se obtiene

$$P = 2.778 \text{ kg.} \quad \text{y} \quad P = 5.000 \text{ kg.}$$

Por consiguiente,  $P = 2.778$  kg. es el valor admisible de la carga  $P$ .

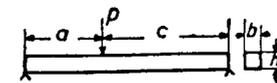


FIG. 103

2. Determinar la fatiga normal máxima  $\sigma_x$  y la fatiga cortante máxima  $\tau_{xy}$  en el plano neutro de la viga representada en la figura 103, si  $a = 60$  cm.,  $c = 1,20$  m.,  $b = 20$  cm.,  $h = 25$  cm. y  $P = 3.000$  kg.

Respuesta:

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = 57 \text{ kg./cm.}^2; \quad (\tau_{xy})_{m\acute{a}x} = 6 \text{ kg./cm.}^2$$

<sup>1</sup> Véase W. Voigt, *Göttingen Abhandlungen*, Bd. 34, 1887; J. H. Michell, *Quart. J. of Math.*, vol. 32, 1901, y L. N. G. Filon, *Phil. Trans. Roy. Soc. (Ser. A)*, vol. 201, 1903, y *London Roy. Soc. Proc.*, vol. 72, 1904.

3. Determinar la fatiga cortante máxima en el plano neutro de una viga rectangular cargada uniformemente si la longitud de la viga es  $l = 1,80$  m., la carga por m.  $q = 1.700$  kg., la altura de la sección  $h = 25$  cm. y el ancho  $b = 20$  cm.

Respuesta:

$$\tau_{\max} = 4,59 \text{ kg./cm.}^2.$$

4. Determinar la fatiga cortante máxima en el problema 2 del artículo 25.

27. Distribución de las fatigas cortantes en el caso de una sección circular.—Al considerar la distribución de las fatigas cortantes en una sección circular (fig. 104), no puede aceptarse la hipótesis de que dichas fatigas son paralelas a la fuerza cortante  $V$ . Se puede ver fácilmente que en los puntos tales como  $p$  del perímetro —figura 104 (b)—, la fatiga debe ser tangente a dicho perímetro. Consideremos un elemento infinitesimal  $abcd$ —fig. 104 (c)—, en forma de paralelepípedo rectangular, con la cara  $adfg$

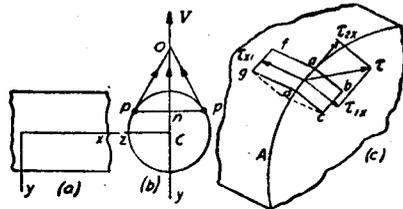


FIG. 104

en la superficie de la viga y la cara  $abcd$  en el plano  $yz$  de la sección. Si la fatiga cortante que actúa sobre la cara  $abcd$  del elemento tuviese una dirección tal como  $\tau$ , se podría descomponer en dos componentes  $\tau_{1x}$  en dirección radial y otra  $\tau_{2x}$  en la dirección de la tangente al perímetro.

Hemos demostrado anteriormente (véase pág. 106) que si una fatiga cortante  $\tau$  actúa sobre un área elemental, otra fatiga cortante igual actúa sobre un área elemental perpendicular a  $\tau$ . Aplicándolo a nuestro caso, se deduce que si la fatiga  $\tau_{1x}$  actúa sobre el elemento  $abcd$  en dirección radial, debe existir otra fatiga cortante  $\tau_{2x}$  del mismo valor en la cara  $adfg$  que sigue la superficie de la viga. Si la superficie lateral de la viga está libre de fatigas cortantes, la componente radical  $\tau_{1x}$  de la fatiga cortante  $\tau$  debe ser cero, es decir,  $\tau$  debe actuar en la dirección de la tangente al perímetro de la sección recta de la viga. En el punto medio  $n$  de la cuerda  $pp$ , la simetría obliga a que la fatiga cortante tenga la dirección de la fuerza cortante  $V$ . Vemos

pues, que las direcciones de las fatigas cortantes en los puntos  $p$  y  $n$  se cortan en un punto  $O$  del eje  $y$ —fig. 104 (b)—. Suponiendo ahora que la fatiga cortante en otro punto cualquiera de la línea  $pp$  está dirigida también hacia el punto  $O$ , tendremos conocida la dirección de las fatigas cortantes. Como hipótesis complementaria, estableceremos que las fatigas cortantes para todos los puntos de  $pp$  tienen la misma componente vertical <sup>1</sup>. Como esta hipótesis coincide por completo con la hecha para la sección rectangular, podrá usarse la ecuación (64) para calcular dicha componente vertical. Conociendo la dirección de la fatiga cortante y su componente vertical, puede calcularse fácilmente su valor para cualquier punto de la sección.

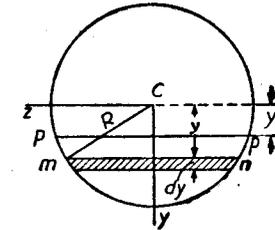


FIG. 105

Vamos a calcular ahora las fatigas cortantes a lo largo de la línea  $pp$  de la sección (fig. 105). Para aplicar la ecuación (64) al cálculo de la componente vertical  $\tau_{xy}$  de estas fatigas, debemos hallar el momento estático del segmento circular de cuerda  $pp$  respecto al eje  $z$ . El área elemental  $mn$  tiene la longitud  $2\sqrt{R^2 - y^2}$  y el ancho  $dy$ . El área será  $dA = 2\sqrt{R^2 - y^2}dy$ . El momento de esta faja respecto a  $Cz$  es  $y dA$ , y el momento total para el segmento circular será

$$\int_{y_1}^R 2\sqrt{R^2 - y^2}y dy = \frac{2}{3}(R^2 - y_1^2)^{3/2}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (64) y tomando  $2\sqrt{R^2 - y_1^2}$  para valor de  $b$ , se obtiene

$$\tau_{xy} = \frac{V(R^2 - y_1^2)}{3I_z}, \tag{67}$$

y la fatiga cortante total en los puntos  $p$  (fig. 105) será

$$\tau = \frac{\tau_{xy}R}{\sqrt{R^2 - y_1^2}} = \frac{VR\sqrt{R^2 - y_1^2}}{3I_z}$$

<sup>1</sup> La diferencia entre la fatiga cortante máxima obtenida por la teoría de la elasticidad y el valor que corresponde a esta teoría aproximada supone un error de un 5 por 100. Véase De Saint Venant, loc. cit., pág. 123. Véase también A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th. ed. 1927, pág. 346.

Se ve que el máximo de  $\tau$  se obtiene para  $y_1 = 0$ , ó, lo que es lo mismo, para la línea neutra de la sección. Poniendo en vez de  $I_z$  su valor  $\frac{\pi R^4}{4}$ , queda finalmente

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}. \quad (68)$$

En el caso de una sección circular, la fatiga cortante máxima es superior en un 33 por 100 al valor medio obtenido dividiendo la fuerza cortante por el área de la sección recta.

28. **Distribución de la fatiga cortante en vigas en I.**—Para estudiar la distribución de fatigas cortantes en las vigas en I (figura 106), a lo largo del alma, se hacen las mismas hipótesis que para la sección rectangular; esto es, que las fatigas cortantes son paralelas a la fuerza cortante  $V$  y que se distribuyen uniformemente sobre el ancho  $b_1$  del alma. Podemos, por consiguiente, usar la ecuación (64) para el cálculo de las fatigas  $\tau_{xy}$ . Para una línea  $pp$  a distancia  $y_1$ , el momento estático de la parte rayada respecto a la línea neutra  $z$  es

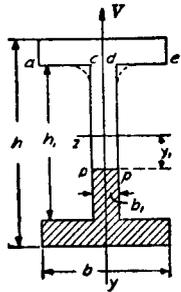


Fig. 106

$$\int_{y_1}^h y dA = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right).$$

Sustituyendo en la ecuación (64), se obtiene

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b_1 I_z} \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right]. \quad (69)$$

La fatiga varía, por consiguiente, a lo largo de la altura de la viga, según una ley parabólica. Los valores máximo y mínimo de  $\tau_{xy}$  en el alma de la viga se obtienen haciendo  $y_1 = 0$  o  $y_1 = \frac{h_1}{2}$ :

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{V}{b_1 I_z} \left[ \frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right]; \quad (70)$$

$$(\tau_{xy})_{\min} = \frac{V}{b_1 I_z} \left( \frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right). \quad (71)$$

Cuando  $b_1$  es muy pequeña comparada con  $b$ , no hay gran diferencia entre  $(\tau_{xy})_{\min}$  y  $(\tau_{xy})_{\max}$  y la distribución de las fatigas cortantes a lo largo de la sección recta del alma es prácticamente uniforme.

Una buena aproximación para  $(\tau_{xy})_{\max}$  se obtiene dividiendo la fuerza cortante total  $V$  por el área de la sección recta del alma solamente. Esto se deduce de que las fatigas cortantes distribuidas sobre la sección recta del alma equivalen a una fuerza cortante casi igual a  $V$ , es decir, que el alma absorbe casi toda la fuerza cortante y las alas intervienen sólo de un modo secundario en su transmisión. Hagamos la suma de las fatigas  $\tau_{xy}$  que actúan sobre el alma de la viga y llamemos  $V_1$  a esta suma.

$$V_1 = \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \tau_{xy} b_1 dy, \text{ por la ecuación (69):}$$

$$V_1 = \frac{V}{b_1 I_z} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right] b_1 dy$$

que integrada da

$$V_1 = \frac{V}{I_z} \left[ \frac{h(h-h_1)}{2} \cdot \frac{h+h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{2} + \frac{b_1 h_1^3}{12} \right]. \quad (a)$$

Para espesores pequeños en las alas,  $h_1$  se aproxima a  $h$  y el momento de inercia  $I_z$  puede calcularse con suficiente aproximación por la ecuación

$$I_z = \frac{b(h-h_1)}{2} \cdot \frac{(h+h_1)^2}{8} + \frac{b_1 h_1^3}{12}, \quad (b)$$

en la que el primer término representa el área de la sección de las alas multiplicada por el cuadrado de la distancia  $\frac{h+h_1}{4}$  de sus centros al eje  $z$ , lo que aproximadamente representa el momento de inercia de las alas. El segundo término es el momento de inercia del alma de la sección. Comparando (a) y (b), se ve que cuando  $h_1$  se aproxima a  $h$ , la fuerza  $V_1$  lo hace a  $V$  y que la fuerza cortante es absorbida solamente por el alma de la sección.

Al considerar la distribución de fatigas cortantes en las alas no puede aceptarse la hipótesis de reparto uniforme a lo largo del ancho de la sección. Por ejemplo, a lo largo de  $ae$  (fig. 106), en las partes correspondientes al perímetro de la sección  $ac$  y  $de$ , la fatiga cortante  $\tau_{xy}$  debe ser cero, puesto que la fatiga correspondiente  $\tau_{yz}$  de la superficie libre lo es —véase pág. 111 y también fig. 104 (c)—, mientras que en el trozo  $cd$  la fatiga cortante no es cero, sino la que hemos calculado en el alma y representado con  $(\tau_{xy})_{\min}$ . Esto indica que en la unión  $cd$  del alma y las alas la distribución de fatigas cortantes sigue una ley más complicada que la obtenida con nuestro análisis elemental. Para disminuir la concentración de fatiga en los puntos  $c$  y  $d$ , se redondean los ángulos de unión tal como se indica en la figura con líneas de puntos. Más adelante se analizará detalladamente la distribución de las fatigas cortantes en las alas (véase *Segunda parte*).

Problemas

1. Determinar  $(\tau_{xy})_{\max}$  y  $(\tau_{xy})_{\min}$  en el alma de una viga en I (figura 106), si  $b = 12,5$  cm.,  $b_1 = 1,25$  cm.,  $h = 30$  cm.,  $h_1 = 26 \frac{1}{4}$  cm.  $V = 15.000$  kg. Determinar la fuerza cortante  $V_1$  absorbida por el alma.

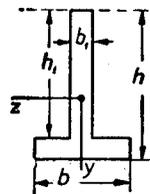


FIG. 107

Respuesta:

$$(\tau_{xy})_{\max} = 470 \text{ kg./cm.}^2; \quad (\tau_{xy})_{\min} = 354 \text{ kg./cm.}^2;$$

$$V_1 = 0,945 V.$$

2. Determinar la fatiga cortante máxima en el alma de una viga en T (fig. 107), si  $h = 20$  cm.,  $h_1 = 17 \frac{1}{2}$  cm.,  $b = 10$  cm.,  $b_1 = 2 \frac{1}{2}$  cm. y  $V = 500$  kg.

Respuesta: Utilizando un método análogo al de la viga en I se encuentra  $(\tau_{xy})_{\max} = 14$  kg./cm.<sup>2</sup>.

3. Determinar las fatigas cortantes máximas en los problemas 1 y 6 del artículo 25.

29. **Fatigas principales en la flexión.**—Utilizando las ecuaciones (57) y (64), puede calcularse la fatiga normal  $\sigma_x$  y la cortante  $\tau_{xy}$  para cualquier punto de la sección recta en cuanto se conozca el valor del momento flector  $M$  y de la fuerza cortante  $V$  para dicha sección. El valor máximo de  $\sigma_x$  corresponde a las fibras más alejadas de la línea neutra; por el contrario, generalmente el máximo valor de  $\tau_{xy}$  se presenta en dicha línea. En la

mayoría de los casos solamente estos valores máximos de  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  obtenidos del modo indicado son los que se usan para el proyecto de las dimensiones de la viga, escogiéndolas de modo que satisfagan a las condiciones

$$(\sigma_x)_{\max} \leq \sigma_t \quad \text{y} \quad (\tau_{xy})_{\max} \leq \tau_t$$

Esto, suponiendo que el material resiste por igual los esfuerzos de tracción y compresión y que  $\sigma_t$  es el mismo para ambas fatigas. Si no, las limitaciones serán:

$$(\sigma_x)_{\max} \leq \sigma_t \text{ para la tracción; } \quad (\sigma_x)_{\min} \geq \sigma_c \text{ para compresión.}$$

Hay casos, sin embargo, que requieren un análisis más detallado de las condiciones de fatiga. Vamos a exponer el proce-

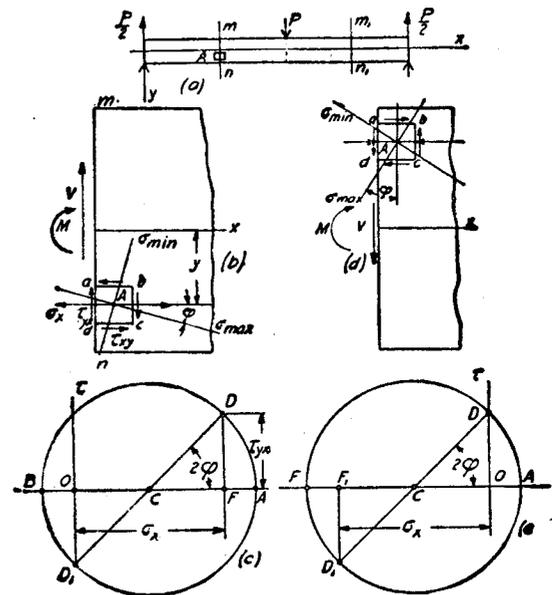


FIG. 108

dimiento a seguir en estos casos, considerando el de una viga simplemente apoyada y cargada en el centro (fig. 108). Para un punto  $A$  situado por debajo de la línea neutra, el valor de las fatigas  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  viene dado por las ecuaciones (57) y (64). En la figura 108 (b) se ve el modo de actuar sobre un elemento

infinitesimal separado de la viga alrededor del punto  $A$ , deducido del sentido con que actúan  $M$  y  $V$ . Siendo este elemento infinitesimal puede suponerse que  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  son constantes a lo largo de él y, por tanto, el elemento infinitesimal citado está en el mismo estado de fatiga que el elemento de dimensiones finitas de la figura 37 (a). En aquel caso (véase pág. 44), vimos que las fatigas ligadas a las caras de un elemento tomado del cuerpo en estado de sollicitación varían con las direcciones de estas caras y que es posible escoger las caras de tal forma que solamente se presenten fatigas normales (véase pág. 45). Estas direcciones se llaman principales y las fatigas correspondientes, fatigas principales. La magnitud de estas fatigas puede encontrarse por las ecuaciones (31) y (32), sustituyendo en ellas  $\sigma_y = 0$ . De este modo se obtiene

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (72)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (73)$$

Donde se ve que  $\sigma_{\max}$  es siempre extensión y  $\sigma_{\min}$  siempre compresión. Conociendo las fatigas principales la fatiga cortante máxima en el punto será (ecuación 34)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (74)$$

Para determinar las direcciones de las fatigas principales, puede utilizarse el círculo de Mohr. Para un punto tal como el  $A$  —fig. 108 (b)—, el círculo de Mohr será el de la figura 108 (c). Tomando la distancia  $\overline{OF} = \sigma_x$  y  $\overline{DF} = \tau_{xy}$ , el punto  $D$  representará las fatigas sobre los lados  $bc$  y  $ad$  del elemento. La distancia  $\overline{OF}$  se ha tomado en la dirección positiva de  $\sigma$  y  $\overline{DF}$  hacia arriba, por ser  $\sigma_x$  una fatiga de extensión y por dar un par en el sentido de las agujas del reloj las fatigas cortantes  $\tau_{xy}$  que actúan sobre los lados  $bc$  y  $ad$ . El punto  $D_1$  representa las fatigas ligadas a las otras caras ( $ab$  y  $dc$ ) del elemento, en las que la fatiga normal es cero y la fatiga cortante es negativa. El círculo construido con  $DD_1$  como diámetro determina  $\sigma_{\max} = \overline{OA}$  y  $\sigma_{\min} = -\overline{OB}$ . De la misma figura se deduce el ángulo  $2\varphi$ , y la dirección de  $\sigma_{\max}$  en la figura 108 (b) se obtiene tomando el án-

gulo  $\varphi$  a partir del eje  $x$ , en el sentido de las agujas del reloj. Como ya sabemos,  $\sigma_{\min}$  es perpendicular a  $\sigma_{\max}$ . Tomando una sección  $m_1n_1$  a la derecha de la carga  $P$  —fig. 108 (a)— y considerando un punto  $A$  por encima de la línea neutra, las direcciones de las fatigas ligadas a un elemento  $abcd$  tomado alrededor de  $A$  serán las de la figura 108 (d). El círculo de Mohr correspondiente se ve en la figura 108 (e). El punto  $D$  representa las fatigas ligadas a las caras  $ab$  y  $dc$  del elemento  $abcd$  y el punto  $D_1$  las fatigas sobre las caras  $ad$  y  $bc$ . El ángulo  $\varphi$  y la dirección de las fatigas principales serán los de la figura 108 (d).

Si tomamos un punto en la superficie neutra,  $\sigma_x$  valdrá cero y el elemento en este punto estará sometido a esfuerzo cortante

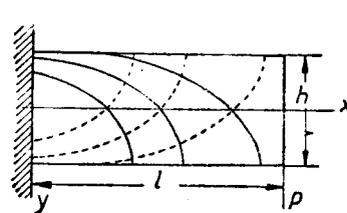


FIG. 109

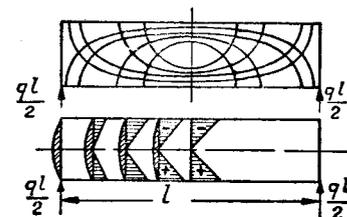


FIG. 110

puro. Las direcciones de las fatigas principales formarán ángulos de  $45^\circ$  con los ejes  $x$  e  $y$ .

Se puede, repitiendo para diversos puntos las construcciones detalladas anteriormente, determinar dos sistemas de curvas ortogonales cuyas tangentes tengan en cada punto las direcciones de las fatigas principales en ese punto. Estas curvas no son otra cosa sino las envolventes de las direcciones principales y se denominan «trayectorias de las fatigas» o líneas isostáticas. La figura 109 muestra las trayectorias de las fatigas principales para el caso de una viga de sección rectangular en ménsula cargada en el extremo libre. Todas las curvas cortan a  $45^\circ$  a la superficie neutra y tienen tangentes horizontales o verticales en los puntos en que  $\tau_{xy}$  es cero, es decir, en las caras superior e inferior de la viga. Las trayectorias que dan la dirección de  $\sigma_{\max}$  están representadas con línea llena y el otro sistema de trayectorias con líneas de puntos. La figura 110 da las trayectorias y los diagramas de distribución de las fatigas  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  para las di-

versas secciones rectas de una viga rectangular simplemente apoyada bajo la acción de una carga uniformemente repartida. Se ve claramente que  $\sigma_x$  tiene su valor máximo en el centro y que  $\tau_{xy}$  es máximo en los apoyos, lugar donde actúa la máxima fuerza cortante<sup>1</sup>.

Para calcular una viga, lo interesante es conocer el valor máximo de  $\sigma$ . En la ecuación (72) se ve que en las fibras más alejadas para las que es máximo el esfuerzo normal  $\tau_{xy}$ , es cero, por lo que  $\sigma_x$  es fatiga principal, es decir,  $\sigma_{m\acute{a}x} = (\sigma_x)_{m\acute{a}x}$ . Para fibras más próximas a la línea neutra,  $\sigma_x$  es menor; pero tenemos, en cambio, una fatiga cortante  $\tau_{xy}$  que al actuar unida a  $\sigma_x$  puede producir en el punto una fatiga principal, dada por

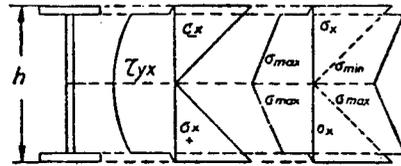


FIG. 111

la ecuación (72), mayor numéricamente que la encontrada para la fibra más alejada. En el caso de vigas de sección rectangular o circular, en las que  $\tau_{xy}$  varía de modo continuo según la altura, no es frecuente este caso y la fatiga  $(\sigma_x)_{m\acute{a}x}$  calculada para la fibra más alejada en la sección en que el momento flector es máximo es la fatiga máxima que actúa en la viga. Hay casos, sin embargo, como en las secciones en I, en los que puede ser máxima la fatiga en puntos distintos de los más alejados de la línea neutra. La variación brusca de fatiga cortante que en este tipo de vigas hemos visto se presenta en la unión de las alas y el alma puede originar que la fatiga máxima en los puntos de esta unión sea superior a la fatiga de extensión  $(\sigma_x)_{m\acute{a}x}$  en las fibras más alejadas. Como ejemplo, consideremos el caso de carga de la figura 108 (a) con una viga en I de las dimensiones del problema 1 (pág. 116): la longitud  $l = 60$  cm. y  $P = 50.000$  kilogramos. Entonces,  $M_{m\acute{a}x} = 450.000$  kg./cm.;  $V_{m\acute{a}x} = 15.000$  kilogramos. Por la ecuación (57), la fatiga de extensión en la fibra más alejada será

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = 604 \text{ kg./cm.}^2.$$

<sup>1</sup> En la obra de I. Wagner, *Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Archit Ver.*, página 615, 1911, se discuten varios ejemplos de construcción de trayectorias de tensiones.

En un punto de la unión del alma y las alas, las fatigas son

$$\sigma_x = \frac{604 \times 26^1}{30} = 528,8 \text{ kg./cm.}^2;$$

$$\tau_{xy} = 35,4 \text{ kg./cm.}^2.$$

Empleando la ecuación (72) se obtiene para la fatiga principal el valor

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 706,4 \text{ kg./cm.}^2.$$

Se ve que  $\sigma_{m\acute{a}x}$ , en la unión del alma y las alas, es mayor que las fatigas en las fibras más alejadas y, por consiguiente, debe tenerse en cuenta al proyectar la viga. Las variaciones de  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_{m\acute{a}x}$  y  $\sigma_{m\acute{i}n}$  a lo largo de la altura de la viga se ven en la figura 111.

**Problemas**

1. Determinar  $\sigma_{m\acute{a}x}$  y  $\sigma_{m\acute{i}n}$  en un punto a 5 cm. por debajo de la línea neutra en una sección distante 90 cm. del extremo cargado de una viga en ménsula (fig. 109), si la altura es  $h = 20$  cm., el ancho  $b = 10$  cm. y  $P = 1.000$  kg. Determinar el ángulo entre  $\sigma_{m\acute{a}x}$  en este punto y el eje  $x$ .

Solución:

$$(\sigma_x) = -67,5 \text{ kg./cm.}^2, \tau_{xy} = 5,6 \text{ kg./cm.}^2, \sigma_{m\acute{a}x} = 0,45 \text{ kg./cm.}^2,$$

$$\sigma_{m\acute{i}n} = -67,9 \text{ kg./cm.}^2.$$

El ángulo entre  $\sigma_{m\acute{a}x}$  y el eje  $x$  es  $85^\circ 16'$ , medido en sentido dextrorso.

2. Determinar  $\sigma_{m\acute{a}x}$  y  $\sigma_{m\acute{i}n}$  para la línea neutra de una sección situada a 30 cm. del apoyo izquierdo en una viga de sección rectangular cargada uniformemente y apoyada en los extremos (fig. 110). Las dimensiones de la sección recta son las del problema anterior,  $q = 5.000/3$  kg./m.;  $l = 3$  m.

Respuesta:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = -\sigma_{m\acute{i}n} = 15 \text{ kg./cm.}^2.$$

3. Determinar la longitud de la viga en I considerada en la página 120, si  $(\sigma_x)_{m\acute{a}x}$  es igual a  $\sigma_{m\acute{a}x}$  en la unión del alma y las alas.

Respuesta:

$$l = 99 \frac{1}{2} \text{ cm.}$$

30. **Fatigas en vigas compuestas.**—En la práctica de la ingeniería se usan frecuentemente vigas formadas por diversos perfiles unidos a lo largo de la viga, de formas variadas, según el material y las aplicaciones.

Las fatigas en este tipo de vigas se calculan corrientemente suponiendo que las diversas partes de la sección están rígidamente unidas. Los cálculos comprenden: (a), el proyecto de la viga como un sólido único, y (b), el proyecto y separación de los elementos que unen las diversas partes de la viga. Para el primero se emplean las fórmulas que hemos establecido para vigas de una sola pieza, descontando de la sección los huecos que ocupan los roblones, tornillos, pernos, etc. Los cálculos de las uniones los indicaremos por medio de ejemplos.

Sea primeramente una viga de madera compuesta, como indica la figura 99. Las llaves introducidas entre los dos tablones se calculan para que absorban las fuerzas cortantes  $S$  —fig. 99 (b)—. De este modo, el cálculo de  $\sigma_x$  puede hacerse por la ecuación (57). Para tener en cuenta la disminución de sección producida por las llaves y tornillos solamente tendremos en cuenta como útil la sección rayada en la figura 99 (c). De este modo,

$$I_x = \frac{(b-d)}{12} [(2h)^3 - (2c)^3].$$

Para calcular la fuerza cortante  $S$  que actúa sobre cada llave se supone que esta fuerza es igual a la fuerza cortante distribuida en una viga de una sola pieza sobre el área  $eb$  de la superficie neutra, siendo  $b$  el ancho de la viga y  $e$  la distancia entre los puntos medios de dos llaves consecutivas (véase figura 99). Empleando la ecuación (66) y considerando que la altura de la viga es igual a  $2h$  en este caso, se obtiene

$$S = eb \cdot \frac{3}{2} \frac{V}{b2h} = \frac{3}{2} \frac{Ve}{2h}. \quad (75)$$

Las dimensiones de las llaves y la distancia  $e$  entre ellas deberán escogerse de modo que la llave y las entalladuras de la viga resistan con seguridad a los esfuerzos que las solicitan. Se acostumbra a suponer que las fatigas cortantes se distribuyen de modo uniforme en la sección media  $a \times b$  de la llave y que la presión de las caras laterales de dichas llaves se distribuye uniformemente sobre las áreas  $c \times b$ . Representando por  $\tau$  la fatiga cortante de trabajo para las llaves y por  $\sigma'_i$  la fatiga de

trabajo para la compresión lateral de la madera de llaves y entalladuras, se tendrán las limitaciones siguientes:

$$\frac{S}{ab} \leq \tau_i; \quad \frac{S}{bc} \leq \sigma'_i.$$

Es necesario también limitar la fatiga cortante para la madera de la viga comprendida entre dos llaves.

La fuerza cortante es también  $S$  y el área resistente  $b(e-a)$ . Representando con  $\tau'_i$  la fatiga cortante de trabajo del material de la viga a lo largo de las fibras, se tendrá

$$\frac{S}{b(e-a)} \leq \tau'_i.$$

Además de las llaves se acostumbra a poner pernos que enlazan las partes de la viga. Por la acción de la presión desarrollada al apretar los pernos se produce rozamiento entre las partes de la viga que absorbe esfuerzo cortante. Este rozamiento se acostumbra a despreciar en los cálculos y se supone, tal como hemos hecho, que la totalidad de la fuerza cortante la absorben las llaves. Los ensayos realizados con vigas de madera compuestas han mostrado que son menos resistentes que las vigas de una sola pieza de las mismas dimensiones<sup>1</sup>.

Para el cálculo de  $\sigma_x$  en vigas en I compuestas, el efecto de los agujeros para el remachado se acostumbra a tener en cuenta suponiendo que todos los agujeros están en la misma sección recta —fig. 112 (a)— de la viga<sup>2</sup> y prescindiendo de sus secciones diametrales al calcular el  $I_x$  de la sección, que luego se ha de emplear en la ecuación (57).

Para calcular la fatiga cortante máxima  $\tau_{xy}$  se tiene también en cuenta el aligeramiento de la sección producido por los agujeros del roblonado. Debe disminuirse la sección del alma por el efecto de los agujeros en la relación  $\frac{e-d}{e}$ , siendo  $e$  la dis-

<sup>1</sup> Los experimentos realizados por el profesor E. Kidwell en el Michigan College of Mines muestran que las vigas de madera compuestas tienen alrededor del 75 por 100 de la resistencia de las vigas macizas de las mismas dimensiones.

<sup>2</sup> Los agujeros en el alma se presentan únicamente en las secciones correspondientes al roblonado de los angulares de refuerzo.

tancia entre centros de agujeros y  $d$  el diámetro de ellos. Por esto, el factor  $\frac{e}{e-d}$  se incluye corrientemente en el segundo miembro de la ecuación (64) para el cálculo de  $\tau_{xy}$  en el alma de las vigas en I compuestas.

Este modo de calcular el efecto debido a los agujeros es una grosera aproximación. El estudio de la concentración de la fa-

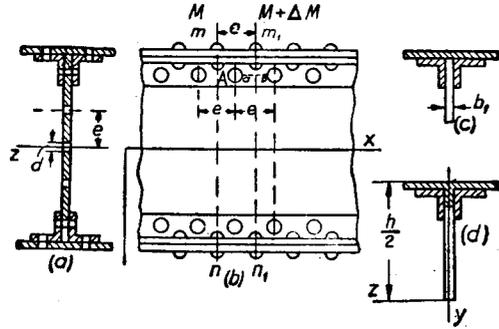


FIG. 112

tiga en los alrededores de un agujero se verá más adelante (véase Segunda parte). Para calcular la fuerza cortante que obra sobre un remache, tal como el  $A$  —fig. 112 (b)—, consideremos las dos secciones rectas  $mn$  y  $m_1n_1$ . Debido a la diferencia de momentos flectores en esas secciones, las fatigas normales  $\sigma_x$  en las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$  serán diferentes y existirá una fuerza que tiende a deslizar el ala de la viga rayada en la —figura 112 c—, a lo largo del alma. Este deslizamiento se evita por las fuerzas de rozamiento y por el remache  $A$ . Despreciando el rozamiento, la fuerza que actúa sobre el remache es la diferencia de las fuerzas que actúan en las secciones  $mn$  y  $m_1n_1$  del ala. La fuerza en el ala para la sección  $mn$  es (véase ecuación (a), pág. 108):

$$\frac{M}{I_z} \int ydA,$$

extendiéndose la integral al área rayada. Del mismo modo, para la sección  $m_1n_1$  se obtiene

$$\frac{(M + \Delta M)}{I_z} \int ydA.$$

La fuerza transmitida por el remache  $A$  desde el ala al alma será

$$S = \frac{\Delta M}{I_z} \int ydA. \tag{a}$$

Usando la ecuación (50) y sustituyendo  $dx$  por la distancia  $e$  entre remaches, se obtiene

$$\Delta M = Ve,$$

donde  $V$  es la fuerza cortante para la sección de la viga que pasa por el roblón  $A$ . Sustituyendo en la ecuación (a), se obtiene

$$S = \frac{Ve}{I_z} \int ydA. \tag{76}$$

La integral de esta ecuación representa el momento de la sección del ala —parte rayada de la fig. 112 (c)— con relación al eje neutro  $z$ .

Se ve fácilmente que el roblón está solicitado por esta fuerza total a través de dos secciones rectas. Suponiendo que dicha fuerza  $S$  se distribuye uniformemente sobre estas dos secciones, la fatiga cortante en el roblón será

$$\tau = \frac{S}{2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2Ve}{\pi d^2 I_z} \int ydA. \tag{77}$$

La fuerza  $S$  produce al mismo tiempo una fatiga cortante en el alma de la viga a lo largo del plano  $ab$  —véase figura 112 (b)—. Suponiendo que esta fatiga se distribuye de modo uniforme a lo largo del área  $b_1(e-d)$ , se obtiene

$$\tau' = \frac{V}{b_1 I_z} \cdot \frac{e}{e-d} \int ydA. \tag{b'}$$

A esta fatiga producida por las fuerzas  $S$  transmitidas desde las alas debe añadirse la  $\tau''$  debida a la flexión del alma. La magnitud de estas fatigas se obtendrá utilizando la ecuación (b), en la que  $\int ydA$  se referirá ahora a la porción de sección rectangular del alma situada por encima del plano  $ab$ . De este modo

se llega a la expresión siguiente para la fatiga cortante  $\tau_{yz}$  en el alma a través de la sección  $ab$ :

$$\tau_{yz} = \tau' + \tau'' = \frac{V}{b_1 I_z} \cdot \frac{e}{e-d} \int y dA, \quad (78)$$

extendiéndose la integral al área que aparece rayada en la figura 112 (d). Conociendo  $\sigma_x$  y  $\tau_{yz}$ , pueden calcularse  $\sigma_{m\acute{a}x}$  y  $\sigma_{m\acute{i}n}$  para los puntos del plano  $ab$  mediante las ecuaciones (72) y (74) y determinarse las direcciones de estas fatigas principales.

El cálculo de las fatigas en las vigas en I compuestas hemos visto que exige la admisión de varias hipótesis con el fin de simplificar los cálculos. Esto reduce en cierto modo la seguridad en los valores calculados para las fatigas, lo que deberá tenerse en cuenta al elegir los valores de las fatigas de trabajo<sup>1</sup>, rebajándolos convenientemente.

### Problemas

1. Una viga de madera compuesta (fig. 99) está formada por dos tablones de sección rectangular unidos por llaves. Determinar la fuerza cortante que obra sobre las llaves, la fatiga cortante en ellas y la presión por unidad de área en sus caras laterales si la carga  $P = 2.500$  kg., el ancho de la viga  $b = 12\frac{1}{2}$  cm., la altura  $2h = 40$  cm., el ancho de la llave  $a = 7\frac{1}{2}$  cm., su altura  $2c = 6\frac{1}{4}$  cm. y la distancia entre centros de llaves  $e = 27\frac{1}{2}$  cm.

Respuesta:

$$S = \frac{3}{2} \cdot \frac{1.250 \times 27\frac{1}{2}}{40} = 1.290 \text{ kg.}$$

La fatiga cortante en la llave es

$$\tau = \frac{1.290}{12\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}} = 13,7 \text{ kg./cm.}^2$$

La presión por unidad de área en la cara lateral es

$$p = \frac{S}{bc} = \frac{1.290 \times 2}{6\frac{1}{4} \times 12\frac{1}{2}} = 33 \text{ kg./cm.}^2$$

<sup>1</sup> Experimentalmente se ha comprobado que la rotura de vigas en I se debe generalmente al pandeo del ala comprimida o del alma (véase H. F. Moore, Universidad de Illinois, *Boletín* núm. 68, 1913). El problema del pandeo se examinará más adelante. La influencia de la flexión de los roblones en la distribución de las fatigas en las vigas en I ha sido discutido por I. Arnovlevic, *Zeitschr. f. Architekt. u. Ingenieurwesen*, pág. 57, 1910. Los resultados obtenidos para vigas de dimensiones corrientes indican que las fatigas aumentan alrededor de un 6 por 100.

2. Determinar la fatiga cortante en la línea neutra de una viga cuya alma tiene  $1\frac{7}{8}$  cm. de grueso y 125 cm. de altura y cuyas alas están formadas por dos pares de angulares de  $15 \times 15 \times 1\frac{1}{4}$  cm. cuando la fuerza cortante total en la sección sea 75.000 kg. Determinar también las fatigas cortantes en los roblones que unen las alas al alma si el diámetro de estos roblones es 2,5 cm. y la distancia entre centros de roblones  $e = 10$  cm. (fig. 112).

Solución: Para las dimensiones dadas se tiene:

$$I_z = 796875 \text{ cm.}^4.$$

El momento de media sección con relación al eje neutro es

$$\int_0^{\frac{b}{2}} y dA = 7844 \text{ cm.}^3.$$

De la ecuación (64) se obtiene

$$(\tau_{xy})_{m\acute{a}x} = \frac{75.000 \times 7.844}{\frac{3}{4} \times 796875} = 393,6 \text{ kg./cm.}^2.$$

Si se considera el efecto de los agujeros de los roblones se obtiene

$$(\tau_{xy})_{m\acute{a}x} = \frac{e}{e-d} \times 393,6 = \frac{4}{3} \times 393,6 = 524,8 \text{ kg./cm.}^2.$$

La fuerza  $S$  transmitida por un roblón, deducida de la ecuación (76), será

$$S = 3.940 \text{ kg.}$$

La fatiga cortante en el roblón, ecuación (77), es:

$$\tau = \frac{3.940 \times 2}{3,14 \times 2,5^2} = 401 \text{ kg./cm.}^2$$

3. Determinar  $\sigma_{m\acute{a}x}$  en los puntos del plano  $ab$  (fig. 112), situado a  $53\frac{3}{4}$  cm. de la línea neutra si las dimensiones de la viga son las del problema anterior,  $V = 75.000$  kg. y el momento flector  $M = 375 \times 10^4$  kg.  $\times$  cm.

Solución: De la ecuación (78) se obtiene

$$\tau_{yz} = 344 \text{ kg./cm.}^2$$

$$\sigma_x = 252,8 \text{ kg./cm.}^2$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{yz}^2} = 492,8 \text{ kg./cm.}^2$$

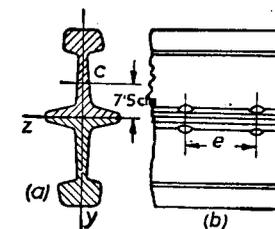


FIG. 113

4. Determinar la fuerza cortante en los roblones que enlazan los dos carriles que forman la viga de la figura 113 si el área de la sección recta de un carril es  $A = 62,5 \text{ cm.}^2$ , la distancia del  $C$  de  $G$  de un carril a su cara inferior es  $c = 7 \frac{1}{2} \text{ cm.}$ , el  $M$  de  $I$  de la sección de un carril respecto al eje que pasa por su  $C$  de  $G$  y es paralelo al eje  $Z$  es  $1562,5 \text{ cm.}^4$ , la distancia entre roblones es  $e = 15 \text{ cm.}$  y la fuerza cortante  $V = 2.500 \text{ kg.}$

Solución:

$$S = 865 \text{ kg.}$$

## CAPITULO V

### DEFORMACIÓN DE VIGAS CARGADAS TRANSVERSALMENTE

31. Ecuación diferencial de la elástica.—Al proyectar una viga interesa corrientemente conocer no sólo las fatigas producidas por las cargas que la solicitan, sino también las deformaciones que dichas cargas producen; en muchos casos, además,

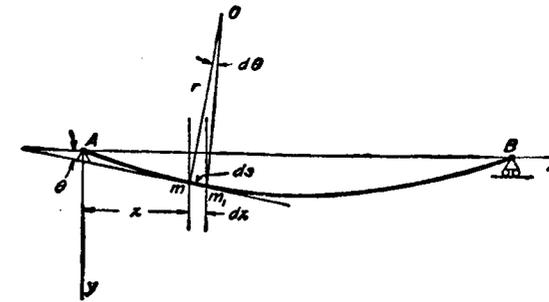


FIG. 114

se impone, como criterio de cálculo, que la flecha máxima no exceda de cierta fracción de la luz.

Sea la curva  $AmB$  (fig. 114) el eje de la viga una vez deformada por la flexión. Esta curva se denomina elástica.

Para encontrar la ecuación diferencial de esta curva tomaremos los ejes coordenados que indica la figura y supondremos que la curvatura de la elástica en cualquier punto depende únicamente del valor del momento flector  $M$  en este punto<sup>1</sup>. En este

<sup>1</sup> El efecto de la fuerza cortante en la curvatura se verá más adelante (véase art. 39). Se encontrará que este efecto es generalmente pequeño y puede despreciarse.

caso, la relación entre curvatura y momento es la misma que en el caso de flexión pura (véase ecuación 56) y, por tanto,

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z} \quad (a)$$

Consideremos dos secciones adyacentes  $m$  y  $m_1$  separadas por  $ds$  sobre la elástica. Si representamos por  $\theta$  el ángulo que la tangente en  $m$  forma con el eje  $x$ , el ángulo que forman las normales a la elástica en  $m$  y  $m_1$  será  $d\theta$ . El punto  $O$  de intersección de estas normales da el centro de curvatura y define la longitud  $r$  del radio de curvatura. Por consiguiente,

$$ds = r d\theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|, \quad (b)$$

Con referencia al signo, debe observarse que el momento flector se toma positivo en la ecuación (a) si produce concavidad hacia arriba (véase pág. 68), siendo, por tanto, positiva la curvatura cuando el centro de curvatura tiene, respecto de la curva, la posición que en la figura 114. Se ve que en este caso el ángulo  $\theta$  disminuye a medida que el punto  $m$  se mueve sobre la curva de  $A$  a  $B$ . Por tanto, a todo incremento positivo  $ds$  corresponde uno negativo  $d\theta$ . Teniendo en cuenta el signo, la ecuación (b) debe escribirse

$$\frac{1}{r} = - \frac{d\theta}{ds} \quad (c)$$

En el caso, general en la práctica, de que las deformaciones sean pequeñas y, por tanto, la elástica de curvatura poco acentuada, puede escribirse con aproximación suficiente

$$ds \approx dx \quad \text{y} \quad \theta \approx \text{tg } \theta = \frac{dy}{dx} \quad (d)$$

Sustituyendo estos valores aproximados de  $ds$  y  $\theta$  en la ecuación (c), se obtiene

$$\frac{1}{r} = - \frac{d^2y}{dx^2} \quad (e)$$

La ecuación (a) será entonces

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M, \quad (79)$$

ecuación diferencial buscada y que debe integrarse en cada caso particular para encontrar las deformaciones de las vigas.

El signo de la ecuación (79) depende de la dirección de los ejes coordinados. Si tomamos, por ejemplo, positivo hacia arriba el eje  $y$  sería necesario escribir

$$\theta \approx - \frac{dy}{dx}$$

en vez de la ecuación (d), y obtendríamos signo más en lugar de menos en el segundo miembro de la ecuación (79).

Cuando estudiemos la deformación de piezas muy esbeltas, en las que las flechas pueden ser grandes, no se pueden hacer las simplificaciones (d) y debe manejarse la expresión exacta

$$\theta = \text{arc tg} \left( \frac{dy}{dx} \right).$$

De donde

$$\frac{1}{r} = - \frac{d\theta}{ds} = - \frac{d \text{arc tg} \left( \frac{dy}{dx} \right) dx}{dx ds} = - \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (f)$$

Comparando este resultado con la ecuación (e) puede deducirse que las simplificaciones que envuelven las ecuaciones (d) son equivalentes a suponer que la cantidad  $\left( \frac{dy}{dx} \right)^2$  existente en el denominador de la fórmula exacta (f) es pequeña comparada con la unidad, y puede, por consiguiente, despreciarse<sup>1</sup>.

Diferenciando la ecuación (79) respecto a  $x$ , y empleando las ecuaciones (50) y (51), se obtiene

$$EI_z \frac{d^3y}{dx^3} = -V$$

y

$$EI_z \frac{d^4y}{dx^4} = q. \quad (80)$$

<sup>1</sup> La expresión exacta de la curvatura (f) fué utilizada en los primeros estudios sobre elásticas. Fué usada, por ejemplo, por L. Euler, en su famoso libro sobre *Curvas elásticas*, del que se ha publicado, en noviembre de 1933, una traducción al inglés en *Isis*, núm. 58 (volumen XX, 1).

Esta última ecuación se utiliza a veces para estudiar la deformación de vigas por la acción de cargas distribuidas.

32. Flexión de una viga uniformemente cargada apoyada en sus extremos (fig. 63).—El momento flector en una sección  $mn$ , a distancia  $x$  del apoyo izquierdo, es

$$M = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

y la ecuación (79) se escribe

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

Multiplicando ambos miembros por  $dx$  e integrando, se obtiene

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C, \quad (a)$$

donde  $C$  es una constante de integración que debe satisfacer las condiciones del problema. Debido a la simetría, la pendiente en el centro de la elástica es cero. Haciendo  $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ , cuando  $x = \frac{l}{2}$ , se obtiene

$$C = \frac{ql^3}{24}$$

y la ecuación (a) se transforma en

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24} \quad (b)$$

Integrando otra vez,

$$EI_2 y = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3x}{24} + C_1. \quad (c)$$

La nueva constante de integración se obtiene por la condición de que la flecha en el apoyo es cero, es decir, para  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la ecuación (c), lo que da  $C_1 = 0$ . La ecuación de la elástica será, por tanto,

$$y = \frac{q}{24 EI_z} (l^3x - 2lx^3 + x^4). \quad (81)$$

La flecha máxima acontece en el punto medio de la luz. Haciendo  $x = \frac{l}{2}$  en la ecuación (81) se encuentra

$$y_{\text{máx}} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z}. \quad (82)$$

La pendiente máxima acontece en el extremo izquierdo de la viga. Poniendo  $x = 0$  en la ecuación (b), se obtiene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{máx}} = \frac{ql^3}{24 EI_z}. \quad (83)$$

En el caso de una ménsula cargada uniformemente —figura 115 (a)—, el momento flector en una sección  $mn$  a distancia  $x$  del extremo izquierdo es

$$M = -\frac{qx^2}{2},$$

y la ecuación (79) se escribe

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}.$$

La primera integración da

$$EI_z \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C. \quad (a)$$

La constante de integración se obtiene por la condición de pendiente nula en el extremo empotrado, es decir,  $\frac{dy}{dx} = 0$  para  $x = l$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación (a) se encuentra

$$C = -\frac{ql^3}{6}.$$

La segunda integración da

$$EI_2 y = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3x}{6} + C_1. \quad (b)$$

La constante  $C_1$  se encuentra por la condición de flecha nula

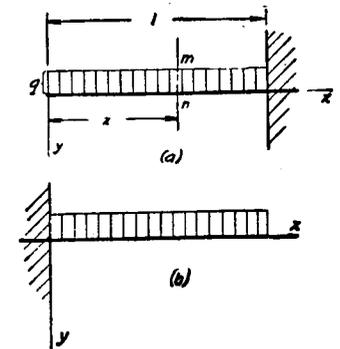


FIG. 115

en el extremo empotrado. Sustituyendo, por tanto,  $x = l$  e  $y = 0$  en la ecuación (b), se obtiene

$$C_1 = \frac{ql^4}{8}$$

Escribiendo este valor de  $C_1$  en la ecuación (b) tenemos

$$y = \frac{q}{24 EI} (x^4 - 4l^3x + 3l^4). \quad (84)$$

Esta ecuación corresponde, por consiguiente, a la elástica de una ménsula cargada uniformemente. Si la ménsula tiene empotrado el extremo izquierdo en lugar del derecho —fig. 115 (b)—, la elástica se obtiene escribiendo  $(l - x)$  en lugar de  $x$  en la ecuación (84). De esta forma se encuentra

$$y = \frac{q}{24 EI} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2). \quad (85)$$

#### Problemas

1. Una viga de madera simplemente apoyada y cargada de modo uniforme tiene de vano 3 m. Hallar la flecha máxima si  $(\sigma_x)_{\max} = 80$  kg./cm.<sup>2</sup>,  $E = 10^5$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $q = 7$  kg./cm.

2. Hallar la altura de una viga de acero en I, simplemente apoyada y uniformemente cargada, cuya luz es 3 m., si la fatiga máxima por flexión es 1.200 kg./cm.<sup>2</sup> y la flecha máxima 3 mm.

3. Una ménsula de luz 3 m. cargada uniformemente tiene una flecha en su extremo igual a 0,01l. ¿Cuál es la pendiente de la elástica en dicho extremo?

4. ¿Qué volado debe tener una ménsula uniformemente cargada si la flecha, en el extremo libre, es 2,5 cm. y la pendiente de la elástica en el mismo punto es 0,01?

5. Una viga de acero en I, cargada uniformemente y simplemente apoyada en sus extremos, tiene una flecha en el centro de 8 mm. La pendiente de la elástica en los extremos es  $\theta = 0,01$ . Hallar la altura de la viga si la fatiga máxima por flexión es  $\sigma = 1.400$  kg./cm.<sup>2</sup>.

*Solución:* Utilizaremos las fórmulas conocidas

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad \theta = \frac{ql^3}{24 EI}, \quad \sigma_{\max} = \frac{ql^2}{8} \times \frac{h}{2I}$$

De las dos primeras se deduce:

$$\frac{5}{16} l = \frac{\delta}{\theta} = \frac{0,8}{0,01} = 80 \text{ cm.} \quad \text{y} \quad l = 2,56 \text{ m.}$$

La segunda fórmula da:

$$\frac{ql^2}{8I} = \frac{3E\theta}{l} = \frac{3 \times 2 \times 10^6 \times 0,01}{256}$$

Sustituyendo en la tercera fórmula se obtiene

$$h = \frac{2 \times 1.400 \times 256}{3 \times 2 \times 10^6 \times 0,01} \approx 12 \text{ cm.}$$

33. Deformación de una viga simplemente apoyada por una carga concentrada. — En este caso el momento flector tiene dos expresiones diferentes (véanse págs. 71 y 72), según que consideremos el trozo a la izquierda de la carga o el que está

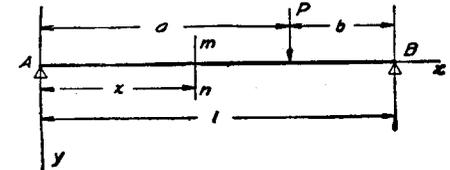


FIG. 116

a la derecha (fig. 116). Con esta consideración tendremos

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l} x \quad \text{para } x \leq a$$

y

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l} x + P(x-a) \quad \text{para } x \geq a.$$

Integrando estas ecuaciones se obtiene

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + C \quad \text{para } x \leq a$$

y

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_1 \quad \text{para } x \geq a \quad (a)$$

Como los dos trozos de elástica deben tener la tangente común en el punto de aplicación de la carga  $P$ , las expresiones de la pendiente (a) deben ser iguales para  $x = a$ . De ello se deduce que las constantes de la integración son iguales, es decir,  $C = C_1$ . Integrando por segunda vez, después de sustituir  $C_1$  por  $C$ , se obtiene

$$EI_z y = -\frac{Pbx^3}{6l} + Cx + C_2 \quad \text{para } x \leq a$$

y

$$EI_z y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P(x-a)^3}{6} + Cx + C_3 \quad \text{para } x \geq a \quad (b)$$

Como los dos trozos de la elástica tienen la misma flecha en el punto de aplicación de la carga, las expresiones (b) deben ser iguales para  $x = a$ . De ello se deduce que  $C_2 = C_3$ . Finalmente, para determinar las dos constantes  $C$  y  $C_2$  haremos uso de que la flecha en los apoyos es nula. Poniendo  $x = 0$  e  $y = 0$  en la primera de las dos ecuaciones (b), sale

$$C_2 = C_3 = 0. \quad (c)$$

Escribiendo  $y = 0$  y  $x = l$  en la segunda de las expresiones (b), obtendremos

$$C = \frac{Pbl}{6} - \frac{Pb^3}{6l} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} \quad (d)$$

Sustituyendo los valores (c) y (d) de las constantes en las ecuaciones (b) de la elástica, resulta

$$EI_z y = \frac{Pbx}{6l} (l^2 - b^2 - x^2) \quad \text{para } x \leq a \quad (86)$$

y

$$EI_z y = \frac{Pbx}{6l} (l^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6} \quad \text{para } x \geq a. \quad (87)$$

La primera de estas ecuaciones da las flechas para el trozo izquierdo de la viga, y la segunda las da para el trozo derecho.

Sustituyendo el valor (d) en las ecuaciones (a), se tiene

$$\left. \begin{aligned} EI_z \frac{dy}{dx} &= \frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2 - 3x^2) \quad \text{para } x \leq a \\ EI_z \frac{dy}{dx} &= \frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} \quad \text{para } x \geq a. \end{aligned} \right\} (e)$$

Mediante estas ecuaciones se calcula fácilmente la pendiente de la elástica en cualquier punto. Haciendo  $x = 0$  en la primera de las ecuaciones (e) y  $x = l$  en la segunda, se obtienen las pendientes  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en los extremos de la viga<sup>1</sup>,

$$\theta_1 = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6lEI_z}, \quad (88)$$

$$\theta_2 = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = -\frac{Pab(l+a)}{6lEI_z}. \quad (89)$$

<sup>1</sup> Para pequeñas curvaturas, caso general, las pendientes  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son numéricamente iguales a los ángulos de rotación de los extremos de la viga durante la flexión, tomando positivas las pendientes cuando los giros son en el sentido de las agujas del reloj.

La flecha máxima acontece en el punto en que la tangente a la elástica es horizontal. Si  $a > b$  como en la figura 116, la flecha máxima corresponde evidentemente al trozo izquierdo de la viga. Se encuentra su posición igualando a cero la primera de las ecuaciones (e),

$$l^2 - b^2 - 3x^2 = 0,$$

de donde

$$x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}}, \quad (f)$$

valor de la abscisa a partir del extremo izquierdo del punto de la flecha máxima. Para hallar dicha flecha máxima se sustituye la expresión (f) en la ecuación (86), y se obtiene

$$y_{\max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}lEI_z}. \quad (g)$$

Si la carga  $P$  se aplica en el centro de la luz, la flecha máxima acontece evidentemente en esta parte también. Su valor se obtiene poniendo  $b = \frac{l}{2}$  en la ecuación (g), lo que da

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{48EI_z}. \quad (90)$$

De la ecuación (f) se deduce que en el caso de una carga concentrada la flecha máxima se produce siempre en un punto próximo al centro de la viga. Cuando  $b = \frac{l}{2}$ , acontece en dicho centro; en el caso límite, cuando  $b$  es muy pequeño y  $P$  actúa en el apoyo, la distancia  $x$  dada por la ecuación (f) es  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , y el punto de flecha máxima está solamente a una distancia

$$\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{l}{2} = 0,077l$$

del centro de la viga. Debido a esto la flecha en el centro es una buena aproximación de la flecha máxima. Haciendo  $x = \frac{l}{2}$  en la

ecuación (86), obtendremos para la flecha en el centro el valor

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pb}{48EI_2} (3l^2 - 4b^2). \quad (91)$$

La diferencia entre las flechas (g) y (91), en el caso más desfavorable, cuando  $b$  tiende a cero, es solamente un 2,5 por 100, aproximadamente, de la flecha máxima.

### Problemas

1. Hallar la posición de la carga  $P$  (fig. 116) si la relación entre los valores numéricos de los giros en los extremos de la viga es

$$\left| \frac{\theta_1}{\theta_2} \right| = \frac{3}{4}.$$

2. Hallar la diferencia entre la flecha máxima y la flecha en el centro de la viga de la figura 116, si  $b = 2a$ .

3. Hallar la flecha máxima en la viga de la figura 116, si  $AB$  es una I de 20 cm. de altura del catálogo de Altos Hornos, y  $a = 3,60$  m.,  $b = 2,40$  m. y  $P = 1.000$  kg.

4. ¿Cuál será la flecha máxima si la viga en I anterior se sustituye por una viga de madera de sección  $25 \times 25$  cm. El módulo de elasticidad de la madera es  $E = 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup>.

34. **Modo de encontrar las deformaciones en la flexión utilizando el diagrama de momentos flectores. Método de superposición.**—En artículos anteriores se ha visto que la curva de flexión de una viga prismática de sección constante, llamada también línea elástica, o «simplemente elástica», puede determinarse integrando la ecuación diferencial (79). En algunos casos, sin embargo, basta conocer la deformación en un punto determinado, y el problema se simplifica utilizando el diagrama del momento flector tal como se indica a continuación <sup>1</sup>.

En la figura 117,  $AB$  representa un trozo de elástica, y  $a_1b_1$  la parte correspondiente del diagrama de momentos flectores.

<sup>1</sup> El empleo del diagrama del momento flector para el cálculo de deformaciones en vigas ha sido desarrollado por O. Mohr (véase *Zeitschr. d. Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, pág. 10, 1868). Véase también O. Mohr, *Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik*, pág. 294, Berlín, 1906. Un método análogo fué desarrollado independientemente de O. Mohr por el profesor C. E. Green, University of Michigan, 1874.

Dos secciones adyacentes de la viga, separadas por la distancia  $ds$ , forman después de la flexión un ángulo  $d\theta$ , y por la ecuación (56),

$$d\theta = \frac{1}{r} ds = \frac{M}{EI_2} ds.$$

Para las vigas que corrientemente se usan la curvatura es muy pequeña y puede sustituirse  $ds$  por  $dx$ . De este modo,

$$d\theta = \frac{1}{EI_2} (Mdx). \quad (a)$$

Interpretada gráficamente, la ecuación (a) indica que el ángulo elemental  $d\theta$ , entre dos normales o dos tangentes consecutivas de la elástica, es igual al área elemental rayada  $Mdx$  de la superficie de momentos dividida por la rigidez a la flexión <sup>1</sup>. Como esto se verifica para cada elemento, el ángulo finito  $\theta$  que forman las tangentes en  $A$  y en  $B$  se obtendrá sumando los elementales de las ecuaciones (a). Es decir,

$$\theta = \int_A^B \frac{1}{EI_2} Mdx, \quad (92)$$

y, por tanto, el ángulo entre las tangentes en dos puntos  $A$  y  $B$  de la elástica es igual al área del diagrama de momentos flectores, comprendida entre las verticales correspondientes, dividida por la rigidez a la flexión de la viga.

Consideremos ahora la distancia del punto  $B$  a la tangente  $AB'$  en el punto  $A$ . Recordando que la elástica tiene pequeña curvatura, esta distancia puede medirse sobre la vertical  $BB'$ . La parte de esta vertical interceptada por las tangentes correspondientes al elemento  $mn$  vale

$$xd\theta = x \frac{Mdx}{EI_2},$$

<sup>1</sup> La ecuación (a) es homogénea:  $d\theta$  se mide en radianes, es decir, en un número abstracto:  $Mdx$ , en cm. kg.  $\times$  cm.  $EI_2$ , en kg./cm.<sup>2</sup>  $\times$  cm.<sup>4</sup>.

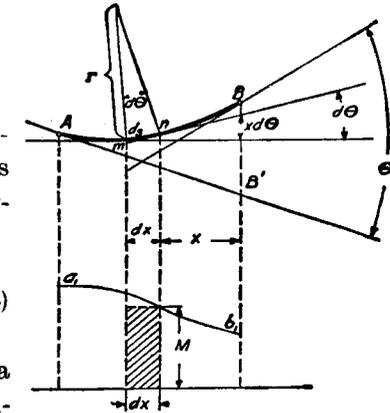


FIG. 117

lo que representa  $\frac{1}{EI_z}$  del momento del área rayada  $Mdx$  respecto a la vertical de  $B$ . Por integración, el valor de  $BB'$  será

$$\overline{BB'} = \delta = \int_A^B \frac{1}{EI_z} x M dx, \quad (93)$$

y, por tanto, la distancia de  $B$  a la tangente en  $A$  es igual al momento con relación a la vertical de  $B$  del área del diagrama de momentos flectores comprendida entre las verticales de  $A$  y  $B$ , dividido por la rigidez  $EI_z$  de la viga a la flexión. Utili-

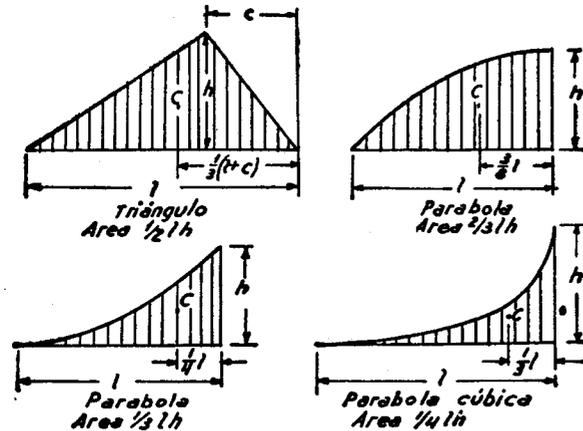


FIG. 118

zando las ecuaciones (92) y (93), la pendiente de la curva de flexión y el corrimiento de los centros de gravedad de las secciones de la viga puede calcularse con facilidad. Más adelante expondremos algunos ejemplos y discutiremos los resultados.

Es interesante notar que la deformación de una viga de rigidez a la flexión dada (véase ecuación 93) está determinada por el diagrama del momento flector. De ello se deduce una consecuencia importante. De la definición de momento flector (artículo 19) se deduce que el producido en una sección  $mn$  de una viga por varias cargas que obran simultáneamente es igual a la suma de los momentos producidos en la misma sección por las diversas cargas obrando por separado. Teniendo en cuenta la ecuación (93), deducimos que la deformación producida en un

punto de una viga por un sistema de cargas que actúan simultáneamente puede obtenerse sumando las deformaciones producidas en ese punto por cada carga aislada. Por ejemplo, si se conoce la elástica producida por una carga concentrada (ecuaciones 86 y 87), la que producen varias cargas se obtiene por simple sumación. Este método de calcular las deformaciones se denomina «método de superposición». El cálculo de las integrales (92) y (93) se simplifica usando fórmulas referentes a áreas y centros de gravedad. Algunas de ellas se dan en la figura 118.

35. Elástica de una viga en voladizo.—En el caso de una viga en voladizo con una carga concentrada en su extremo—fig. 119 (a)—, dado que la tangente en el extremo empotrado  $A$  permanece fija y horizontal en la deformación, las distancias a ella, verticalmente contadas, desde todos los puntos de la elástica, no son otra cosa que los corrimientos o flechas de cada uno. El ángulo  $\theta_b$ , que la tangente en  $B$  forma con la tangente en  $A$  por la ecuación (92)<sup>1</sup>, será

$$\theta_b = Pl \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{EI_z} = \frac{Pl^2}{2EI_z}. \quad (94)$$

La flecha  $\delta$ , calculada por la ecuación (93) como el momento del área  $aba_1$ , respecto a la vertical de  $b$  dividido por  $EI_z$ , es

$$\delta = Pl \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{EI_z} = \frac{Pl^3}{3EI_z}. \quad (95)$$

El giro de cualquier otra sección, tal como  $mn$  con relación a la de empotramiento, es el área  $m'n'aa_1$  de la figura 119 (b) dividida por  $EI_z$ .

En el caso de curvaturas pequeñas, como acontece en las

<sup>1</sup> Se calcula el valor numérico del giro. Su sentido se deduce fácilmente viendo el modo de actuar las cargas.

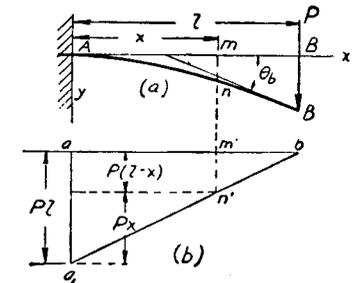


FIG. 119

elásticas de las vigas, el ángulo  $\theta$  puede igualarse a su tangente y se obtiene

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2EI_z} \left[ 1 - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right]. \quad (96)$$

La flecha  $y$  para la misma sección es el momento del área  $m'n'aa_1$ , respecto a  $m'n'$  dividido por  $EI_z$  (véase ecuación 93). Descomponiendo este área en el rectángulo y triángulo indicados en la figura, se obtiene

$$y = \frac{1}{EI_z} \left[ P(l-x) \frac{x^2}{2} + \frac{Px^2}{2} \frac{2x}{3} \right] = \frac{P}{EI_z} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (97)$$

Para una viga en voladizo sometida a la acción de una carga concentrada  $P$ , obrando a una distancia  $c$  del empotramiento, el diagrama de momentos flectores será el de la figura 120 (b).

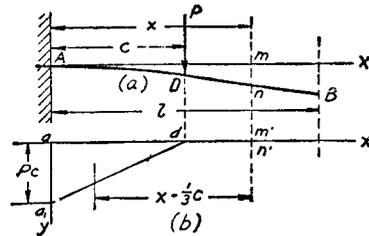


FIG. 120

El giro de cada sección respecto a la de empotramiento, y la flecha para las secciones situadas a la izquierda de la carga vendrían dados por las ecuaciones (96) y (97) reemplazando  $l$  por  $c$ . Para las secciones a la derecha de la carga el momento flector y, por tanto, la curvatura, son nulos; es decir, esta parte de la viga permanece recta en la flexión. El giro de cada sección, respecto a la de empotramiento, es constante e igual al de  $D$ ; vale, por tanto (ecuación 94),  $\frac{Pc^2}{2EI_z}$ . La flecha para una sección cualquiera  $mn$  es el momento del área del triángulo  $aa_1d$ , respecto a la vertical  $m'n'$  dividido por  $EI_z$ , o sea

$$y = \frac{1}{EI_z} \frac{Pc^2}{2} \left( x - \frac{1}{3}c \right). \quad (98)$$

En el caso de una ménsula con carga uniforme de intensidad  $q$  —fig. 121 (a)—, el momento flector en una sección cualquiera  $mn$ , distante  $x$  del extremo empotrado, es

$$M = - \frac{q(l-x_1)^2}{2}.$$

El giro respecto a la sección de empotramiento de otra situada a una distancia  $x$  de ella será (ecuación 92)

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI_z} \int_0^x \frac{q(l-x_1)^2}{2} dx_1 = \frac{q}{2EI_z} \left( lx - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right). \quad (99)$$

El giro de la sección  $B$  se obtiene sustituyendo  $x$  por  $l$  en la ecuación anterior, y es

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{ql^3}{6EI_z}. \quad (100)$$

La flecha en cualquier sección situada a la distancia  $x$  del extremo empotrado es el momento del área  $aa_1cd$ , respecto a la vertical  $cd$  dividido por  $EI_z$  —fig. 121 (b)—. El momento del elemento de dicha área, rayado en la figura, es

$$(x-x_1) \frac{q(l-x_1)^2}{2} dx_1$$

y el momento total es la integral de esta expresión, desde  $x_1 = 0$  hasta  $x_1 = x$ . Tendremos

$$y = \frac{1}{EI_z} \frac{q}{2} \int_0^x (x-x_1)(l-x_1)^2 dx_1,$$

o sea

$$y = \frac{q}{2EI_z} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right). \quad (101)$$

La flecha en el extremo  $x = l$  será

$$\delta = (y)_{x=l} = \frac{ql^4}{8EI_z}. \quad (102)$$

El mismo problema puede resolverse fácilmente usando el método de superposición. La carga uniforme puede considerarse como un sistema de cargas infinitesimales  $qdc$ , tales como la rayada en la figura 122. La flecha producida en la sección recta  $mn$ , por cada carga elemental  $qdc$  situada a su izquierda, puede encontrarse por la ecuación (98) sustituyendo  $P$  por el valor  $qdc$ . La flecha  $y_1$ , producida por la carga total situada a la izquierda

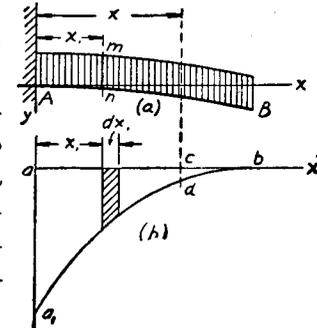


FIG. 121

de  $mn$ , es la suma de las flechas producidas por las cargas elementales, variando  $c$  desde  $c = 0$  hasta  $c = x$ :

$$y_1 = \frac{1}{EI_z} \int_0^x \frac{qc^2}{2} \left(x - \frac{1}{3}c\right) dc = \frac{q}{2EI_z} \frac{x^4}{4}$$

La flecha producida en la sección  $mn$  por una carga elemental  $qdc_1$ , situada a su derecha, se encuentra por la ecuación (97) sustituyendo  $P$  por  $qdc_1$  y  $l$  por  $c_1$ . La flecha  $y_2$ , producida en  $mn$  por la carga total situada a su derecha, es la suma de las producidas por todas las cargas elementales en las condiciones dichas, o sea variando  $c_1$  desde  $c_1 = x$  a  $c_1 = l$ :

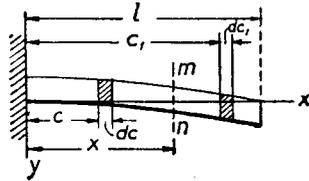


FIG. 122

$$y_2 = \frac{1}{EI_z} \int_x^l q \left(\frac{c_1^2 x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) dc_1 = \frac{q}{2EI_z} \left(-\frac{x^4}{6} + \frac{x^2 l^2}{2} - \frac{lx^3}{3}\right)$$

La flecha total de la sección  $mn$  será

$$y = y_1 + y_2 = \frac{q}{2EI_z} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$$

igual a la hallada anteriormente (ecuación 101).

**Problemas**

1. Determinar la flecha y el giro de la viga en voladizo del problema 9, página 104.

*Solución:*

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_z} + \frac{ql^4}{8EI_z}$$

2. Determinar la flecha de la cabeza del pilar representado en la figura 94.

*Solución:* El momento flector en cualquier sección  $mn$  a una distancia  $x$  de la cabeza es

$$M = -\frac{Wx^3}{3l^2}$$

donde  $W = \frac{1}{2} dl^2$  es la fuerza que la presión hidrostática transmite a un pilar. Utilizando la ecuación (93), la flecha en la cabeza del pilar es

$$\delta = \frac{W}{EI_z} \int_0^l \frac{x^4 dx}{3l^2} = \frac{Wl^3}{15EI_z} = 2,2 \text{ mm.}$$

3. Determinar la flecha y el giro en la sección extrema de una viga en voladizo flexada por un par  $M$  (fig. 123).

*Respuesta:*

$$(y)_{x=l} = -\frac{Ml^2}{2EI_z}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{Ml}{EI_z}$$

4. Dos vigas rectangulares de madera están enlazadas en el extremo izquierdo (fig. 124) y se flexan apretando el perno del extremo derecho. Determinar el diámetro  $d$  del perno para que los coeficientes

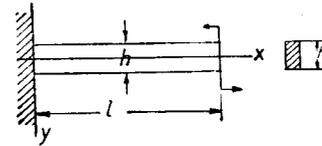


FIG. 123

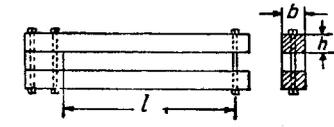


FIG. 124

de seguridad de las vigas de madera y del perno de acero sean los mismos. La longitud de las vigas  $l = 90$  cm., la altura  $h = 20$  cm., el ancho  $b = 15$  cm., coeficiente de trabajo para el acero  $\sigma_t = 960$  kg./cm.<sup>2</sup>, coeficiente de trabajo para la madera  $96$  kg./cm.<sup>2</sup>. Determinar la flecha de las vigas cuando el esfuerzo de extensión en el perno sea  $960$  kg./cm.<sup>2</sup>.

*Solución:* Si  $P$  es la fuerza en el perno, la ecuación para determinar su diámetro es

$$\frac{4P}{\pi d^2} : \frac{6Pl}{bh^2} = \frac{960}{96} = 10,$$

de donde

$$d = 1,19 \text{ cm.} \quad \text{y} \quad P = 960 \times \frac{\pi d^2}{4} = 1.065 \text{ kg.}$$

De la ecuación (95), tomando  $E = 12 \times 10^4$  kg./cm.<sup>2</sup>, se deduce  $\delta = 2,16$  mm.

5. ¿Cuál será la relación de las flechas en los extremos de los voladizos de la figura 125, si la intensidad de la carga uniformemente repartida es la misma en ambos casos?

*Respuesta:*

$$7 : 41$$

6. ¿Cuál debe ser la ecuación del eje de la barra  $AB$  antes de flexarse, si la carga  $P$ , cualquiera que sea el punto de la barra en que actúe, queda siempre, al deformarse la barra, al nivel de  $A$ ? (fig. 126).

*Respuesta:*

$$y = -\frac{Px^3}{3EI_z}$$

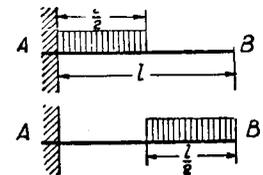


FIG. 125

7. Determinar la flecha de seguridad de la viga de la figura 123 cuando se dé el coeficiente de trabajo  $\sigma_t$ . Determinar lo mismo para un voladizo cargado en su extremo (fig. 119).

Respuesta:

$$(1) \delta = \frac{\sigma_t l^3}{Eh}, \quad (2) \delta = \frac{2}{3} \frac{\sigma_t l^3}{Eh}$$

8. Un disco circular  $N$  de radio  $R$  (fig. 127) produce en una pletina delgada de acero de grosor  $h$  una atracción de  $q$  kg./cm.<sup>2</sup> uniformemen-

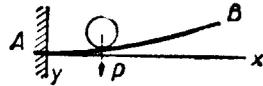


FIG. 126

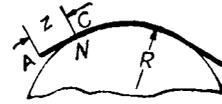


FIG. 127

te distribuida. Determinar la longitud  $l$  de la parte de pletina  $AO$  no adherida y la fatiga máxima en ella si  $h = 1/8$  mm.,  $R = 7,5$  cm. y  $q = 1,2$  kg./cm.<sup>2</sup>.

Solución: La longitud de la parte de pletina que no apoya en el disco puede determinarse estableciendo la condición de que en el punto  $C$  la curvatura producida por la carga uniformemente distribuida sea igual a  $\frac{1}{R}$ . Por consiguiente,

$$\frac{ql^2}{2} = \frac{EI_z}{R},$$

de donde

$$l = \sqrt{\frac{2EI_z}{qR}} = 8 \frac{1}{3} \text{ mm.}$$

El esfuerzo máximo está determinado por la ecuación

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Eh}{2R} = 3.333 \text{ kg./cm.}^2.$$

9. Determinar las flechas de las ménsulas de la figura 68, suponiendo que el material es acero, que la altura de cada viga es 25 cm. y que la fatiga máxima por flexión es 1.200 kg./cm.<sup>2</sup>

36. Elástica de una viga apoyada en los extremos.—Consideremos primeramente el caso de una carga única. El diagrama de momentos flectores es el triángulo  $a_1b_1f_1$  de la figura 128 (b).

Su área es  $\frac{Pab}{2}$ , y su centro de gravedad está a la distancia  $\frac{l+b}{3}$  de la vertical que pasa por el apoyo derecho. La distancia  $\delta$  del

extremo  $B$  a la tangente en  $A$  se obtiene por la ecuación (93), y es

$$\delta = \frac{1}{EI_z} \frac{Pab}{2} \times \frac{l+b}{3} = \frac{Pab(l+b)}{6EI_z},$$

El giro  $\theta_1$  de la sección extrema izquierda de la viga será, por tanto,

$$\theta_1 = \frac{\delta}{l} = \frac{Pab(l+b)}{6lEI_z}, \quad (a)$$

lo que coincide con la fórmula (88)<sup>1</sup>.

Supongamos ahora una viga  $a_1b_1$  apoyada en los extremos y cargada con una carga repartida dada por el diagrama de

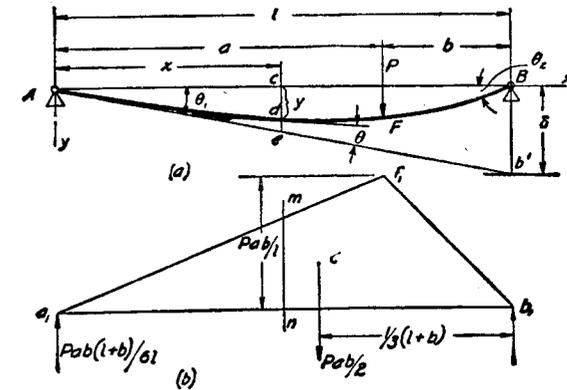


FIG. 128

momentos flectores  $a_1f_1b_1$ . La reacción  $R$  producida por esta carga en el apoyo izquierdo será

$$R = \frac{Pab}{2} \times \frac{l+b}{3} \times \frac{1}{l} = \frac{Pab(l+b)}{6l}.$$

Comparando este resultado con la ecuación (a) se ve que el giro  $\theta_1$  de la sección extremo izquierda de la viga dada es igual a la reacción en el apoyo izquierdo de la viga auxiliar  $a_1b_1$ , dividida por  $EI_z$ . Para simplificar suele llamarse a la viga  $a_1b_1$ , viga conjugada de la dada. Por el mismo razonamiento puede encon-

<sup>1</sup> Nótese que  $a = l - b$ .

trarse el giro de la sección extrema derecha; para dar a este giro  $\theta_1$  el signo apropiado debe tomarse con signo menos la reacción en el extremo derecho de la viga conjugada.

Para calcular la pendiente en cualquier punto  $d$  de la elástica basta (fig. 128) restar del ángulo  $\theta_1$ , en el apoyo  $A$ , el ángulo  $\theta$  que forman las tangentes en  $A$  y en el punto  $d$  de la elástica. Empleando la ecuación (92) para el cálculo del ángulo  $\theta$  se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1 - \theta = \frac{1}{EI_z} (R - \Delta a_1 mn).$$

El primer término del paréntesis es la reacción en el apoyo izquierdo de la viga conjugada  $a_1 b_1$ , y el segundo es la carga en la viga conjugada a la izquierda de la sección  $mn$ . El paréntesis completo representa, por consiguiente, la fuerza cortante en la sección  $mn$  de la viga conjugada. Es decir, que el giro de la viga primitiva en un punto cualquiera  $d$  puede obtenerse dividiendo la fuerza cortante en la sección correspondiente de la viga conjugada por  $EI_z$ .

La flecha  $y$ , correspondiente a un punto  $d$  de la viga a la izquierda de la carga  $P$ , es

$$y = \bar{c}e - \bar{d}e. \quad (b)$$

En el triángulo  $Ace$  se tiene

$$\bar{c}e = \theta_1 x = \frac{Rx}{EI_z} \quad (c)$$

donde  $R$  es la reacción en el apoyo izquierdo de la viga conjugada. El último término del segundo miembro de la ecuación (b) representa la distancia del punto  $d$  respecto a la tangente  $Ae$ , y aplicando la ecuación (93) vale

$$\bar{d}e = \frac{1}{EI_z} \text{área } \Delta a_1 mn \cdot \frac{1}{3} x. \quad (d)$$

Sustituyendo (c) y (d) en (b), se obtiene

$$y = \frac{1}{EI_z} \left( Rx - \Delta a_1 mn \cdot \frac{1}{3} x \right). \quad (e)$$

La expresión dentro del paréntesis tiene un significado sen-

cillo: representa el momento flector en la sección  $mn$  de la viga conjugada. Es decir, la flecha en cualquier punto de una viga apoyada en sus extremos puede deducirse dividiendo el momento flector en la sección correspondiente de la viga conjugada por  $EI_z$ . Sustituyendo en (e) en lugar de  $R$  su valor, y teniendo en cuenta que

$$\text{área } \Delta a_1 mn = \frac{Pbx^2}{2l},$$

se obtiene

$$y = \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{Pabx(l+b)}{6l} - \frac{Pbx^3}{6l} \right] = \frac{Pbx}{6lEI_z} (l^2 - b^2 - x^2).$$

Este resultado concuerda con la ecuación (86), obtenida anteriormente por integración de la ecuación diferencial de la elástica. La flecha para un punto situado a la derecha de la carga  $P$  puede calcularse de modo análogo. El resultado será el que indica la ecuación (87).

En el caso de un sistema de cargas cualesquiera, la flecha para cada sección de la viga puede obtenerse mediante las ecuaciones del caso de carga única y la aplicación del método de superposición. Este método es también aplicable al caso de una carga distribuida. Como ejemplo resolveremos el caso de una viga apoyada con carga uniformemente distribuida (fig. 129). De la ecuación (a) se deduce que el giro producido en el apoyo  $A$  por la carga elemental  $qdb$  de la figura es

$$d\theta_1 = \frac{qabdb(l+b)}{6lEI_z} = \frac{qb(l^2 - b^2)db}{6lEI_z}.$$

El ángulo total  $\theta_1$  se obtendrá integrando para  $b$  entre  $b = 0$  y  $b = l$ :

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{qbdb(l^2 - b^2)}{6lEI_z} = \frac{ql^3}{24EI_z}. \quad (f)$$

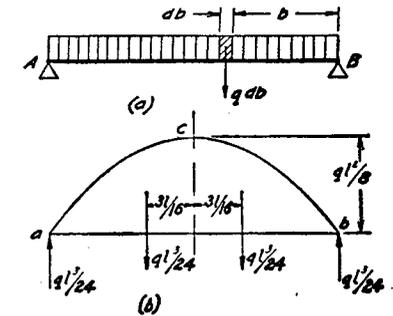


FIG. 129

El mismo resultado se obtiene calculando la reacción en el apoyo *a* de la viga conjugada *ab*.

La flecha en el centro puede calcularse por la ecuación (91), que se dedujo en la hipótesis de que la carga estaba a la derecha del centro. Si la carga está a la izquierda del centro, puede usarse también dicha ecuación, pero en este caso *b* debe tomarse como la distancia de la carga al apoyo izquierdo. Cualquier carga elemental *qdb*, situada a la derecha del punto medio de la viga, produce una flecha en dicho punto medio de valor

$$(dy)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{qdbb}{48EI_z} (3l^2 - 4b^2).$$

Sumando todas estas flechas y observando que las cargas de la mitad izquierda de la viga producen las mismas flechas que las cargas de la mitad derecha, se obtiene

$$\delta = (y)_{x=\frac{l}{2}} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{qdbb}{48EI_z} (3l^2 - 4b^2) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z} \quad (g)$$

Los resultados (f) y (g) coinciden con las fórmulas (83) y (82), obtenidas anteriormente integrando la ecuación diferencial de la elástica. El mismo resultado se obtiene dividiendo el momento flector en el centro de la viga conjugada —fig. 129 (b)— por  $EI_z$ .



FIG. 130

El método de superposición puede usarse también en el caso de que la carga distribuida cubra solamente parte de la luz, como en la figura 130. La flecha producida en el centro de la viga por la carga situada a su derecha es

$$\delta_1 = \int_a^{\frac{l}{2}} \frac{qdbb}{48EI_z} (3l^2 - 4b^2).$$

La carga situada a la izquierda del centro de la viga produce la flecha

$$\delta_2 = \int_c^{\frac{l}{2}} \frac{qdbb}{48EI_z} (3l^2 - 4b^2).$$

La flecha total en el centro será por consiguiente:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \int_a^{\frac{l}{2}} \frac{qdbb}{48EI_z} (3l^2 - 4b^2) + \int_c^{\frac{l}{2}} \frac{qdbb}{48EI_z} (3l^2 - 4b^2).$$

En el caso de una viga simplemente apoyada *AB* solicitada por un par aplicado en el extremo (fig. 131), el diagrama del momento flector es el triángulo *abd* de la figura 131 (b). Considerando *ab* como viga conjugada, la carga ficticia total es  $\frac{Ml}{2}$ . Las reacciones en los extremos de la viga conjugada son por consiguiente  $\frac{Ml}{6}$  y  $\frac{Ml}{3}$ .

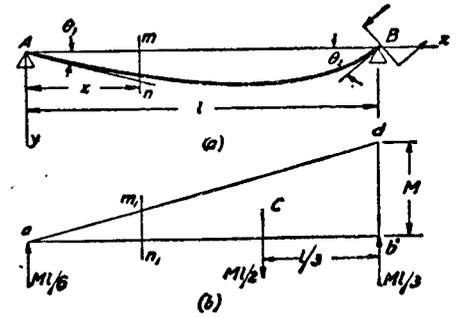


FIG. 131

Los giros en las secciones extremas de la viga real serán

$$\theta_1 = \frac{Ml}{6EI_z} \quad (103)$$

y

$$\theta_2 = \frac{Ml}{3EI_z} \quad (104)$$

El signo del giro en el extremo derecho es negativo.

La flecha en una sección *mn* de la viga se obtiene dividiendo el momento flector en la sección correspondiente  $m_1n_1$  de la viga conjugada por  $EI_z$ , lo que da

$$y = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{Ml}{6} x - \frac{Ml}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3} \right) = \frac{Mlx}{6EI_z} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (105)$$

Problemas

1. Determinar los ángulos en los apoyos y la flecha en los puntos de aplicación de las cargas de la figura 132.

Solución: La viga conjugada estará cargada con el trapecio *adeb*, cuya área es  $Pc(l - c)$ . Los ángulos en los extremos son:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{EI_z} \frac{Pc(l - c)}{2}$$

La flecha en los puntos de aplicación de las cargas es

$$(y)_{x=c} = \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{Pc^2(l-c)}{2} - \frac{Pc^2}{2} \cdot \frac{c}{3} \right] = \frac{Pc^2}{EI_z} \left( \frac{l}{2} - \frac{2}{3}c \right).$$

La flecha en el centro, ecuación (91), será:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pc}{24EI_z} (3l^2 - 4c^2).$$

2. Determinar los giros en las secciones extremas de la viga de la figura 88.

Respuesta:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{7}{180} \frac{Wl^2}{EI_z}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{8}{180} \frac{Wl^2}{EI_z}.$$

3. Determinar la flecha en el centro de la viga AB (fig. 133),

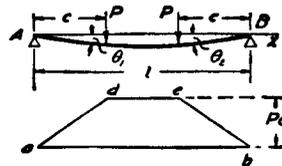


FIG. 132

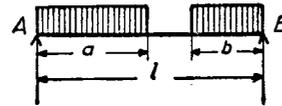


FIG. 133

siendo  $I_z = 3,600 \text{ cm}^4$ ,  $q = 800 \text{ kg./m.}$ ,  $l = 7,20 \text{ m.}$ ,  $a = 3,60 \text{ m.}$ ,  $b = 2,40 \text{ m.}$ ,  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2$ .

Solución: Debido a que  $a = \frac{l}{2}$  la flecha producida en el centro por la carga que actúa en la mitad izquierda de la viga, ecuación (82), es:

$$(y_1)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{2} \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI_z}.$$

La flecha producida en el centro por la carga existente en la mitad derecha de la viga es

$$(y_2)_{x=\frac{l}{2}} = \int_0^b \frac{qcdc}{48EI_z} (3l^2 - 4c^2) = \frac{25}{48 \times 162} \frac{ql^4}{EI_z}.$$

La flecha total será:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = (y_1)_{x=\frac{l}{2}} + (y_2)_{x=\frac{l}{2}} = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{384} + \frac{25}{48 \times 162} \right) \frac{ql^4}{EI_z} = 3,86 \text{ cm.}$$

4. Determinar la flecha en el centro de la viga representada en la figura 91, cuando la carga está en la posición que determina el momento flector máximo.

Procedimiento: La flecha puede calcularse utilizando la ecuación (91)

y el método de superposición y haciendo  $b = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}$  en esta ecuación para una de las cargas y  $b = \frac{l}{2} - \frac{3}{4}d$  para la otra.

5. Determinar las flechas en el centro y los ángulos de giro en los extremos de las vigas representadas en las figuras 67 (b) y 67 (e). Supóngase que se trata de un perfil normal en I de 20 cm. de altura.

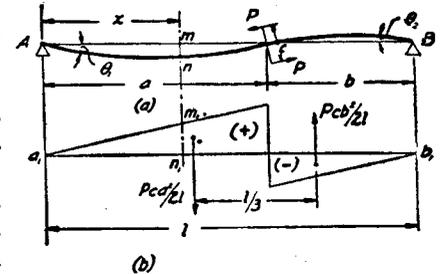


FIG. 134

6. Determinar los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  y la elástica de una viga simplemente apoyada en sus extremos sometida a la acción del par  $P \times c$  (fig 134).

Solución: Las cargas para la viga conjugada son las de la figura 134 (b). Las reacciones en  $a_1$  y  $b_1$  son:

$$R_a = \frac{1}{l} \left[ \frac{Pca^2}{2l} b + \frac{a}{3} \right] - \frac{Pcb^2}{2l} \frac{2}{3} b;$$

$$R_b = \frac{1}{l} \left[ \frac{Pca^2}{2l} \frac{2}{3} a - \frac{Pcb^2}{2l} \left( a + \frac{b}{3} \right) \right].$$

Por consiguiente,

$$\theta_1 = \frac{Pc}{2l^2 EI_z} \left[ a^2 \left( b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^2 \right] = \frac{Pc}{2l EI_z} \left( \frac{l^3}{3} - b^2 \right);$$

$$\theta_2 = -\frac{Pc}{2l^2 EI_z} \left[ \frac{2}{3} a^2 - b^2 \left( a + \frac{b}{3} \right) \right] = \frac{Pc}{2l EI_z} \left( \frac{l^3}{3} - a^2 \right).$$

Si  $a = b = \frac{l}{2}$ , se obtiene

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pcl}{24 EI_z}.$$

El momento flector en una sección cualquiera  $m, n_1$  de la viga conjugada es

$$A_1 x - \frac{Pca^2 x^2}{2l} \frac{x}{a^2} = \frac{Pcx}{2l^2} \left[ a^2 \left( b + \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3} b^2 \right] - \frac{Pcx^3}{6l}.$$

Por consiguiente, la elástica para el trozo izquierdo de la viga real es

$$y = \frac{Pcx}{2l^2 EI_z} \left[ a^2 \left( b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^2 \right] - \frac{Pcx^3}{6l EI_z}$$

7. Una viga apoyada en sus extremos está flexada por dos pares  $M_1$  y  $M_2$ , aplicados en dichos puntos (fig. 135). Determinar los ángulos

de giro en los extremos y la posición de la sección de la viga para la que la flecha es máxima.

Solución:

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{3 EI_z} + \frac{M_2 l}{6 EI_z}; \quad \theta_2 = \frac{M_2 l}{3 EI_z} + \frac{M_1 l}{6 EI_z}.$$

La elástica se hallará utilizando la ecuación (105), y es

$$y = \frac{M_1 l (l-x)}{6 EI_z} \left[ 1 - \left( \frac{l-x}{l} \right)^3 \right] + \frac{M_2 l x}{6 EI_z} \left( 1 - \frac{x^3}{l^3} \right).$$

La posición de flecha máxima se encuentra derivando esta ecuación e igualando a cero la derivada.

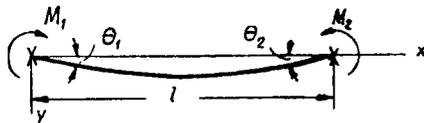


FIG. 135

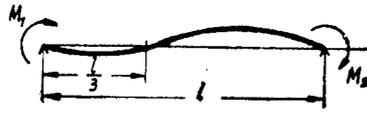


FIG. 136

8. Una viga está flexada por dos pares, tal como indica la figura 136. Determinar la relación  $M_1 : M_2$  si el punto de inflexión de la elástica está a  $\frac{l}{3}$  del apoyo izquierdo.

Respuesta:

$$M_2 = 2M_1.$$

9. Dos pletinas de diferentes espesores  $h_1$  y  $h_2$  descansan una sobre otra y soportan una carga uniformemente repartida (fig. 137). Determinar la relación entre los esfuerzos máximos que se presentan en cada una.

Solución: Como las dos láminas tienen la misma elástica, sus momentos flectores estarán en la misma relación que los momentos de

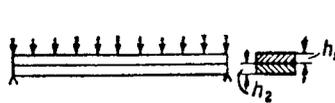


FIG. 137



FIG. 138

inercia de sus secciones rectas, es decir, en la relación  $h_1^3 : h_2^3$ . Los módulos resistentes de las secciones están en la relación  $h_1^2 : h_2^2$  y, por tanto, los esfuerzos máximos en la relación  $h_1 : h_2$ .

10. Una barra de acero  $AB$  tiene una curvatura inicial tal que, al deformarse por la acción de las fuerzas  $P$  (fig. 138), se endereza y produce una presión uniformemente distribuida a lo largo de la superficie plana rígida  $MN$ . Determinar las fuerzas  $P$  necesarias para el

enderezamiento de la barra y el esfuerzo máximo producido en ella si  $l = 50$  cm.,  $\delta = 2,5$  mm. y la sección de la barra es un cuadrado de 2,5 cm. de lado.

Solución: Para obtener una presión uniformemente repartida, la curvatura inicial de la barra debe ser la de la elástica de una viga apoyada en sus extremos y cargada uniformemente con una intensidad  $\frac{2P}{l}$ .

Por tanto,

$$M_{\text{máx}} = \frac{2Pl^2}{8} = \frac{Pl}{4}, \tag{a}$$

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{2Pl^4}{EI_z}. \tag{b}$$

El esfuerzo máximo será

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{Z} = \frac{Plh}{8I_z}. \tag{c}$$

De (b) y (c) se deduce:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{24 E \delta h}{5 l^3} = \frac{24 \times 2 \times 10^6 \times 0,25 \times 2,5}{5 \times 50^3} = 2.400 \text{ kg./cm.}^2$$

y de (c),

$$P = 500 \text{ kg.}$$

37. Deformación de vigas apoyadas y con voladizos.—La deformación de una viga apoyada y con voladizos puede determinarse utilizando lo expuesto en los párrafos anteriores y aplicando el método de superposición. Una viga de la naturaleza que consideramos puede suponerse dividida en dos partes: una, entre apoyos, para la cual aplicaremos todo lo estudiado en la parte de vigas apoyadas, y otra, la parte volada, para la que aplicaremos todas las consecuencias deducidas al estudiar las vigas en ménsula.

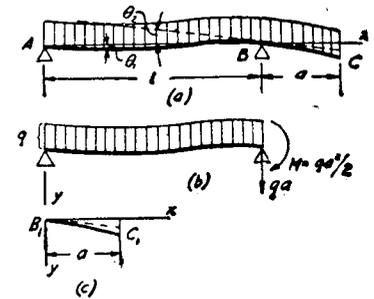


FIG. 139

Para fijar las ideas, vamos a estudiar el caso de una viga con un solo voladizo sometido a la carga uniformemente distribuida  $q$  (fig. 139). La viga se divide en las partes  $AB$  y  $BC$ , y la acción del voladizo para la zona entre apoyos se reemplaza por la de una fuerza cortante  $qa$  y un par  $M = \frac{qa^2}{2}$ . Se ve que

la fuerza cortante se transmite directamente al apoyo y que solamente necesita considerarse el par  $\frac{qa^2}{2}$ . Por tanto, la flecha para una sección cualquiera entre apoyos se obtendrá restando la flecha producida por el par  $\frac{qa^2}{2}$  de la flecha producida por la carga uniformemente distribuida de intensidad  $q$  —fig. 139 (b)—. Utilizando las ecuaciones (81) y (105), se obtiene

$$y = \frac{q}{24EI_z} (l^3x - 2lx^3 + x^4) - \frac{qa^2lx}{12EI_z} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

El ángulo de giro en la sección  $B$  se obtiene mediante las ecuaciones (83) y (104), de las que, considerando como positiva la rotación en el sentido de las agujas del reloj, se obtiene

$$\theta_2 = \frac{qa^2l}{6EI_z} - \frac{ql^3}{24EI_z}.$$

La flecha para cualquier sección de la parte volada —figura 139 (c)— se obtiene superponiendo a la flecha de una viga en simple voladizo (ecuación 101) la flecha

$$\theta_2x = \left(\frac{qa^2l}{6EI_z} - \frac{ql^3}{24EI_z}\right)x$$

debida a la rotación de la sección  $B$ .

**Problemas**

1. Determinar la flecha y el giro en el extremo  $C$  de la viga representada en la figura 141 (a).

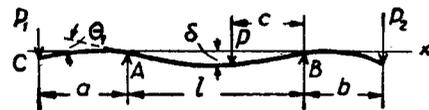


FIG. 140

Respuesta:

$$\text{Flecha} = \frac{Pa^2(l+a)}{3EI_z};$$

$$\text{Giro} = \frac{Pa(2l+3a)}{6EI_z}.$$

2. En la viga representada

en la figura 140 determinar las flechas en el extremo  $C$  y en el punto medio de la zona entre apoyos.

Solución: La parte de la viga entre apoyos puede considerarse como una viga independiente de luz  $l$  apoyada libremente en sus extremos y sometida a la acción de la carga  $P$  y de los pares  $P_1a$  y  $P_2b$  en los ex-

tremos. Utilizando las ecuaciones (91) y (105) y el método de superposición, la flecha en el centro será:

$$\delta = \frac{Pc}{48EI_z} (3l^2 - 4c^2) - \frac{P_1al^2}{16EI_z} - \frac{P_2bl^2}{16EI_z}.$$

El giro  $\theta_1$  en el apoyo  $A$  se obtiene mediante las ecuaciones (88), (103) y (104), y es

$$\theta_1 = \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6lEI_z} - \frac{P_1al}{3EI_z} - \frac{P_2bl}{6EI_z}$$

Y, por tanto, utilizando la ecuación (95), la flecha en el punto  $C$  será:

$$\frac{P_1a^3}{3EI_z} - a\theta_1.$$

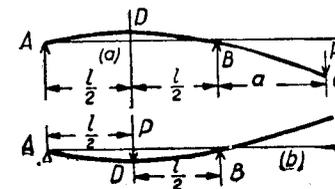


FIG. 141

3. Una viga con voladizo está flexada en un caso por la fuerza  $P$ , que actúa en un extremo —figura 141 (a)—, y en otro por la misma fuerza aplicada en el centro de la luz, entre apoyos —fig. 141 (b)—. Demostrar que la flecha, en el punto  $D$ , en el primer caso, es igual a la flecha en el punto  $C$ , en el segundo caso.

Respuesta: En cada caso, la flecha en cuestión es

$$\frac{Pl^2a}{16EI_z}.$$

4. Una viga de longitud  $l$  con dos voladizos iguales está cargada con dos fuerzas iguales a  $P$  en sus extremos (fig. 142). Determinar la

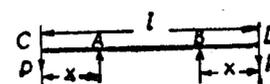


FIG. 142

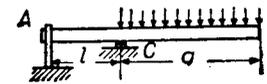


FIG. 143

relación  $\frac{a}{l}$  para la que: 1.º La flecha en el centro es igual a la flecha en cada extremo. 2.º La flecha en el centro tiene su máximo valor.

Respuesta:

$$1.º \quad x = 0,152 l; \quad 2.º \quad x = \frac{1}{6} l.$$

5. Una viga de madera de sección circular apoyada en  $C$  y con un extremo unido a  $A$  está sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida  $q$  sobre el voladizo  $CD$  (fig. 143). Determinar el diámetro de la sección y la flecha en  $D$  si  $l = 90$  cm.,  $a = 1,8$  m.,  $q = 500$  kg./m.,  $\sigma_t = 90$  kg./cm.<sup>2</sup>.

Solución: El diámetro  $d$  se halla por la ecuación

$$\frac{qa^3}{2} : \frac{\pi d^3}{32} = \sigma_t,$$

y la flecha en el extremo  $D$  es

$$\delta = \frac{qa^4}{8EI_x} + \frac{qa^3l}{6EI_z}$$

6. Una viga de longitud  $l$  está sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida de intensidad  $q$  (figura 144). Determinar la longitud de los voladizos que haga mínimo el momento flector máximo. Determinar en este caso la flecha en el centro de la viga.

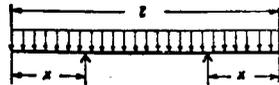


FIG. 144

*Solución:* Igualando los valores numéricos del momento flector en el centro y en los apoyos se obtiene

$$x = 0,207 l.$$

La flecha en el centro es

$$\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{q(l-2x)^4}{EI_x} - \frac{qx^2(l-2x)^2}{16EI_z},$$

en donde el primer término de la derecha representa la flecha producida por la carga entre apoyos, ecuación (82), y el segundo la flecha producida por la carga en los voladizos, ecuación (105).

7. Determinar las flechas en los extremos de los voladizos para las vigas representadas en la figura 74 (a), (b), (c). Suponiendo que son perfiles normales en I de 20 cm. de altura.

38. Deformación de vigas cuando las cargas no son paralelas a uno de los planos principales de flexión.—Consideremos primeramente el caso sencillo de un voladizo cuya sección tenga dos ejes de simetría (fig. 145). La carga  $P$ , en el extremo, es perpendicular al eje de la viga y forma un ángulo  $\alpha$  con el eje principal de la sección. Para calcular las fatigas y deformaciones de la viga puede utilizarse el método de superposición. La carga  $P$  se resuelve en sus componentes  $P \cos \alpha$  y  $P \sin \alpha$  en la dirección de los ejes principales de la sección. La deformación producida por cada una de estas componentes se puede calcular con facilidad utilizando lo expuesto para la flexión en un plano de simetría. La deformación total se obtiene por superposición. Los valores absolutos de las dos componentes del momento flector para una sección cualquiera  $mn$  del voladizo son:  $M_x = P \cos \alpha (l-x)$  respecto al eje  $z$ , y  $M_y = P \sin \alpha (l-x)$

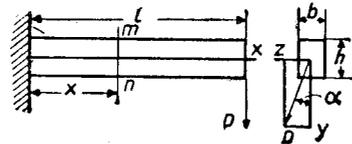


FIG. 145

respecto al eje  $y$ . Por las direcciones de las dos componentes y de los ejes  $y$  y  $z$ , se ve que el momento  $M_x$  produce compresión en los puntos de  $y$  positiva, y  $M_y$  produce compresión en los puntos de  $z$  positiva. La fatiga normal  $\sigma_x$  en cualquier punto ( $y, z$ ) de la sección se obtiene sumando las fatigas que por separado producen  $M_x$  y  $M_y$ . De este modo se obtiene la ecuación

$$\sigma_x = - \frac{P \cos \alpha (l-x)y}{I_x} - \frac{P \sin \alpha (l-x)z}{I_y} = -P(l-x) \cdot \left[ \frac{y \cos \alpha}{I_x} + \frac{z \sin \alpha}{I_y} \right]. \quad (a)$$

La línea neutra se obtiene tomando los puntos de coordenadas tales que la expresión entre paréntesis de la ecuación (a) sea cero.

La ecuación de la línea neutra será

$$\frac{y \cos \alpha}{I_x} + \frac{z \sin \alpha}{I_y} = 0. \quad (b)$$

Es, por tanto, una recta que pasa por el c. de g. de la sección y forma un ángulo con el eje  $z$  (fig. 146), deducido de la ecuación (b),

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{y}{z} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y}. \quad (c)$$

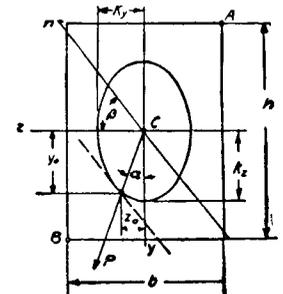


FIG. 146

Se ve que, en general,  $\operatorname{tg} \beta$  no será igual a  $\operatorname{tg} \alpha$ ; es decir, que la línea neutra no será perpendicular al plano de flexión y que el plano de la elástica, que es perpendicular a  $mn$ , no coincidirá con el plano de las fuerzas flectoras. Estos dos planos coinciden solamente cuando  $\operatorname{tg} \alpha = 0$  ó  $\alpha = 90^\circ$ , ó bien  $I_x = I_y$ . En el primero de los dos casos, el plano de las fuerzas flectoras coincide con uno de los planos principales de flexión. En el último caso, la elipse de inercia se transforma en un círculo, puesto que los dos momentos principales de inercia son iguales y dos direcciones perpendiculares cualesquiera pueden tomarse como ejes principales de la sección. Cuando  $\frac{I_x}{I_y}$  es un número grande, es decir, cuando la rigidez de la viga en el plano  $xy$  es mucho mayor que en el plano  $xz$ ,  $\operatorname{tg} \beta$  es grande comparando con  $\operatorname{tg} \alpha$ , y cuan-

do  $\alpha$  es un ángulo pequeño  $\beta$  se aproxima a  $90^\circ$  y el eje neutro se aproxima al eje vertical. La deformación tendrá lugar principalmente en el plano  $xz$ , es decir, la viga tiene la tendencia a flexar en el plano de mayor flexibilidad. Este efecto puede observarse de una manera muy sencilla flexando una regla delgada. La más ligera desviación de la fuerza flectora del plano de mayor rigidez origina una flexión en dirección perpendicular. Descomponiendo la fuerza  $P$  (fig. 145) en sus dos componentes y calculando las deformaciones producidas por cada una, puede comprobarse lo anteriormente expuesto. Si la rigidez a la flexión del voladizo en el plano horizontal es muy pequeña en comparación con la rigidez en el plano vertical, una componente horizontal pequeña puede producir una deformación horizontal mucho mayor y la deformación resultante estará principalmente en el plano de flexibilidad mayor. Es interesante tener presente que la línea neutra  $nn$  es paralela a la tangente trazada a la elipse de inercia en el punto de intersección de la curva con la dirección de la fuerza  $P$ . La demostración es la siguiente: La ecuación de la elipse es

$$\frac{y^2}{k_z^2} + \frac{z^2}{k_y^2} = 1$$

y la ecuación de la tangente en el punto de coordenadas  $y_0$  y  $z_0$  (figura 146) será

$$\frac{yy_0}{k_z^2} + \frac{zz_0}{k_y^2} = 1.$$

La tangente del ángulo entre el eje  $z$  y esta tangente es

$$\frac{z_0}{y_0} \cdot \frac{k_z^2}{k_y^2} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = \operatorname{tg} \beta.$$

Cuando se conoce la dirección de la línea neutra, los puntos de fatiga normal máxima serán aquellos que disten más de ella. En nuestro caso, la tracción máxima se presentará en el punto  $A$  y la compresión máxima en el punto  $B$ . Sustituyendo en la ecuación (a),  $x = 0$ ;  $y = -\frac{h}{2}$ ;  $z = -\frac{b}{2}$ , se obtiene

$$(\sigma_x)_{\max} = Pl \left( \frac{h \cos \alpha}{2 I_x} + \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{2 I_y} \right) \quad (d)$$

La fatiga de compresión en el punto  $B$  tendrá el mismo valor. El método que hemos desarrollado para el caso de un voladizo con dos planos de simetría y cargado en su extremo puede también aplicarse al caso de vigas apoyadas en sus extremos y sometidas a varias cargas. Resolviendo cada fuerza en dos componentes paralelas a los dos ejes de simetría de la sección, el problema se reduce a dos problemas de flexión simple en los dos planos principales. La deformación resultante se obtiene superponiendo las deformaciones en los dos planos principales.

**Problemas**

1. Una viga en voladizo de sección  $Z$  está cargada en el extremo libre con una carga vertical  $P = 200$  kg. (fig. 147). Determinar la fatiga normal máxima  $\sigma_x$  y las componentes horizontal y vertical de la flecha en el extremo. Las dimensiones son las indicadas en la figura.

$\alpha = 18^\circ 46'$  da la dirección principal  $z_1$   
 $I_{z1} = 2.421$  cm.<sup>4</sup>;  $I_{y1} = 112$  cm.<sup>4</sup>.

*Respuesta:*

$(\sigma_x)_{\max} = 356$  kg./cm.<sup>2</sup> en  $B$ ;  
 $\delta_{\text{vert}} = 3,2$  mm.;  $\delta_{\text{hor}} = 6,7$  mm.

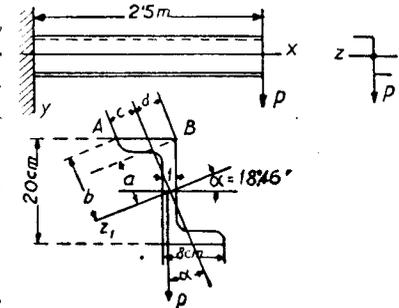


FIG. 147

2. Un voladizo de sección rectangular está flexado por una fuerza  $P$  en su extremo libre. ¿Qué curva describirá el extremo cargado cuando el ángulo  $\alpha$  (fig. 145) varíe de 0 a  $2\pi$ ?

*Respuesta:* La curva será una elipse de semiejes

$$\frac{Pl^3}{3EI_z} \quad \text{y} \quad \frac{Pl^3}{3EI_y}$$

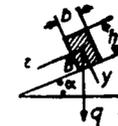


FIG. 148

3. Una viga de madera de sección rectangular apoyada en sus extremos (fig. 148) sufre la acción de una carga uniformemente repartida de intensidad  $q$ . Determinar la fatiga normal máxima y la flecha vertical para la sección central, siendo la longitud de la viga  $l = 3$  m.;

$q = 300$  kg./m.;  $h = 20$  cm.;  $b = 15$  cm.;  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ .

*Solución:* El momento flector máximo se presenta en la sección central y vale

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{300 \times 3^2}{8} = 337,5 \text{ m. kg.} = 33.750 \text{ kg. cm.}$$

Las componentes del momento flector en los planos principales son:  $M_x = M_{\text{máx}} \cos \alpha = 33.750 \times 0,949 = 32.028,75$  kg. cm. y  $M_y = M_{\text{máx}} \sin \alpha = 33,750 \times 0,316 = 10,665$  kg. cm. La fatiga máxima en el punto B es

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = \frac{6 \times 32,028}{bh^2} + \frac{6 \times 10,665}{hb^2} = 46,2 \text{ kg./cm.}^2$$

Las flechas en el centro, para los dos planos principales, son:

$$\delta_y = \frac{5}{384} \frac{ql^4 \cos \alpha}{EI_z}, \quad \text{y} \quad \delta_z = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4 \sin \alpha}{EI_y}.$$

La flecha vertical en el centro es

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_y \cos \alpha + \delta_z \sin \alpha = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z} \left( \cos^2 \alpha + \frac{I_z}{I_y} \sin^2 \alpha \right) \\ &= 0,316 \times 1,08 = 3,4 \text{ mm.} \end{aligned}$$

4. Resolver el problema anterior si la distancia entre apoyos es 1,80 m. y la viga tiene dos voladizos iguales de 60 cm. de largo cada uno.

39. Efecto de la fuerza cortante en la deformación de las vigas.—En las discusiones precedentes (véase pág. 129) sólo se ha tenido en cuenta la acción del momento flector como causa de la deformación. La fuerza cortante producirá una deformación adicional en forma de deslizamiento relativo de las secciones adyacentes. Como resultado de la distribución variada de la fatiga cortante, la sección recta, primitivamente plana, se curva tal como indica la figura 149, en la que se representa solamente la flexión debida a la distorsión<sup>1</sup>.

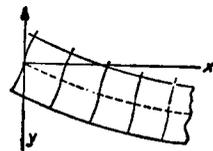


FIG. 149

Los elementos de las secciones situadas en los centros de gravedad permanecen verticales y deslizan unos respecto a otros; por consiguiente, el giro de la elástica, debido a la distorsión únicamente, es igual para cada sección a la distorsión en el centro de gravedad de dicha sección. Representando por  $y_1$  las flechas debidas a la fuerza cortante, la expresión del giro para cada sección será

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{(\tau_{xy})_{y=0}}{G} = \frac{\alpha V}{AG} \quad (a)$$

<sup>1</sup> Se prescinde de la rotación mutua entre secciones adyacentes debida al momento flector.

donde  $\frac{V}{A}$  es la fatiga cortante media;  $G$ , el módulo de elasticidad transversal, y  $\alpha$ , un factor numérico por el que hay que multiplicar la fatiga cortante media para obtener la fatiga cortante en el centro de gravedad de las secciones. Para una sección rectangular,  $\alpha = \frac{3}{2}$  (véase ecuación 66, página 109); para una sección circular,  $\alpha = \frac{4}{3}$  (véase ecuación 68, página 114). Si la carga es continua, la fuerza cortante  $V$  es una función continua que puede diferenciarse respecto a  $x$ . La curvatura originada por la fuerza cortante únicamente será

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\alpha}{AG} \frac{dV}{dx} = -\frac{\alpha}{AG} q.$$

La suma de esta curvatura con la originada por el momento flector (ecuación 79) da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI_z} \left( M + \frac{\alpha EI_z}{AG} q \right). \quad (106)$$

Esta ecuación puede emplearse en lugar de la ecuación (79) para determinar las deformaciones en aquellos casos en que deba considerarse el efecto de la fuerza cortante<sup>1</sup>. Conocidos  $M$  y  $q$  como funciones de  $x$ , la ecuación (106) puede integrarse fácilmente.

El método de la viga conjugada (véase pág. 148) puede también aplicarse en este caso, tomando como ordenadas del diagrama de carga ideal las cantidades

$$M + \alpha \frac{EI_z}{AG} q, \quad (b)$$

en lugar de  $M$ .

Sea, por ejemplo, el caso de una viga simplemente apoyada y con carga uniformemente repartida (fig. 150). El momento flector en una sección cualquiera a distancia  $x$  del apoyo izquierdo es

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}. \quad (c)$$

<sup>1</sup> En la página 292 expondremos otro modo de hallar la flecha adicional debida a la fuerza cortante.

La carga de la viga conjugada consta de dos partes: 1.<sup>a</sup>, la que representa el primer término de (b) dada por el diagrama parabólico de momentos flectores —fig. 150 (b)—, y 2.<sup>a</sup>, la representada por el segundo término de (b),  $\alpha \frac{EI_z}{AG} q$ , que, como  $q$  es constante, es una carga uniformemente distribuida —fig. 150 (c).

La flecha adicional debida a la fuerza cortante, para cualquier sección, es el momento flector producido en la sección correspondiente de la viga conjugada por la carga segunda, dividida por  $EI_z$ . En el centro de la viga esta flecha adicional vale

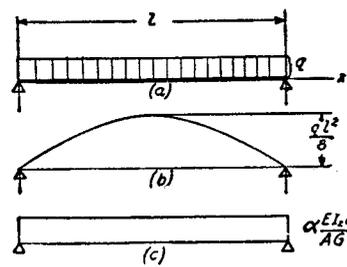


FIG. 150

$$\delta_1 = \frac{1}{EI_z} \left( \alpha \frac{EI_z}{AG} q \right) \frac{l^2}{8} = \frac{\alpha l^2 q}{8 AG}$$

Sumándola con la flecha debida al momento flector (véase ecuación 82, página 133), se obtiene como flecha total

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z} + \frac{\alpha l^2 q}{8 AG} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z} \left( 1 + \frac{48}{5} \alpha \frac{k_z^2}{l^2} \frac{E}{G} \right) \quad (d)$$

donde  $k_z = \frac{\sqrt{I_z}}{A}$  es el radio de giro de la sección con relación al eje de las  $z$ .

Para una sección rectangular de altura  $h$ ,  $k_z^2 = \frac{1}{12} h^2$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$

Poniendo  $\frac{E}{G} = 2(1 + \mu) = 2,6$  se obtiene, mediante (d),

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z} \left( 1 + 3,12 \frac{h^2}{l^2} \right)$$

Se ve que para  $\frac{l}{h} = 10$  el efecto de la fuerza cortante en la deformación es alrededor de un 3 por 100.

A medida que  $\frac{l}{h}$  disminuye, el efecto aumenta.

El factor  $\alpha$  es corrientemente mayor que 2 para vigas en I y

cuando son cortas el efecto de la fuerza cortante es cuantitativamente mayor.

Utilizando la ecuación (70) y figura 106, se tiene

$$\frac{\alpha V}{A} = \frac{V}{b_1 I_z} \left[ \frac{bh^2}{8} - \frac{k_1^2}{8} (b - b_1) \right]$$

de donde

$$\alpha = \frac{A}{b_1 I_z} \left[ \frac{bh^2}{8} - \frac{k_1^2}{8} (b - b_1) \right] \quad (e)$$

Supongamos, por ejemplo,  $h = 60$  cm.,  $A = 194$  cm.<sup>2</sup>,  $I_z = 109765$  cm.<sup>4</sup>, el espesor del alma  $b_1 = 15,6$  mm.,  $l = 6h$ . La ecuación (e) da  $\alpha = 2,42$ . Sustituyendo en la ecuación (d), se encuentra

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z} \left( 1 + \frac{48}{5} \times 2,42 \times \frac{109765}{194 \times 360^2} \times 2,6 \right) = 1,265 \frac{5 ql^4}{384 EI_z}$$

La flecha adicional debida a la fuerza cortante es en este caso igual al 26,5 por 100 de la flecha producida por el momento flector y debe, por consiguiente, tenerse en cuenta.

En el caso de una carga concentrada  $P$  (fig. 151), podemos considerar dicha carga como el caso límite de una carga repartida sobre una parte muy pequeña de la viga. El valor de la carga ficticia  $P_1$  en la viga conjugada, correspondiente al segundo término de la expresión (b), será

$$P_1 = \alpha \frac{EI_z}{AG} P \quad (f)$$

La flecha adicional debida a las fuerzas cortantes se obtiene dividiendo por  $EI_z$  el momento flector producido en la viga conjugada por la carga ficticia concentrada (f). En el caso, por ejemplo, de carga central en la viga dada, el momento flector producido en el centro de la viga conjugada por la carga (f) será

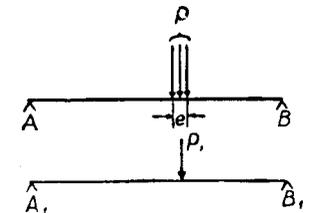


FIG. 151

$\alpha \left( \frac{EI_z}{AG} \right) \cdot \frac{Pl}{4}$  y la flecha adicional en el centro debida a las fuerzas cortantes será

$$\delta_1 = \frac{\alpha Pl}{AG 4} \quad (g)$$

Sumándola a la flecha producida por el momento flector únicamente (véase ecuación 90), la expresión completa de la flecha resulta ser

$$\delta = \frac{Pl^3}{48 EI_z} + \frac{\alpha Pl}{AG 4} = \frac{Pl^3}{48 EI_z} \left( 1 + \frac{12 \alpha k_z^2 E}{l^2 G} \right).$$

Para una viga de sección rectangular de altura  $h$  se tiene

$$\frac{k_z^2}{l^2} = \frac{h^2}{12 l^2}; \quad \alpha = \frac{3}{2}$$

y se obtiene

$$\delta = \frac{Pl^3}{48 EI_z} \left( 1 + 3,90 \frac{h^2}{l^2} \right) \quad (h)$$

Para  $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$  el efecto adicional de la fuerza cortante es alrededor del 4 por 100.

En la discusión precedente se ha supuesto que las secciones de la viga se alabean libremente (fig. 149). La viga uniformemente cargada es un caso en que esta condición se satisface de modo aproximado. La fuerza cortante en el centro de la viga es nula y, por tanto, allí no hay alabeamiento. El alabeamiento crece gradualmente con la fuerza cortante a lo largo de la viga hacia la izquierda o la derecha del centro. La condición de simetría queda satisfecha. Consideremos ahora flexada la viga por la acción de una carga concentrada en el centro. Por la condición de simetría, la sección central de la viga debe permanecer plana. Al mismo tiempo, las secciones adyacentes a la derecha o izquierda de la carga sufren una fuerza cortante  $\frac{P}{2}$  y se alabean por la acción de estas fuerzas cortantes. Por la condición de continuidad de la deformación, sin embargo, no puede haber un cambio brusco entre la sección central plana y el alabeamiento de las adyacentes. Habrá, por tanto, un aumento continuo de alabeamiento o largo de la viga en ambas direcciones a

partir del centro y solamente a alguna distancia de la carga puede el alabeamiento ser equivalente al que produciría una fuerza cortante  $\frac{P}{2}$  en condiciones de alabeo libre de la sección.

De esta discusión puede deducirse que en las proximidades de la sección central la distribución de fatigas no será la anteriormente vista por la teoría elemental de la flexión (véase pág. 109). El alabeamiento está impedido parcialmente y la flecha adicional debida a las fuerzas cortantes será algo menor que la encontrada anteriormente (ecuación  $g$ ). Un estudio más detallado de la cuestión<sup>1</sup> muestra que en el caso de una carga concentrada en el centro de la viga la flecha en dicha sección es

$$\delta = \frac{Pl^3}{48 EI_z} \left[ 1 + 2,85 \frac{h^2}{l^2} - 0,84 \left( \frac{h}{l} \right)^3 \right] \quad (k)$$

El caso de una viga en voladizo es enteramente análogo. Si la sección empotrada puede alabeo libremente, tal como indica la figura 152 (a), las condiciones de deformación serán las expresadas por la ecuación (h). La flecha de un voladizo de sección rectangular se averiguará sustituyendo  $l$  y  $P$  en lugar de  $\frac{l}{2}$  y  $\frac{P}{2}$  en dicha ecuación, obteniéndose

$$\delta = \frac{Pl^3}{3 EI} \left( 1 + 0,98 \frac{h^2}{l^2} \right) \cdot (l)$$

Cuando el alabeamiento del extremo empotrado está completamente impedido —fig. 152 (b)—, las condiciones vienen expresadas por la ecuación (k) y por una sustitución análoga se tiene para la flecha el valor

$$\delta = \frac{Pl^3}{3 EI} \left[ 1 + 0,71 \frac{h^2}{l^2} - 0,10 \left( \frac{h}{l} \right)^3 \right] \quad (m)$$

menor que el dado por (l).

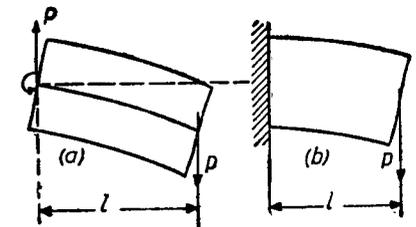


FIG. 152

<sup>1</sup> Véase L. N. G. Filon., *Phil. Trans. Roy. Soc. (A)*, vol. 201, pág. 63, 1903, y Timoshenko, *Phil. Mag.*, vol. 47, pág. 1095, 1924. Véase también Th. v. Kármán, *Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolimitanarum*, 1923, y *Theory of Elasticity* del autor, pág. 95, 1934.

## CAPÍTULO VI

## CASOS HIPERESTÁTICOS EN LA FLEXIÓN

40. Exceso de ligaduras.—En lo expuesto anteriormente hemos considerado tres tipos de vigas: *a*) una viga en voladizo; *b*) una viga apoyada en sus extremos, y *c*) una viga con voladizos. En los tres casos, las reacciones en los apoyos pueden determinarse por las ecuaciones fundamentales de la estática; por tanto, los problemas son estáticamente determinados. Vamos ahora a considerar problemas de flexión en los que las

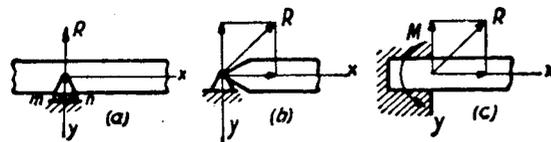


FIG. 153

ecuaciones de la estática no son suficientes para la determinación de las reacciones en los apoyos y tendremos necesidad de deducir ecuaciones complementarias basadas en la deformación de la viga. Estos problemas se denominan estáticamente indeterminados o hiperestáticos.

Veamos ahora los diversos tipos de apoyos que puede tener una viga. El apoyo representado en la figura 153 (*a*) se denomina articulación móvil. Despreciando el rozamiento en la articulación y en los rodillos, es evidente que en este tipo de apoyo la reacción debe pasar por el centro de la articulación y además ser perpendicular al plano de apoyo *mn* sobre el que pueden moverse los rodillos. Conocemos, por tanto, el punto de aplicación

y la dirección de la reacción. Queda solamente un elemento desconocido: la intensidad de la reacción.

En la figura 153 (*b*) se ve una articulación fija. En este caso la reacción debe pasar por el centro de la articulación, pero puede tener cualquier dirección en el plano de la figura. Tenemos dos incógnitas a determinar por las ecuaciones de la estática: la dirección de la reacción y su magnitud, o bien las componentes vertical y horizontal de la reacción.

En la figura 153 (*c*) se representa un empotramiento. En este caso no solamente son incógnitas la dirección y magnitud de la reacción, sino también su punto de aplicación.

Las fuerzas de reacción distribuidas sobre la sección empotrada pueden reemplazarse por una fuerza *R* aplicada en el centro de gravedad de la sección y un par *M*.

Tenemos, pues, tres incógnitas a determinar por las ecuaciones de la estática: las dos componentes de la fuerza de reacción *R* y la magnitud del par *M*. Para vigas solicitadas por cargas transversales situadas en un plano, disponemos, para determinar las reacciones en los apoyos, de las tres ecuaciones de la estática siguientes:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0. \quad (a)$$

Si la viga está apoyada de modo que solamente haya tres incógnitas, las reacciones podrán determinarse por las ecuaciones (*a*) y el problema es estáticamente determinado. Estos tres elementos son los suficientes para asegurar la inmovilidad de la viga. Cuando el número de elementos de reacción es mayor de tres, diremos que hay ligaduras excesivas y que el problema es hiperestático. Un voladizo está apoyado solamente en un punto: el extremo empotrado. En este caso, tal como hemos dicho, el número de elementos de reacción desconocidos es tres y pueden determinarse por las ecuaciones de la estática. Para vigas apoyadas en los extremos y vigas con voladizos se supone que uno de los apoyos es fijo y el otro una articulación móvil. En este caso tenemos nuevamente tres elementos de reacción desconocidos que pueden determinarse por las condiciones de la estática.

Si la viga tiene articulaciones fijas en ambos extremos (figura 154), el problema es hiperestático. En cada extremo tenemos

dos elementos desconocidos, las dos componentes de la reacción correspondiente, y para determinar estas cuatro incógnitas disponemos tan sólo de las tres ecuaciones (a). Hay, por tanto, una ligadura sobrante y es necesario considerar la deformación de la viga para determinar las reacciones. Las componentes verticales de las reacciones pueden calcularse mediante las ecuaciones de la estática. En el caso de cargas verticales, puede deducirse también, por consideraciones de estática, que las componentes  $H$  son iguales y de dirección opuesta. Para encontrar el valor de  $H$  consideraremos el alargamiento del eje de la viga durante la flexión.

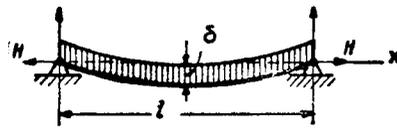


FIG. 154

Una buena aproximación de este alargamiento puede obtenerse suponiendo que la elástica de la viga es una parábola <sup>1</sup> de ecuación

$$y = \frac{4\delta x(l-x)}{l^2} \quad (b)$$

siendo  $\delta$  la flecha en el centro. La longitud de la curva es

$$s = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (c)$$

En el caso de pequeña curvatura, la cantidad  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  es pequeña con relación a la unidad, y prescindiendo de cantidades de orden superior al segundo se obtiene aproximadamente

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Sustituyendo esta expresión en (c) y utilizando la ecuación (b) se encuentra, para longitud de la curva, la expresión

$$s = l \left(1 + \frac{8\delta^2}{3l^2}\right)$$

<sup>1</sup> La expresión exacta de la elástica se verá más adelante (*Segunda parte*).

Por consiguiente, la diferencia entre la longitud de la curva y la distancia  $l$  entre los apoyos que representa el alargamiento axial total de la viga es  $\frac{8\delta^2}{3l}$ . El alargamiento unitario será  $\frac{8\delta^2}{3l^2}$ .

Representando por  $E$  el módulo de elasticidad del material de la viga y por  $A$  el área de su sección recta, se obtiene la reacción horizontal por la ecuación

$$H = \frac{8\delta^2}{3l^2} EA \quad (b)$$

Haremos notar que para la mayor parte de las vigas usadas en la práctica la flecha  $\delta$  es muy pequeña comparada con la longitud y que la fatiga de extensión  $\frac{8\delta^2}{3l^2} E$  producida por las fuerzas  $H$  es corrientemente pequeña comparada con las fatigas de flexión y puede despreciarse.

Este resultado justifica la norma práctica de calcular las vigas apoyadas en sus extremos suponiendo que uno de los dos apoyos es una articulación móvil; sin embargo, en caso de grandes luces, se organiza uno de los apoyos de modo que permita la traslación de la articulación.

En los casos de flexión de pletinas o barras flexibles para los que  $\delta$  no es muy pequeña comparada con  $l$ , no pueden despreciarse las fatigas de extensión producidas por las fuerzas longitudinales. Estos problemas se verán más adelante (véase *Segunda parte*).

El método que vamos a emplear para la resolución de los problemas de flexión es el de superposición y obtendremos las soluciones adecuadas combinando casos estáticamente determinados de tal forma que satisfagan las condiciones de apoyo.

**41. Viga empotrada por un extremo y apoyada en el otro.**— Consideraremos primeramente el caso de que actúe sobre la viga una sola carga concentrada  $P$  (fig. 155). En este caso tenemos tres elementos de reacción desconocidos en el apoyo izquierdo y uno en el derecho.

El problema tiene, por tanto, una incógnita o ligadura hiperestática, es decir, sobrante. Para resolver el caso consideremos como sobrante la ligadura que evita el giro del extremo izquier-

do de la viga durante la flexión. Prescindiendo de esta ligadura, se obtiene el sistema estáticamente determinado o isostático de la figura 155 (b). La flexión producida por  $M_a$ , estáticamente in-

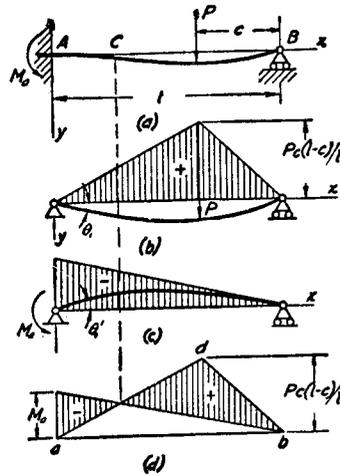


FIG. 155

determinado, se estudia por separado —fig. 155 (c)—<sup>1</sup>. Es evidente que la flexión de la viga representada en la figura 155 (a) puede obtenerse combinando los casos (b) y (c). Bastará para ello que el valor del par  $M_a$  en el apoyo sea tal que deje satisfecha la condición

$$\theta_1 = -\theta'_1. \quad (a)$$

Es decir, que el giro del extremo izquierdo de la viga debido a la fuerza  $P$  se anule por la acción de  $M_a$  y que la condición de giro cero en el empotramiento quede satisfecha. Para obtener el par hiperestático  $M_a$  basta sustituir en

la ecuación (a) los valores conocidos de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta'_1$ , ecuación (88), página 136, y (104), página 151. De este modo,

$$\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6lEI_z} = -\frac{M_a l}{3EI_z},$$

de donde

$$M_a = -\frac{Pc(l^2 - c^2)}{2l^2}. \quad (107)$$

El diagrama de momentos flectores puede obtenerse ahora combinando los diagramas de los casos (b) y (c) tal como indica el área rayada de la figura 155 (d). El momento flector máximo se presentará en  $a$  o en  $d$ .

La flecha, en cualquier punto, se obtendrá fácilmente restando de la flecha producida por la carga  $P$  la flecha producida por el par  $M_a$ . Las ecuaciones de las elásticas para ambos ca-

<sup>1</sup> Las elásticas y los diagramas de momentos flectores se dan unidos.

sos son las (86) y (87), página 136, y (105), página 151. Supongamos, por ejemplo, el caso  $c < \frac{1}{2}l$  y calculemos la flecha en el centro de la viga.

Por las ecuaciones (91) y (105),

$$\delta = \frac{Pc}{48EI_z}(3l^2 - 4c^2) + \frac{M_a l^2}{16EI_z},$$

utilizando la ecuación (107),

$$\delta = \frac{Pc}{96EI_z}(3l^2 - 5c^2).$$

En el punto  $C$ , para el que el momento flector es cero, la curvatura de la elástica es también cero y tenemos un punto de inflexión, es decir, en este punto la curvatura cambia de signo.

Puede observarse en la ecuación (107) que el momento flector en el empotramiento depende de la posición de la carga  $P$ . Si se iguala a cero la derivada de (107) respecto a  $c$ , se obtiene que el momento  $M_a$  alcanza su valor máximo cuando  $c = \frac{l}{\sqrt{3}}$ , para este valor de  $c$

$$(M_a)_{\text{máx}} = \frac{Pl}{3\sqrt{3}} = 0,192 Pl. \quad (108)$$

El momento flector en el punto de aplicación de la carga deducido de la figura 155 (d) es

$$M_d = \frac{Pc(l-c)}{l} - \frac{c Pc(l^2 - c^2)}{2l^2} = \frac{Pc}{2l^3}(l-c)^2(2l+c). \quad (b)$$

Si se deriva (b) respecto a  $c$  y se iguala a cero el resultado, se ve que  $M_d$  es máximo cuando

$$c = \frac{l}{2}(\sqrt{3} - 1) = 0,366 l$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (b), se obtiene

$$(M_d)_{\text{máx}} = 0,174 Pl.$$

Comparando esta expresión con la ecuación (108), se deduce que en el caso de carga móvil la fatiga normal máxima  $\sigma_z$  se presenta en la sección de empotramiento.

Resuelto el problema para una carga concentrada única y utilizando el método de superposición, puede resolverse el problema para otros tipos de cargas transversales mediante el empleo de las fórmulas obtenidas. Sea, por ejemplo, el caso representado en la figura 156. El momento producido en el apoyo A por una carga elemental  $qdc$  se obtiene por la ecuación (107), sustituyendo  $qdc$ , en lugar de  $P$ . El momento total  $M_a$  en el apoyo será:

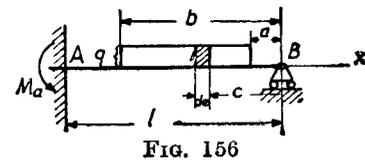


FIG. 156

Si la carga está distribuida sobre la longitud total de la viga se hace  $a = 0$ ,  $b = l$ , en la ecuación (c), y se obtiene

$$M_a = - \int_a^b \frac{qcdc(l^2 - c^2)}{2l^2} = - \frac{q}{2l^2} \times \left[ \frac{l^2(b^2 - a^2)}{2} - \frac{b^4 - a^4}{4} \right]. \quad (c)$$

$$M_a = - \frac{ql^2}{8}. \quad (109)$$

El diagrama de momentos flectores se obtiene restando el diagrama triangular debido al par  $M_a$  (fig. 157) del diagrama parabólico, debido a la carga uniforme. Se observará que las fatigas máximas de flexión se presentan en las secciones de empotramiento. La flecha en cualquier punto se obtiene restando la flecha en dicho punto producida por el par  $M_a$  (ecuación 105, página 151) de la flecha que en el mismo punto produce la carga uniforme (ecuación 81, página 132). Para el centro de la luz se obtiene

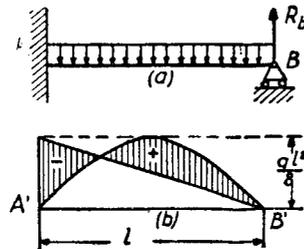


FIG. 157

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z} + \frac{M_a l^2}{16 EI_z} = \frac{ql^4}{192 EI_z}. \quad (110)$$

Problemas

1. Dibujar los diagramas de fuerza cortante para los casos expuestos en las figuras 155 y 157.

2. Determinar la flecha máxima para el caso de la figura 157.

Solución: Combinando las ecuaciones (81) y (105) se obtiene la ecuación de la elástica para este caso:

$$y = \frac{q}{48 EI_z} (3l^2 x^2 - 5lx^3 + 2x^4). \quad (d)$$

Haciendo  $\frac{dy}{dx} = 0$  se obtiene para la abscisa del punto de flecha máxima

$$x = \frac{l}{16} (15 - \sqrt{33}) = 0,579 l. \text{ Sustituyendo en (d),}$$

$$\delta_{\max} = \frac{ql^4}{185 EI_z}.$$

3. Determinar la reacción en el apoyo derecho para el caso de la figura 157, considerando esta reacción como la ligadura sobrante o hiperestática.

Solución: Liberando el apoyo B, la flecha en este punto de la viga considerada como voladizo sería (ecuación 84)  $\frac{ql^4}{8 EI_z}$ . La reacción  $R_b$  en B —fig. 157 (a)— debe ser tal que elimine la flecha anterior. Utilizando la ecuación (95) se obtiene la ecuación

$$\frac{ql^4}{8 EI_z} = \frac{R_b l^3}{3 EI_z},$$

de donde

$$R_b = \frac{3}{8} ql.$$

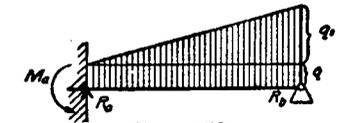


FIG. 158

4. Una viga está cargada en la forma indicada por la figura 158. Determinar el momento  $M_a$  y las reacciones  $R_a$  y  $R_b$  en los apoyos.

Respuesta:

$$-M_a = \frac{ql^2}{8} + \frac{7}{120} ql^2; \quad R_a = \frac{5}{8} ql + \frac{9}{40} ql; \quad R_b = \frac{3}{8} ql + \frac{11}{40} ql.$$

5. Determinar la reacción  $R_b$  en el apoyo B de una viga cargada uniformemente (fig. 157), si el apoyo B es elástico, de tal modo que una fuerza hacia abajo  $k$  haga descender al apoyo la unidad de longitud.

Solución: Usando el método del problema anterior 3, la ecuación que determina  $R_b$  será:

$$\frac{ql^4}{8 EI_z} - \frac{R_b l^3}{3 EI_z} = \frac{R_b}{k},$$

de donde

$$R_b = \frac{3}{8} ql \frac{1}{1 + \frac{kl^3}{3EI_z}}$$

6. Construir el diagrama de momentos flectores para una viga uniformemente cargada apoyada en tres puntos equidistantes.

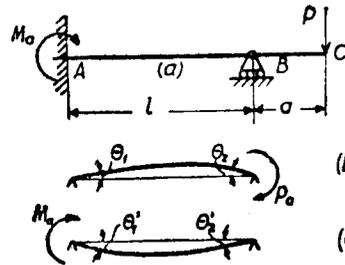


FIG. 159

*Procedimiento:* Por simetría, la sección del centro no debe girar durante la flexión y cada mitad de la viga estará en las condiciones de una viga empotrada por un extremo y apoyada por el otro.

7. Determinar la flecha del extremo C de la viga representada en la figura 159.

*Solución:* Reemplazando la acción del voladizo por la de un par Pa, la flexión de la viga entre los apoyos se

obtendrá por superposición de los casos (b) y (c). El par hiperestático Ma se obtendrá por la ecuación  $\theta_1 = -\theta'_1$ , o sea

$$\frac{Pal}{6EI_z} = \frac{M_a l}{3EI_z}$$

de donde

$$M_a = \frac{Pa}{2}$$

La flecha en C será

$$\delta = \frac{Pa^3}{3EI_z} + a(\theta_2 - \theta'_2) = \frac{Pa^3}{3EI_z} + \frac{Pa^2 l}{4EI_z}$$

El primer término del segundo miembro representa la flecha de un voladizo y el segundo representa la flecha debida a la rotación de la sección en B.

8. Determinar el valor adicional de la reacción en B para la viga representada en la figura 155, debido a un calentamiento no uniforme de la viga tal que la temperatura varíe desde el valor  $t_0$ , en la cara inferior, hasta el valor  $t$ , en la cara superior, según una ley lineal.

*Solución:* Prescindiendo del apoyo B, el calentamiento enunciado curvaría a la viga en forma de arco de círculo. El radio de este círculo vendría dado por la ecuación  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha(t - t_0)}{h}$ , siendo  $h$  la altura de la viga y  $\alpha$  el coeficiente de dilatación. La flecha en B se encontrará como en el problema 2, página 90, y es

$$\delta = \frac{l^2}{2r} = \frac{l^2 \alpha (t - t_0)}{2h}$$

Esta flecha debe desaparecer en virtud de la reacción en el apoyo B. Representando esta reacción por  $R_b$ , se tiene

$$\frac{R_b l^3}{3EI_z} = \frac{l^2 \alpha (t - t_0)}{2h}$$

de donde

$$R_b = \frac{3EI_z}{2hl} \alpha (t - t_0)$$

9. Una ménsula AB, cargada en su extremo, se apoya en otra más corta CD de la misma sección. Determinar la acción mutua X en C.

*Solución:* La acción buscada X puede encontrarse estableciendo la condición de que ambas ménsulas tengan la misma flecha en C. Utilizando la ecuación (95) para la ménsula inferior y la ecuación (97) unida a la ecuación (95) para la superior, se tiene

$$\frac{Xl_1^3}{3EI_z} = \frac{P}{EI_z} \left( \frac{l_1^2}{2} - \frac{l_1^3}{6} \right) - \frac{Xl_1^3}{3EI_z}$$

de donde

$$X = \frac{3P}{4} \left( \frac{l}{l_1} - \frac{1}{3} \right)$$

Examinando los diagramas del momento flector para ambas ménsulas, se deduce que en C la ménsula superior sufre mayor deformación angular que la inferior. De ello se deduce que las dos ménsulas solamente se tocan en los puntos D y C.

10. Resolver el problema 7, suponiendo que en lugar de la carga concentrada P solicita a la viga una carga uniformemente distribuida de intensidad q repartida: 1.º, sobre la longitud a del voladizo; 2.º, sobre toda la longitud de la viga.

11. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para el caso de la figura 156, si  $a = 1,20$  m.;  $b = 3,60$  m.;  $l = 4,50$  m., y  $q = 7$  kg./cm.

42. Viga con los dos extremos empotrados.—En este caso tenemos seis elementos de reacción (tres en cada extremo), es decir, el problema tiene tres ligaduras hiperestáticas. Sin embargo, para las vigas corrientes las componentes horizontales de las reacciones pueden despreciarse (véase pág. 171), lo que reduce el número de cantidades hiperestáticas a dos. Consideremos los momentos  $M_a$  y  $M_b$  en los apoyos como ligaduras hiperestáticas. De este modo, para el caso de una carga concentrada única P—fig. 161 (a)—, la solución se obtiene combinando

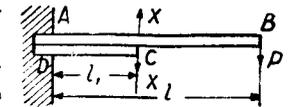


FIG. 160

los dos problemas isostáticos representados en la figura 161 (b) y (c). Es evidente que las condiciones de empotramiento en los extremos de la viga AB quedarán satisfechas si los pares  $M_a$  y  $M_b$  son tales que verifican las relaciones

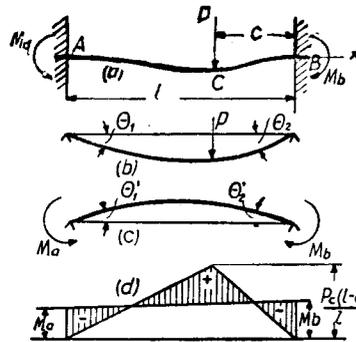


FIG. 161

De estas dos ecuaciones deduciremos los valores de los dos pares hiperestáticos. Utilizando las ecuaciones (88) y (89) para la carga concentrada y las ecuaciones (103) y (104) para los pares,

$$\theta_1 = -\theta'_1; \quad \theta_2 = -\theta'_2. \quad (a)$$

las ecuaciones (a) se transforman en

las ecuaciones (a) se transforman en

$$-\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EI_z} = \frac{M_a l}{3EI_z} + \frac{M_b l}{6EI_z}$$

$$-\frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6EI_z} = \frac{M_a l}{6EI_z} + \frac{M_b l}{3EI_z}$$

De donde

$$M_a = -\frac{Pc^2(l-c)}{l^2}; \quad M_b = -\frac{Pc(l-c)^2}{l^2}. \quad (111)$$

Combinando los diagramas de momentos flectores para los casos (b) y (c), se obtiene el diagrama representado en la figura 161 (d). El momento flector positivo máximo acontece en el punto C (aplicación de la carga). La magnitud se deduce de la figura 161 (d), y su expresión es la siguiente:

$$M_c = \frac{Pc(l-c)}{l} + \frac{M_a c}{l} + \frac{M_b(l-c)}{l} = \frac{2Pc^2(l-c)^2}{l^3}. \quad (112)$$

En la figura 161 (d) se ve que el momento flector máximo en valor absoluto es el que corresponde a C o al apoyo más próximo. Para una carga móvil, es decir, cuando c varía, suponiendo  $c < \frac{l}{2}$ , el valor máximo de  $M_b$  se obtiene haciendo  $c = \frac{1}{3}l$  en la ecuación (111). Este máximo vale  $\frac{4}{27}Pl$ . El momento flector

bajo la carga es máximo para  $c = \frac{l}{2}$  y este máximo vale  $\frac{1}{8}Pl$  (ecuación 112). Por consiguiente, para una carga móvil el momento máximo se presenta en el extremo.

Empleando el método de superposición, la flecha y giro en cualquier punto puede obtenerse combinando la deformación producida por la carga P, con la que producen los pares  $M_a$  y  $M_b$ .

Resuelto el problema para una carga concentrada única P, cualquier otro tipo de cargas transversales puede fácilmente estudiarse utilizando el método de superposición.

Problemas

1. Dibujar el diagrama de fuerza cortante para el caso de la figura 161 (a), si  $P = 500$  kg.,  $l = 3,60$  m. y  $c = 1,20$  m.

2. Dibujar el diagrama de momentos flectores para una viga empotrada en sus extremos y sometida a la acción de una carga uniformemente repartida (fig. 162).

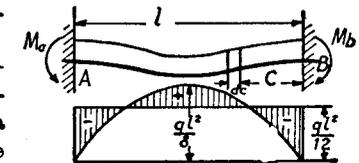


FIG. 162

Solución: El momento en A producido por un elemento qdc de la carga —fig. 162 (a)— es, ecuación (111):

$$dM_a = -\frac{qdc^2(l-c)}{l^2}$$

El momento producido por la carga total será

$$M_a = -\int_0^l \frac{qdc^2(l-c)}{l^2} = -\frac{ql^3}{12}$$

El momento en el apoyo B tendrá el mismo valor. Combinando el diagrama parabólico de momentos flectores correspondiente a la carga uniformemente repartida con el diagrama rectangular correspondiente a los dos pares iguales aplicados en los extremos, se obtiene el diagrama representado en la figura 162 (b) por el área rayada.

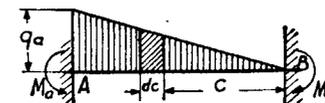


FIG. 163

3. Determinar los momentos en los apoyos de una viga con los extremos empotrados, cargada con la carga triangular representada en la figura 163.

Solución: La intensidad de la carga a la distancia c del apoyo B es  $\frac{q_a c}{l}$  y la carga representada por el elemento rayado es  $\frac{q_a c dc}{l}$ . Los

pares correspondientes en los extremos producidos por esta carga elemental son, ecuación (111):

$$dM_a = -\frac{q_a c^3 (l-c) dc}{l^3}; \quad dM_b = -\frac{q_a c^3 (l-c)^2 dc}{l^3}.$$

Por consiguiente,

$$M_a = -\int_0^l \frac{q_a c^3 (l-c) dc}{l^3} = -\frac{q_a l^3}{20}; \quad M_b = -\int_0^l \frac{q_a c^3 (l-c)^2 dc}{l^3} = -\frac{q_a l^3}{30}.$$

4. Determinar los pares de reacción  $M_a$  y  $M_b$  en una viga con los extremos empotrados flexada por un par  $Pc$  (fig. 164).

*Solución:* Utilizando la solución del problema 5, pág. 153, y las ecuaciones (104) y (105), se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$2M_a + M_b = -\frac{3Pc}{l^3} \left[ a^2 \left( b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^3 \right],$$

$$2M_b + M_a = \frac{3Pc}{l^3} \left[ \frac{2}{3} a^3 - b^2 \left( a + \frac{b}{3} \right) \right].$$

De donde  $M_a$  y  $M_b$  pueden deducirse fácilmente.

5. Determinar los momentos flectores en los extremos de una viga empotrada debidos a un calentamiento irregular de la viga, si la temperatura varía desde la  $t_0$  para la cara inferior a la  $t$  para la superior, con arreglo a una ley lineal.

*Respuesta:*

$$M_a = M_b = \frac{\alpha EI_z (t - t_0)}{h},$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación y  $h$  la altura de la viga.

6. Determinar el efecto en la reacción y en el par de reacción en  $A$  de un desplazamiento vertical pequeño  $\delta$  del extremo empotrado  $A$  de la viga  $AB$  (fig. 161).

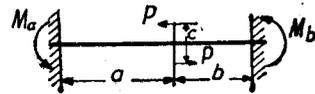


FIG. 164

*Solución:* Quitemos el apoyo  $A$ ; de este modo, la flecha  $\delta_1$  en  $A$  y el giro  $\theta_1$  en dicho punto se hallarán por las fórmulas correspondientes a un voladizo empotrado en  $B$  y cargado con  $P$ ; es decir,

$$\delta_1 = \frac{Pc^3}{3EI_z} + \frac{Pc^2}{2EI_z} (l-c); \quad \theta_1 = \frac{Pc^2}{2EI_z}.$$

Aplicando en  $A$  una fuerza de reacción  $X$  hacia arriba y un par de reacción  $Y$  en la misma dirección que  $M_a$ , de magnitudes tales que anulen el giro  $\theta_1$  y que reduzcan la flecha a  $\delta$ , satisfaremos las condiciones del enunciado. Las ecuaciones que determinan las incógnitas  $X$  e  $Y$  serán:

$$\frac{Xl^2}{2EI_z} - \frac{Yl}{EI_z} = \frac{Pc^2}{2EI_z},$$

$$\frac{Xl^3}{3EI_z} - \frac{Yl^2}{2EI_z} = \delta_1 - \delta.$$

7. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga de la figura 163, si  $q_a = 7$  kg./cm. y  $l = 4,50$  m.

8. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para una viga con los extremos empotrados si la mitad izquierda de la viga está cargada uniformemente con una intensidad  $q = 7$  kg./cm. La luz de la viga es  $l = 4,80$  m.

43. Pórticos y cuadros.—El método usado anteriormente para el caso de vigas hiperestáticas puede también aplicarse al estudio de los pórticos y cuadros. Sea, por ejemplo, el pórtico

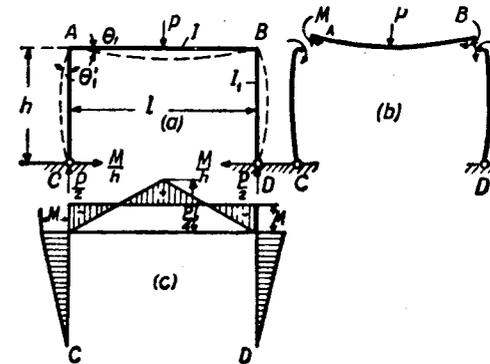


FIG. 165

simétrico y simétricamente cargado de la figura 165, articulado en  $C$  y  $D$ . La forma del pórtico después de la deformación está representada con líneas de puntos. Despreciando el cambio de longitud de las barras<sup>1</sup> y considerando solamente la flexión, puede considerarse formado el pórtico como indica la figura 165 (b). Es evidente que los pares  $M$  que obran en los extremos de la viga horizontal  $AB$  y que se oponen al libre giro de dichos extremos representan la acción de las barras verticales sobre la viga horizontal. Este par  $M$  puede considerarse como la única ligadura hiperestática existente en este caso. Conocido  $M$ , la flexión de las tres vigas puede determinarse sin dificultad alguna. Para calcular  $M$ , tenemos la condición de que  $A$  y  $B$  son uniones rígidas entre las barras, es decir, que el giro

<sup>1</sup> La acción simultánea de esfuerzo directo y flexión se discutirá más adelante (*Segunda parte*).

del extremo izquierdo de la barra horizontal debe ser igual al giro de la cabeza del pilar  $AC$ . La ecuación que determina  $M$  es, por consiguiente,

$$\theta_1 = \theta'_1. \quad (a)$$

$\theta_1$  puede determinarse por la flexión de la viga horizontal  $AB$ . Representando con  $l$  la longitud de esta viga y con  $EI$  su rigidez de flexión, la rotación del extremo  $A$  debida a la carga  $P$  (ecuación 88) ( $b = \frac{l}{2}$ ), es  $\frac{Pl^2}{16EI}$ . Los pares de los extremos originan una rotación en dirección opuesta igual a  $\frac{Ml}{2EI}$  (ecuaciones 104 y 105). El valor final del ángulo de giro será:

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EI} - \frac{Ml}{2EI}.$$

Considerando ahora la barra vertical como una viga apoyada en los extremos, de longitud  $h$  y con una rigidez a la flexión  $EI_1$ , flexada por un par  $M$ , el giro en su extremo superior será (ecuación 104):

$$\theta'_1 = \frac{Mh}{3EI_1}.$$

Sustituyendo en la ecuación (a), se obtiene

$$\frac{Pl^2}{16EI} - \frac{Ml}{2EI} = \frac{Mh}{3EI_1},$$

de donde

$$M = \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{2h}{3l} \frac{I}{I_1}}. \quad (113)$$

Conocido  $M$ , el diagrama de momentos flectores se construye tal como indica la figura 165 (c). Las reacciones en las articulaciones  $C$  y  $D$  se calculan fácilmente. Las reacciones verticales se obtienen por las ecuaciones de las estáticas. Las reacciones horizontales se deducen del equilibrio de las barras verticales.

Este problema puede resolverse de otro modo tomando la reacción horizontal  $H$  en las articulaciones  $C$  y  $D$  como incógnita hiperestática, en lugar de  $M$  (fig. 166). El problema hiperestático se resuelve por superposición de los dos problemas isos-

táticos representados en la figura 166 (b) y (c). En el caso *b* se prescinde de la ligadura sobrante que impide el movimiento de las articulaciones  $C$  y  $D$ . Las barras verticales no sufren, por consiguiente, presión alguna. La barra horizontal  $AB$  está en las condiciones de una viga simplemente apoyada cuyos

ángulos de rotación son  $\frac{Pl^2}{16EI}$ , y el movimiento horizontal de cada articulación  $C$  y  $D$  es, por consiguiente,  $h \frac{Pl^2}{16EI}$ . En el caso *c*, el efecto de las

fuerzas  $H$  es conocido. Dichas fuerzas producen pares de flexión en los extremos de la barra horizontal  $AB$  iguales a  $Hh$ ; por consiguiente, los ángulos de rotación de estos extremos serán  $\theta' = \frac{Hh \cdot l}{2EI}$ . La flecha de

cada articulación  $C$  o  $D$  consta de dos partes: la flecha  $\theta'h = \frac{Hh^2l}{2EI}$ , de-

bidada a la rotación del extremo superior, y la flecha  $\frac{Hh^3}{3EI_1}$  de las

barras verticales como voladizos. En el caso actual—fig. 166 (a)—, las articulaciones  $C$  y  $D$  no se mueven; por consiguiente, los desplazamientos horizontales producidos por la fuerza  $P$ —figura 166 (b)— deben compensarse por el efecto de las fuerzas  $H$ —figura 166 (c)—, es decir,

$$\frac{Pl^2}{16EI} h = \frac{Hh^2l}{2EI} + \frac{Hh^3}{3EI_1},$$

de donde

$$H = \frac{1}{h} \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{2h}{3l} \frac{I}{I_1}}.$$

Recordando que  $H \cdot h = M$ , este resultado reproduce la ecuación (113). Este último método de análisis se utiliza espe-

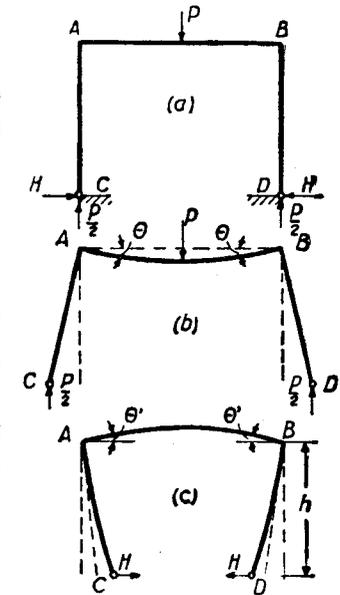


FIG. 166

cialmente para cargas asimétricas tales como la de la figura 167. Prescindiendo de la ligadura que impide el movimiento horizontal de las articulaciones *C* y *D*, estamos en el caso representado por la figura 167 (b). Es evidente que el aumento de las distancias entre *C* y *D* puede obtenerse multiplicando por *h* la suma de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Utilizando las ecuaciones (88) y (89), este incremento de la distancia será

$$h \left[ \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EI} + \frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6EI} \right] = \frac{Pc(l-c)}{2EI} h.$$

Este incremento debe eliminarse por la acción de las fuerzas *H* —fig. 166 (c)—. Utilizando los resultados obtenidos en el problema anterior, se puede escribir la ecuación siguiente que determine *H*

$$2 \left( \frac{Hh^3 l}{2EI} + \frac{Hh^3}{3EI_1} \right) = \frac{Pc(l-c)h}{2EI},$$

de donde

$$H = \frac{Pc(l-c)}{2hl} \frac{1}{1 + \frac{2Ih}{3I_1l}} \quad (114)$$

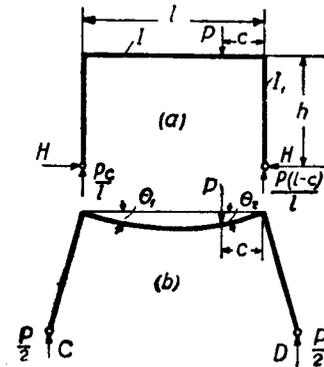


Fig. 167

Hallada la solución para una carga concentrada, cualquier otro caso de carga de la viga *AB* del pórtico puede resolverse fácilmente utilizando el método de superposición.

Consideremos ahora un pórtico con los extremos empotrados y cargado asimétricamente tal como indica la figura 168. En este caso tenemos tres elementos de reacción en cada apoyo y el sistema tiene tres ligaduras hiperestáticas. En la resolución de este problema usaremos un método basado en el de superposición, consistente en descomponer el sistema dado de cargas en partes tales que para cada carga parcial pueda encontrarse una solución sencilla <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Este método lo aplica a muchos casos W. L. André en su libro *Das B-U Verfahren*, München and Berlin, 1919.

El problema representado en la figura 168 (a) puede resolverse superponiendo las soluciones de los dos problemas que representan las figuras 168 (b) y (c). El caso (b) es el de una carga simétrica y puede resolverse del mismo modo que el primer ejemplo (fig. 165). Examinando el caso (c), se ve que el punto de inflexión *O* de la barra horizontal *AB* está situado en el centro de la barra. Esto se deduce de que las cargas  $\frac{P}{2}$  están a igual distancia del eje vertical de simetría del pórtico y son

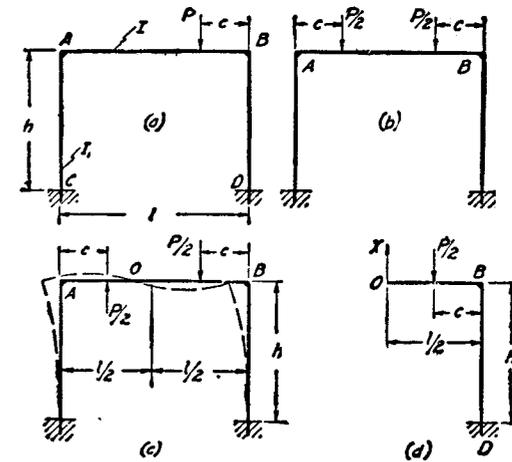


FIG. 168

de sentido opuesto. El momento, la flecha y la fuerza axial producidos en el punto medio *O* de la barra horizontal *AB* por una de las fuerzas  $\frac{P}{2}$  serán equilibrados por la acción de la otra carga  $\frac{P}{2}$ . Por consiguiente, en dicho punto no habrá momento flector, ni flecha, ni fuerza axial.

La magnitud de la fuerza cortante *X* en el punto *O* puede hallarse por la condición de que el corrimiento vertical de *O* sea cero —fig. 168 (d)—. Este corrimiento consta de dos partes: una flecha  $\delta_1$ , debida a la flexión del voladizo *OB*, y una flecha  $\delta_2$ , debida a la rotación del extremo *B* de la barra vertical *BD*. Empleando las conocidas ecuaciones de un voladizo (ecua-

ción 98) y las notaciones de la figura, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\delta_1 = \frac{P' c^3}{2 \cdot 3 EI} + \frac{P c^2}{2 \cdot 2 EI} \left( \frac{l}{2} - c \right) - \frac{X \left( \frac{l}{2} \right)^3}{3 EI},$$

$$\delta_2 = \left( \frac{Pc}{2} - X \frac{l}{2} \right) \frac{h}{EI_1} \frac{l}{2}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación  $\delta_1 + \delta_2 = 0$ , se halla fácilmente el valor de  $X$ . Conocido  $X$ , el momento flector para las secciones del pórtico en el caso (c) se calcula sin dificultad. Combinando estos momentos flectores con los del caso de carga simétrica (b), se obtiene la solución del problema (a)<sup>1</sup>.

**Problemas**

1. Determinar los momentos flectores en los ángulos del cuadro de la figura 169.

*Solución:* Considerando la barra  $AB$  como una viga apoyada en

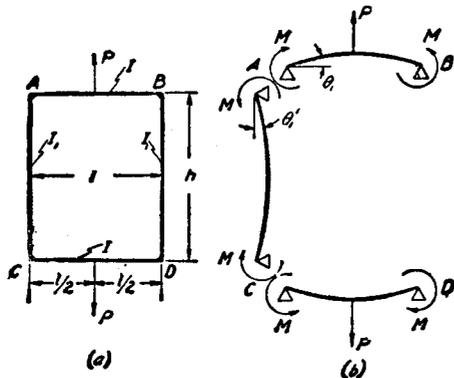


FIG. 169

los extremos (fig. 169) y representando con  $M$  los momentos en los ángulos, el giro  $\theta_1$  será

$$\frac{Pc^2}{16 EI} - \frac{Ml}{2 EI}.$$

Escribiendo que este ángulo es igual al  $\theta_1$  girado por los extremos

<sup>1</sup> Kleinlogel, en su libro *Mehrstielige Rahmen* (Berlín, 1927), da las fórmulas a aplicar en muchos casos prácticos de pórticos.

de las barras verticales al flexarlas los pares  $M$ , se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{Pl^2}{16 EI} - \frac{M}{2 EI} = \frac{Mh}{2 EI_1},$$

de donde

$$M = \frac{Pl}{8} \frac{l}{1 + \frac{h}{l} \frac{I}{I_1}}.$$

2. Determinar las reacciones horizontales o empujes  $H$  para el caso representado en la figura 170.

*Solución:* Utilizando la ecuación (114) y aplicando el método de superposición, se obtiene

$$H = \frac{ql^2}{24h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{I}{I_1} \frac{h}{l}}.$$

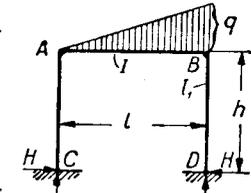


FIG. 170

3. Dibujar el diagrama del momento flector para las tres barras del problema anterior, suponiendo  $h = l$  e  $I = I_1$ .

4. Determinar los momentos flectores en las uniones del cuadro representado por la figura 171.

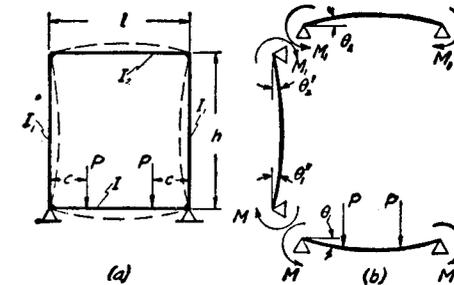


FIG. 171

*Solución:* Separando las barras del cuadro en la forma que indica la figura 171 (b), las ecuaciones que determinan los pares  $M$  y  $M_1$  son:

$$\theta_1 = \theta_1' \quad \text{y} \quad \theta_2 = \theta_2'.$$

Sustituyendo en estas ecuaciones

$$\theta_1 = \frac{Pc(l-c)}{2 EI} - \frac{Ml}{2 EI}; \quad \theta_1' = \frac{Mh}{3 EI_1} - \frac{M_1 h}{6 EI_1}; \quad \theta_2 = \frac{M_1 l}{2 EI_1};$$

$$\theta_2' = \frac{Mh}{6 EI_1} - \frac{M_1 h}{3 EI_1}.$$

se tienen dos ecuaciones que determinan  $M$  y  $M_1$ .

5. Un cuadro simétrico rectangular está sometido a la acción de una fuerza horizontal  $H$ , tal como indica la figura 172. Determinar los momentos flectores  $M$  y  $M_1$  en los nudos.

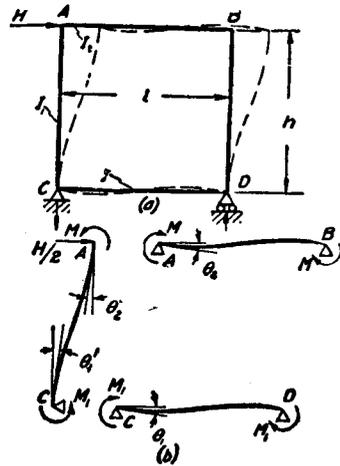


Fig. 172

*Solución:* La línea deformada del cuadro se ve en la figura 172 (a). Descomponiendo el cuadro en las barras —fig. 172 (b)—, y fijándonos en la barra  $CD$ , se tiene:

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{6 EI} = \left( \frac{Hh}{2} - M \right) \frac{l}{6 EI} \quad (a)$$

Considerando ahora la barra vertical  $AC$  como un voladizo empotrado en  $C$  con un ángulo  $\theta_1$ , el giro en el extremo  $A$  será

$$\theta_2' = \theta_1 + \frac{H}{2} \frac{h^2}{2 EI_1} - \frac{Mh}{EI_1} \quad (b)$$

Finalmente, debido a la flexión de la barra  $AB$ .

$$\theta_2 = \theta_2' = \frac{Ml}{6 EI_2} \quad (c)$$

De las ecuaciones (a), (b) y (c) se deduce

$$M = \frac{Hh}{2} \left( 1 + \frac{3h}{l} \cdot \frac{I}{I_1} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{I}{I_2} + 6 \frac{h}{l} \cdot \frac{I}{I_1}} \quad (d)$$

Sustituyendo en la ecuación (a), se encontraría el momento  $M_1$ .

Cuando la barra horizontal tiene una rigidez muy grande, el estado elástico del cuadro se aproxima al del pórtico de la figura 168, sometido a una carga lateral  $H$ . Sustituyendo en (d)  $I = \infty$ , se obtiene para este último caso

$$M = \frac{Hh}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{6} \frac{l}{h} \cdot \frac{I_1}{I_2}} \quad (e)$$

El caso de un pórtico articulado (fig. 165), sometido a la acción de una carga lateral aplicada en  $A$  puede deducirse de la ecuación (d), poniendo en ella  $I = 0$ .

6. Determinar los empujes  $H$  y los momentos  $M_a$  y  $M_b$  en los nudos  $A$  y  $B$  del pórtico representado en la figura 173.

*Respuesta:*

$$H = \frac{qh}{20} \cdot \frac{11m + 20}{2m + 3},$$

$$M_a = M_b = \frac{qh^2}{60} \cdot \frac{7m}{2m + 3},$$

siendo

$$m = \frac{l}{I_1} \cdot \frac{h}{I_2}$$

7. Un semipórtico está formado por dos barras unidas rígidamente en  $B$  y empotradas en  $A$  y  $C$  (fig. 174).

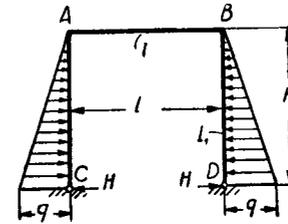


Fig. 173

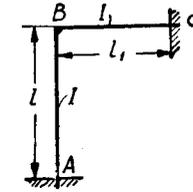


Fig. 174

Determinar el momento flector  $M$  en  $B$  y la fuerza de compresión  $P$  en  $AB$  cuando, debido a una variación de temperatura, la barra  $AB$  aumenta su longitud en  $\Delta = \alpha l (t - t_0)$ .

*Respuesta:*  $P$  y  $M$  pueden calcularse por las ecuaciones

$$\frac{Pl_1^2}{3 EI} - \frac{Ml_1^2}{2 EI} = \Delta,$$

$$\frac{Pl_1^2}{2 EI} - \frac{Ml_1}{EI} = \frac{Ml}{4 EI}$$

44. Vigas sobre tres apoyos.—El caso de una viga sobre tres apoyos —fig. 175 (a)— es un problema con una ligadura hiperestática. Escogemos como hiperestática la reacción en el apoyo intermedio. Utilizando el método de superposición, puede obtenerse la solución del caso (a) combinando los casos representados en (b) y (c). El valor de la reacción intermedia  $X$  se encuentra imponiendo la condición de que la flecha producida en  $C$  por la carga  $P$  se elimine por la acción de  $X$ . Empleando la ecuación (86), se obtiene la relación siguiente:

$$\frac{Pcl_1 [(l_1 + l_2)^2 - c^2 - l_1^2]}{6 (l_1 + l_2) EI_2} = \frac{Xl_1^2 l_2^2}{3 (l_1 + l_2) EI_2},$$

de donde

$$X = \frac{Pc [(l_1 + l_2)^2 - c^2 - l_1^2]}{2 l_1 l_2^2} \quad (115)$$

Si la carga  $P$  actúa en el tramo izquierdo de la viga, puede utilizarse la misma ecuación; pero la distancia  $c$  debe medirse

a partir del apoyo *A* y permutarse  $l_1$  por  $l_2$ . Para  $l_1 = l_2 = l$ , la ecuación (115) da

$$X = \frac{Pc(3l^2 - c^2)}{2l^3} \quad (116)$$

Resuelto el problema para una carga aislada, puede resolverse para cualquier sistema de cargas empleando el método de superposición.

El problema de la viga sobre tres apoyos puede resolverse por otro procedimiento. Imagínese la viga dividida en dos por

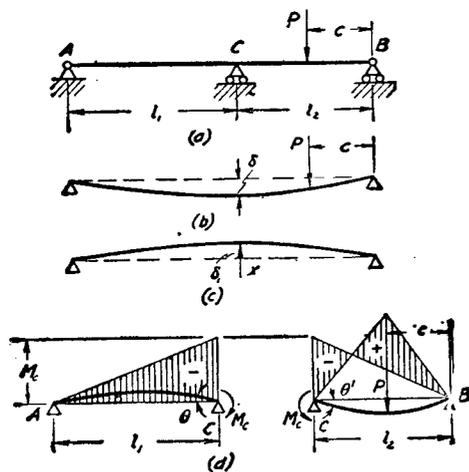


FIG. 175

el punto *C* —fig. 175 (d)— y sea  $M_c$  el valor del momento flector que en la viga primitiva se presenta en el apoyo *C*. De este modo, el problema se reduce al estudio de las dos vigas isostáticas representadas en (d). El valor de  $M_c$  se deduce por la condición de continuidad de la elástica en el punto *C*. Esta condición es  $\theta = \theta'$ .

Empleando para el cálculo de las rotaciones las ecuaciones (88) y (104), páginas 136 y 151, se obtiene

$$-\frac{M_c l_1}{3EI_1} = \frac{Pc(l_2^2 - c^2)}{6l_2 EI_2} + \frac{M_c l_2}{3EI_2}$$

de donde

$$M_c = -\frac{Pc(l_2^2 - c^2)}{2l_2(l_1 + l_2)} \quad (117)$$

El área rayada de la figura 175 (d) representa el diagrama de momentos flectores.

Problemas

1. En el ejemplo expuesto en la figura 175 probar que el valor del momento flector  $M_c$  dado por la ecuación (117) es el que corresponde a la sección en *C* cuando el problema se resuelve por la ecuación (115).

2. Dibujar el diagrama de fuerza cortante para la viga del problema anterior, si  $l_1 = l_2$ ,  $c = \frac{l_2}{2}$  y  $P = 500$  kg.

3. Una viga sobre tres apoyos —fig. 175 (a)— está sometida a la acción de una carga uniformemente repartida de intensidad  $q$ . Determinar el momento flector en el apoyo *C*.

Solución: Utilizaremos el método de superposición. Se sustituye  $P$  por  $qdc$  en la ecuación (117) y se integra a lo largo de los dos tramos. Se obtiene:

$$M_c = -\int_0^{l_2} \frac{qc(l_2^2 - c^2)}{2l_2(l_1 + l_2)} dc - \int_0^{l_1} \frac{qc(l_1^2 - c^2)}{2l_1(l_1 + l_2)} dc = -\frac{q}{8} \cdot \frac{l_2^3 + l_1^3}{l_1 + l_2}$$

cuando

$$l_1 = l_2 = l, \quad M_c = -\frac{ql^3}{8}$$

El sentido en que actúa este momento es el de la figura 175 (d).

4. Dibujar el diagrama de fuerza cortante para la viga del problema anterior, suponiendo  $l_1 = l_2$  y  $q = 8$  kg./cm.

5. Determinar el momento flector máximo en valor absoluto en la viga *ACB* (fig. 175), si  $P = 5.000$  kg.,  $l_1 = 2,70$  m.,  $l_2 = 3,60$  m. y  $c = 1,80$  m.

Respuesta:

$$M_{\text{máx}} = 3.540 \text{ kgm.}$$

6. Una viga sobre tres apoyos equidistantes está sometida a la acción de una carga uniformemente repartida de intensidad  $q$ . Hallar la reacción en el apoyo central si éste, por la acción de la carga, cede y desciende una cantidad  $\delta$ .

Solución: Utilizando el método mostrado en la figura 175 (b) y (c), la reacción  $X$  en el apoyo central se encontrará por la ecuación

$$\frac{5}{384} \frac{q(2l)^4}{EI} = \frac{X(2l)^3}{48EI} + \delta,$$

de donde

$$X = \frac{5}{8} 2ql - \frac{68EI}{l^3} \delta.$$

7. Determinar el incremento en la acción de la viga *AB* sobre el apoyo *O* —fig. 175 (a)— producido por un calentamiento irregular de

la viga si la temperatura varía desde el valor  $t_1$  en la cara inferior al  $t_2$  en la superior, con arreglo a una ley lineal,  $t > t_1$  y  $t_1 = t_2 = t$ .

*Solución:* Si se quitase el apoyo  $C$ , debido al calentamiento irregular de la viga, ésta tomaría la forma de un arco de círculo. El radio de este círculo se determinaría por la ecuación

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha (t - t_1)}{h},$$

siendo  $h$  la altura de la viga y  $\alpha$  el coeficiente de dilatación por el calor.

La flecha correspondiente al centro sería  $\delta = \frac{l^2}{2r}$  y la reacción  $X$  en  $C$  se hallaría por la ecuación

$$\frac{X (2l)^3}{48 EI} = \delta.$$

8. Determinar el diagrama de momentos flectores para la viga  $ABC$ , apoyada sobre tres pontones (fig. 176), si el área de la sección recta horizontal de cada pontón es  $A$  y el peso por unidad de volumen del agua es  $\gamma$ .

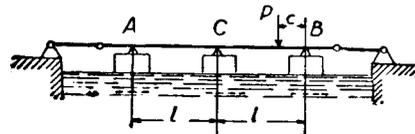


Fig. 176

*Solución:* Prescindamos del apoyo en  $C$ . La flecha producida en este punto por la carga  $P$  consta de dos partes: (a) la flecha debida a la flexión de la viga, y (b) la flecha debida al descenso de los pontones  $A$  y  $B$ . Mediante la ecuación (91), se obtiene:

$$\delta = \frac{Pc}{48 EI_z} [3 (2l)^3 - 4 c^3] + \frac{P}{2 A \gamma} \tag{a}$$

La reacción  $X$  en el apoyo central disminuye la flecha anterior en la cantidad

$$\frac{X (2l)^3}{48 EI_z} + \frac{X}{2 A \gamma} \tag{b}$$

La diferencia entre (a) y (b) representa el descenso del punto  $C$ , por lo que se deduce la ecuación siguiente:

$$\frac{Pc}{48 EI_z} [3 (2l)^3 - 4 c^3] + \frac{P}{2 A \gamma} - \frac{X (2l)^3}{48 EI_z} - \frac{X}{2 A \gamma} = \frac{X}{A \gamma}$$

Conocido  $X$ , puede dibujarse fácilmente el diagrama de momentos flectores.

45. Vigas continuas.—En el caso de una viga continua sobre varios apoyos (fig. 177), se considera corrientemente uno de los apoyos como articulación fija y los demás como articula-

ciones sobre rodillos. Con esta disposición, cada apoyo intermedio supone una ligadura hiperestática, es decir, el número de ligaduras hiperestáticas que el sistema presenta en total es igual al número de apoyos intermedios. Por ejemplo, en el caso representado en la figura 177 (a) el número de incógnitas hiperestáticas es cinco. Para resolver el problema puede utilizarse cualquiera de los métodos empleados en el párrafo anterior. Si

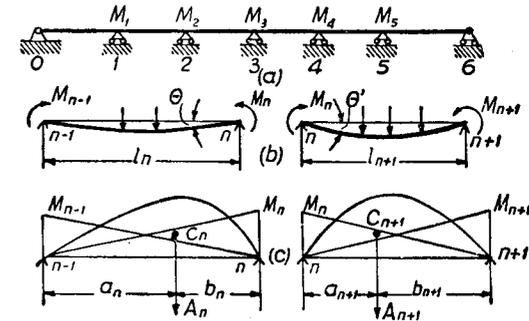


Fig. 177

el número de apoyos es grande, el segundo método, o sea el que toma como ligaduras hiperestáticas los momentos flectores en los apoyos intermedios, resuelve el problema de modo más sencillo. Sea —fig. 177 (b)— dos vanos adyacentes  $n$  y  $n + 1$  de una viga continua, cortados de ella en los apoyos  $n - 1$ ,  $n$  y  $n + 1$ , y representemos con  $M_{n-1}$ ,  $M_n$  y  $M_{n+1}$  los momentos flectores en dichos apoyos. Los sentidos de estos momentos dependen de las cargas que actúen sobre la viga. Nosotros les asignaremos los sentidos de la figura <sup>1</sup>. Es evidente que si los momentos flectores en los apoyos fuesen conocidos, el problema de la viga continua quedaría reducido al cálculo como vigas simplemente apoyadas de los diferentes tramos de la viga continua. Para calcular los momentos flectores  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$ , utilizaremos la condición de continuidad de la elástica en los apoyos. Para un apoyo cualquiera  $n$  esta condición de continuidad queda satisfecha si

$$\theta = \theta'. \tag{a}$$

<sup>1</sup> Si al averiguar el valor de los momentos se obtienen para algunos valores negativos, la dirección en que actúan estos momentos será contraria a la de la figura.

Las expresiones generales de los ángulos de rotación en los extremos se calculan como reacciones producidas en las vigas conjugadas cuando se cargan con las áreas de los diagramas de momentos flectores correspondientes —fig. 177 (c).

Sea  $A_n$  el área del diagrama de momentos flectores para el tramo  $n$  considerado como viga simplemente apoyada debido a la carga real en ese tramo y representemos con  $a_n$  y  $b_n$  las distancias horizontales del centro de gravedad  $C_n$  de dicho diagrama a los apoyos  $n-1$  y  $n$ . Debido a esta carga, el ángulo girado por el apoyo  $n$  será

$$-\frac{A_n a_n}{l_n EI_z}$$

Sumando a esta rotación la que los pares  $M_{n-1}$  y  $M_n$  producen en el apoyo  $n$  y cuyo valor es, ecuaciones (103) y (104),

$$-\left(\frac{M_n l_n}{3EI_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EI_z}\right),$$

el ángulo total del giro será <sup>1</sup>

$$\theta = -\left(\frac{M_n l_n}{3EI_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EI_z} + \frac{A_n a_n}{l_n EI_z}\right). \quad (b)$$

Por el mismo procedimiento se obtiene para el tramo  $n+1$

$$\theta' = \frac{A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} EI_z} + \frac{M_n l_{n+1}}{3EI_z} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI_z}. \quad (c)$$

Sustituyendo (b) y (c) en la ecuación (a), resulta

$$M_{n-1} l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{6A_n a_n}{l_n} - \frac{6A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (118)$$

Relación conocida con el nombre de «ecuación de los tres momentos» <sup>2</sup>. Como el número de estas ecuaciones es igual al número de apoyos intermedios se tendrá un sistema de ecuaciones determinado que dará los valores de los momentos flectores en los apoyos sin dificultad. Al enunciar el problema hemos supuesto que los extremos de la viga continua estaban

<sup>1</sup> El sentido positivo para el ángulo  $\theta$  es el de las agujas del reloj.  
<sup>2</sup> Esta ecuación fué establecida por Bertot (véase *Comptes rendus de la Société des Ingénieurs civils*, pág. 278, 1855). Véase también Clapeyron, París, C. R., t. 45, 1857.

apoyados. Si uno o ambos extremos están empotrados, el número de ligaduras hiperestáticas será mayor que el número de apoyos intermedios y será necesario establecer ecuaciones adicionales que expresen la condición de que no giran las secciones extremas de las vigas a fin de determinar el problema (véase problema 5, pág. 199). Conociendo los momentos en los apoyos, se calculan sin dificultad las reacciones que se presentan en ellos.

Tomando, por ejemplo, los dos tramos  $n$  y  $n+1$  —figura 177 (b)— y considerándolos como vigas simplemente apoyadas, la reacción  $R'_n$  en el apoyo  $n$ , debida a las cargas reales sobre los dos tramos, se calcula fácilmente. A ella se sumarán las reacciones debidas a los momentos  $M_{n-1}$ ,  $M_n$  y  $M_{n+1}$ . Tomando como sentidos de estos momentos los indicados en la figura 177 (b), el efecto adicional sobre el apoyo  $n$  será

$$\frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

La reacción total  $R_n$  será, por consiguiente,

$$R_n = R'_n + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (119)$$

La ecuación general de continuidad (a) puede utilizarse también en aquellos casos en que por defectos de montaje los apoyos no están al mismo nivel (fig. 178). Sean  $\beta_n$  y  $\beta_{n+1}$  los ángulos de inclinación con la horizontal de las líneas rectas que unen los apoyos en los tramos  $n$  y  $n+1$ .



FIG. 178

El ángulo de rotación dado por las ecuaciones (b) y (c) estaba medido desde las líneas que unen los centros de las articulaciones; por consiguiente, el ángulo  $\theta$  entre la tangente en  $n$  y la horizontal será, para el tramo  $n$ ,

$$\theta = -\left(\frac{M_n l_n}{3EI_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EI_z} + \frac{A_n a_n}{l_n EI_z} - \beta_n\right),$$

y para el tramo  $n+1$ ,

$$\theta' = \frac{A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} EI_z} + \frac{M_n l_{n+1}}{3EI_z} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI_z} + \beta_{n+1}.$$

Sustituyendo en la ecuación (a),

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{6A_n a_n}{l_n} - \frac{6A_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} - 6EI_z(\beta_{n+1} - \beta_n). \quad (120)$$

Si  $h_{n-1}$ ,  $h_n$ ,  $h_{n+1}$  representan las alturas de los apoyos  $n-1$ ,  $n$  y  $n+1$  respecto a una línea horizontal de referencia, se tiene

$$\beta_n = \frac{h_{n-1} - h_n}{l_n}; \quad \beta_{n+1} = \frac{h_n - h_{n+1}}{l_{n+1}}$$

Sustituyendo en (120), se podrán calcular fácilmente los momentos flectores.

**Problemas**

1. Determinar los diagramas de momentos flectores y fuerza cortante en una viga continua de tres tramos iguales cargada de modo uniforme con una intensidad  $q$  (fig. 179).

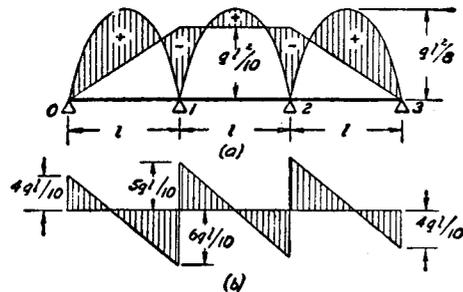


FIG. 179

*Solución:* Para una viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida, el diagrama de momentos flectores es una parábola de ordenada máxima  $\frac{ql^2}{8}$ . El área del segmento parabólico es

$$A_n = \frac{2}{3} l_n \frac{ql_n^2}{8} = \frac{ql_n^3}{12}$$

El centro de gravedad está en la vortical del centro del tramo, o sea  $a_n = b_n = \frac{l_n}{2}$ .

Sustituyendo, en la ecuación (118), se obtiene:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{ql_n^3}{4} - \frac{q(l_{n+1})^3}{4}. \quad (118')$$

Aplicando esta ecuación a nuestro caso (fig. 179) para los tramos primero y segundo, y teniendo en cuenta que en el apoyo 0 el momento flector es cero, se tendrá:

$$4M_1l + M_2l = -\frac{ql^3}{2}. \quad (d)$$

Por las condiciones de simetría es evidente que  $M_1 = M_2$ .

Por consiguiente, de (d) se deduce que  $M_1 = -\frac{ql^2}{10}$ .

El diagrama de momentos flectores se muestra en la figura 179 (a) por medio del área rayada. La reacción en el apoyo 0 es

$$R_0 = \frac{ql}{2} - \frac{ql^2}{10} \cdot \frac{1}{l} = \frac{4}{10} ql.$$

La reacción en el apoyo 1 es:

$$R_1 = ql + \frac{ql^2}{10} \cdot \frac{1}{l} = \frac{11}{10} ql.$$

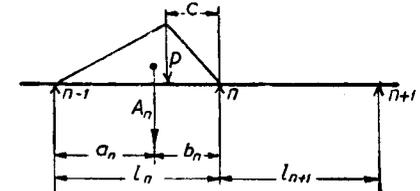


FIG. 180

El diagrama de fuerza cortante está representado en la figura 179 (b). El momento máximo se presentará donde la fuerza cortante sea cero. El momento flector máximo en valor absoluto se presenta en los apoyos intermedios.

2. Encontrar la expresión del segundo miembro de la ecuación (118) cuando existe una carga concentrada en el tramo  $n$  y está descargado el tramo  $n+1$  (fig. 180).

*Solución:* En este caso,  $A_n$  es el área del triángulo de altura  $\frac{Pc(l_n - c)}{l_n}$  y de base  $l_n$ ; por consiguiente,  $A_n = \frac{Pc(l_n - c)}{2}$  y  $a_n = l_n - b_n = l_n - \frac{l_n + c}{3}$ .

Sustituyendo en (118), tenemos

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{Pc(l_n - c)(2l_n - c)}{l_n}$$

3. Determinar los momentos flectores y las reacciones en los apoyos de la viga continua representada en la figura 181.

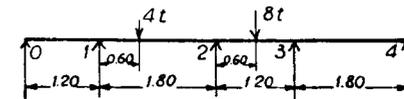


FIG. 181

*Respuesta:*  $M_1 = -46,2$  toneladas.cm.;  $M_2 = -112,2$  toneladas.cm.;  $M_3 = 49,5$  toneladas.cm. Las reacciones son:  $R_0 = -0,388$  toneladas;  $R_1 = 2,69$  toneladas;  $R_2 = 6,22$  toneladas;  $R_3 = 3,75$  to-

neladas;  $R_4 = -0,275$  toneladas. Los momentos en los apoyos son negativos y producen, al flexar la viga, convexidad hacia arriba.

4. Dibujar los diagramas de momento flector y fuerza cortante para la viga continua representada en la figura 182 (a) si  $P = ql$ ,  $c = \frac{l}{4}$ .

*Solución:* En este caso, la carga en la viga conjugada para el primer tramo vale  $A_1 = \frac{ql^3}{12}$ ; para el segundo tramo,  $A_2 = 0$ , y para el tercer tramo,

$$A_3 = \frac{Pc(l-c)}{2}; \quad a_3 = \frac{2l-c}{3}; \quad b_3 = \frac{l+c}{3}.$$

Sustituyendo en la ecuación (118), se obtienen las siguientes:

$$4M_1l + M_2l = -\frac{ql^3}{4},$$

$$M_1l + 4M_2l = -\frac{Pc(l^2 - c^2)}{l},$$

de donde

$$M_1 = -\frac{49}{960}ql^2; \quad M_2 = -\frac{44}{960}ql^2.$$

Ambos momentos son negativos y, por tanto, el diagrama de momentos flectores será el de la figura 182 (b). Para obtener el diagrama

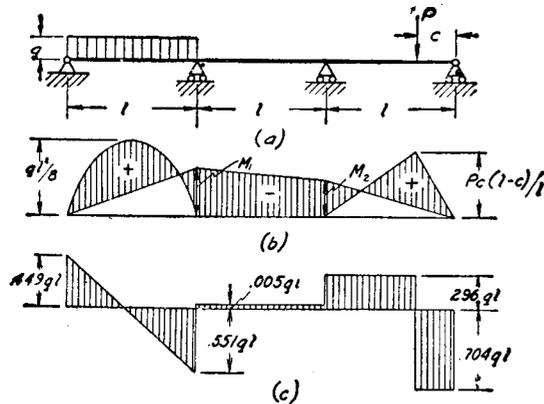


FIG. 182

de la fuerza cortante hallaremos primeramente las reacciones en los apoyos de los distintos tramos (ecuación 119), considerando los tramos como vigas independientes. Las reacciones en los apoyos 0 y 1 del primer tramo de la viga son:

$$\frac{ql}{2} + \frac{M_1}{l} = 0,449ql \quad \text{y} \quad \frac{ql}{2} - \frac{M_1}{l} = 0,551ql.$$

Las reacciones en los apoyos 1 y 2 del segundo tramo de la viga son:

$$\frac{-M_1 + M_2}{l} = 0,005ql \quad \text{y} \quad \frac{-M_2 + M_1}{l} = 0,005ql.$$

Y en los apoyos 2 y 3 del tercer tramo,

$$\frac{Pc}{l} - \frac{M_2}{l} = 0,296ql \quad \text{y} \quad \frac{P(l-c)}{l} + \frac{M_2}{l} = 0,704ql.$$

Conocidos estos elementos, puede construirse el diagrama de la fuerza cortante representado en la figura 182 (c).

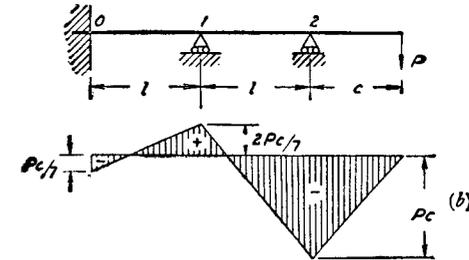


FIG. 183

5. Determinar el diagrama de momentos flectores para el caso de la figura 183 (a).

*Solución:* La ecuación (118) para este caso da

$$M_0l + 4M_1l + M_2l = 0.$$

Ahora bien,  $M_2 = -Pc$  y la condición de extremo empotrado (apoyo 0) da (ecuaciones 103 y 104):

$$\frac{M_0l}{3EI} + \frac{M_1l}{6EI} = 0.$$

Del sistema que forman las tres ecuaciones planteadas se obtiene

$$M_0 = -\frac{1}{7}Pc; \quad M_1 = +\frac{2}{7}Pc; \quad M_2 = -Pc.$$

El diagrama de momentos flectores está representado en la figura 183 (b).

6. Determinar los momentos flectores en los apoyos de una viga continua con siete tramos iguales, cuando está cargada el del centro con una carga uniformemente repartida de intensidad  $q$  y todos los demás descargados.

*Respuesta:*

$$M_3 = M_4 = -\frac{ql^2}{18,9}; \quad M_2 = M_6 = -\frac{1}{3,75}M_3; \quad M_1 = M_5 = \frac{1}{15}M_3.$$

7. Una viga continua de cuatro tramos iguales de luz 4,80 m. está cargada uniformemente en el último tramo. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector si  $q = 7 \text{ kg./cm.}$

8. Resolver el problema 5, suponiendo que sobre toda la viga actúa una carga uniformemente repartida de intensidad  $q$  y que  $c = \frac{l}{2}$ .

Dibujar el diagrama de fuerza cortante para esta sollicitación.

## CAPÍTULO VII

### VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE. VIGAS DE DOS MATERIALES

46. Vigas de sección variable.—En los estudios realizados hasta ahora todas las vigas consideradas tenían forma prismática. Un examen más detenido de los problemas muestra que las ecuaciones (56) y (57), obtenidas para las barras prismáticas, pueden usarse también con suficiente aproximación para piezas de sección variable con tal de que la variación no sea rápida. Los casos de cambio brusco en la sección, en los que se presentan grandes concentraciones de fatiga, se estudiarán en la *Segunda parte*.

Como primer ejemplo de viga de sección variable consideraremos la deformación de una ménsula que tiene la forma de sólido de igual resistencia, es decir, una viga tal que el momento resistente de su sección varía a lo largo de la viga en la misma proporción que el momento flector. De este modo, tal como indica la ecuación (60),  $(\sigma_x)_{\text{máx}}$  permanece constante a lo largo de la viga y puede tomarse igual a  $\sigma_r$ . Esta condición significa un ahorro de material, pues cada sección recta tiene solamente el área necesaria para satisfacer las condiciones de resistencia.

Para un simple voladizo con la carga en su extremo (fig. 184) el momento flector en una sección a la distancia  $x$  de la carga es numéricamente igual a  $Px$ . Para tener una viga de igual resistencia, el momento resistente de la sección deberá ser también proporcional a  $x$ . Esta condición puede satisfacerse de diversos modos,

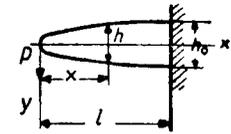


FIG. 184

Consideremos primeramente el caso de sección rectangular de ancho constante  $b$  y altura variable. Entonces, por definición de viga de igual resistencia, se cumplirá que

$$\frac{M}{Z} = \frac{6Px}{bh^2} = \frac{6Pl}{bh_0^2} = \text{const.},$$

donde  $h_0$  es la altura de la viga en el extremo empotrado. Por consiguiente,

$$h^2 = \frac{h_0^2 x}{l}$$

Lo que nos dice que la altura varía en este caso según una ley parabólica. En el extremo cargado, el área de la sección recta es nula. Obtenemos este resultado por haber despreciado la influencia de la fatiga cortante al establecer la ecuación de la forma de igual resistencia. En las aplicaciones prácticas, estas fatigas se toman en consideración modificando la forma anterior en el extremo cargado, a fin de tener área suficiente para transmitir la fuerza cortante. La flecha de la viga en el extremo será (ecuación 93):

$$\delta = \int_0^l \frac{12Px^2}{Ebh^3} dx = \frac{12Pl^3}{Ebh_0^3} \int_0^l \sqrt{x} dx = \frac{2Pl^3}{3EI_0}, \quad (121)$$

donde  $I_0 = \frac{bh_0^3}{12}$  es el momento de inercia de la sección en el extremo empotrado. Comparando esta fórmula con la ecuación (95) se ve que la flecha ahora es doble que la de una barra prismática de la misma rigidez a la flexión  $EI_0$  y sometida a una carga igual. Es decir, la barra tiene la misma resistencia, pero no la misma rigidez, que una barra prismática.

Veamos ahora el caso en que conservamos constante la altura de la sección y variamos su ancho  $b$  —fig. 185 (a), (b)—. Se tendrá

$$\frac{M}{Z} = \frac{6Px}{bh^2} = \frac{6Pl}{b_0h^2}; \quad b = b_0 \frac{x}{l}$$

y la viga tendrá la planta triangular de la figura. Como el momento resistente y el momento de inercia de una sección cualquiera crecen con  $x$  en la misma proporción que el momento flector, además de ser constante,  $(\sigma_x)_{\text{máx}}$  lo será también la cur-

vatura de la elástica (ecuación 56) y la magnitud del radio de curvatura se deducirá de la expresión siguiente (véase ecuación 55):

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = \frac{hE}{2r}. \quad (c)$$

La flecha en el extremo de un arco de círculo puede tomarse para flechas pequeñas igual a

$$\delta = \frac{l^2}{2r} = \frac{Pl^3}{2EI_0} \quad (122)$$

o utilizando (c),

$$\delta = (\sigma_x)_{\text{máx}} \frac{l^2}{hE}. \quad (123)$$

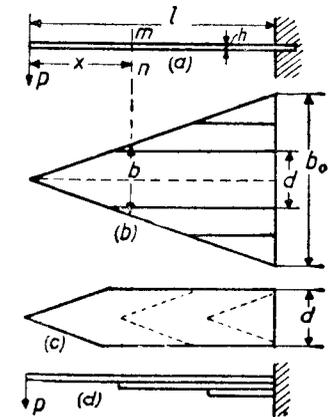


FIG. 185

De aquí se deduce que para este tipo de voladizos de igual resistencia la flecha en el extremo varía como el cuadrado de su longitud y en relación inversa de la altura.

Estos resultados pueden utilizarse para el cálculo aproximado de fatigas y flechas en un muelle de ballesta. La planta triangular anterior se divide en tiras que se disponen como indica la figura 185 (b), (c), (d).

La curvatura inicial y el rozamiento entre las hojas de la ballesta se desprecian en una primera aproximación y la ecuación (123) puede considerarse como suficientemente exacta<sup>1</sup>.

La teoría de la viga conjugada puede también emplearse para el cálculo de la deformación de vigas de sección variable. Recordamos a este efecto que la curvatura de la elástica en cual-

<sup>1</sup> Esta solución fué obtenida por E. Phillips, *Annales des Mines*, vol. 1, págs. 195-336, 1852. Véase también la *History of Elasticity* de Todhunter and Pearson, vol. 2, parte I, pág. 330, y *Theorie der Biegungs- und Torsions-Federn*, v. A. Castigliano, Wien, 1888. El efecto del rozamiento entre las hojas fué discutido por G. Marié, *Annales des Mines*, vols. 7-9, 1905 y 1906. D. Landau y P. H. Parr han investigado la distribución de la carga entre las diversas hojas de la ballesta (*Journ. of the Franklin Ins.*, vols. 185, 186, 187). Una bibliografía completa referente a resortes ha sido publicada por la Amer. Soc. Mech. Eng., New York, 1927. Véase también el libro de S. Gross y E. Lehr, *Die Federn*, V. D. I. Verlag, 1938.

quier sección es  $\frac{M}{EI_2}$  (ecuación 56). Por consiguiente, el aumento de la rigidez a la flexión  $EI_2$  es equivalente en cuanto a deformación de la viga a una disminución en la misma proporción del momento flector  $M$ . Puede, por tanto, referirse el problema de la deformación de una viga de sección variable al de una viga de sección constante modificando las ordenadas del diagrama de momentos flectores, con que se carga la viga conjugada, en la relación  $\frac{I_0}{I}$ , siendo  $I$  el momento de inercia en la sección que se considera e  $I_0$  el momento de inercia constante de una barra

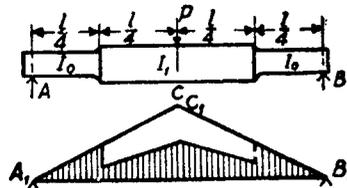


FIG. 186

prismática de cuya deformación se deduce la de la barra de sección variable.

Sea, por ejemplo, el caso de determinación de deformaciones en un eje circular (fig. 186), cuyas secciones tengan dos diámetros diferentes. Sean  $I_0$  e  $I_1$  los

momentos de inercia de dichas secciones, y  $P$  la carga.

La reducción al caso de un eje circular cuya sección constante tenga por momento de inercia  $I_0$  se hará del modo siguiente: La viga conjugada  $A_1B_1$  se supondrá cargada con la carga representada por el área rayada en lugar de con la carga triangular  $A_1C_1B_1$ . El área rayada se obtiene multiplicando las ordenadas del diagrama correspondiente a la parte central del eje por la relación  $\frac{I_0}{I_1}$ . La determinación de flechas y giros puede hacerse ahora como en el caso de barras prismáticas, en función de los momentos flectores y fuerza cortante de la viga conjugada divididos por  $EI_0$ .

Deberá señalarse que en el caso representado en la figura 186 el cambio brusco en el diámetro del eje que tiene lugar a  $\frac{l}{4}$  de los apoyos origina fatigas locales en esos puntos. Este fenómeno no tiene influencia en la deformación del eje con tal de que la diferencia de diámetro de las dos partes sea pequeña comparada con las longitudes de las mismas. El método que acabamos de

exponer puede aplicarse también al caso de vigas en I compuestas de sección variable. Sea la viga de la figura 187 apoyada en sus extremos y sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida. El momento flector disminuye desde el centro ha-

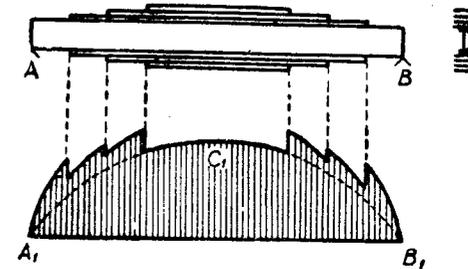


FIG. 187

cia los extremos y la viga, y, por tanto, su peso puede reducirse disminuyendo el número de palastros en las alas, tal y como esquemáticamente indica la figura. La deformación de una viga de este tipo puede calcularse tomando como patrón el momento de inercia de la sección central. La carga para la viga conjugada, en lugar de ser una simple parábola, será el diagrama rayado de la figura 187, en el que las disminuciones de sección han venido acompañadas de aumentos en las ordenadas del diagrama en la relación  $\frac{I'_{central}}{I}$ .

Problemas

1. Una hoja de acero de la forma indicada en la figura 188 está empotrada en un extremo y cargada en el otro con una fuerza  $P$ . Determinar la flecha en el extremo si la longitud es  $2l$ ,  $a$  el ancho y  $h$  el grueso de la hoja.

Solución: La flecha constará de tres partes:

$$1.^\circ \delta_1 = \frac{Pl^3}{3EI_2} + \frac{Pl^3}{2EI_2} \text{ flecha en } B,$$

$$2.^\circ \delta_2 = \frac{3Pl^3}{2EI_2} \text{ flecha en } C \text{ debida al giro en } B, \text{ y}$$

$$3.^\circ \delta_3 = \frac{Pl^3}{2EI_2} \text{ flecha debida a la flexión de la parte } BC \text{ de hoja,}$$

La flecha total es

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

2. Resolver el problema anterior, suponiendo

$$l = 25 \text{ cm.}, a = 7,5 \text{ cm.}, P = 500 \text{ kg. y } \sigma_{\text{máx}} = 5.600 \text{ kg./cm.}^2$$

3. Determinar el ancho  $d$  de una ballesta de coche (fig. 185) y su flecha, si  $P = 3.000 \text{ kg.}, h = 12 \text{ mm.}, l = 60 \text{ cm.}, \sigma_t = 5.000 \text{ kg./cm.}^2$  y el número de hojas  $n = 10$ .

*Solución:* Considerando las hojas de la ballesta como separadas de una placa triangular —fig. 185 (b)—, su fatiga será:

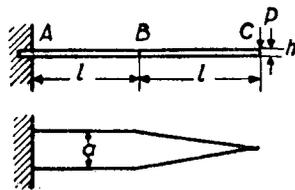


FIG. 185

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{6Pl}{ndh^2}$$

de donde

$$d = \frac{6Pl}{n\sigma_t h^2} = \frac{6 \times 3.000 \times 60}{10 \times 5.000 \times 1,2^2} = 15 \text{ cm.}$$

La flecha por la ecuación (123) será:

$$\delta = \frac{5.000 \times 60^2}{1,2 \times 2 \times 10^6} = 7,5 \text{ cm.}$$

4. Comparar la flecha en el centro y el giro en las secciones extremas del eje de la figura 186 con los de un eje de la misma longitud, pero de sección constante, cuyo momento de inercia fuese igual a  $I_0$ . Tómese  $I_1 : I_0 = 2$ .

*Solución:* Debido a la mayor rigidez de la parte central, los giros en los extremos del eje representado en la figura 186 serán menores que los que tienen lugar en el eje cilíndrico y estarán en la misma relación que el área rayada de la figura y el área del triángulo  $A_1C_1B_1$ . Para los valores dados, la relación es  $\frac{5}{8} : 1$ .

Las flechas en el centro de ambos ejes estarán en la relación de los momentos producidos por el área rayada y por el triángulo  $A_1C_1B_1$ . Esta relación vale  $\frac{9}{16} : 1$ .

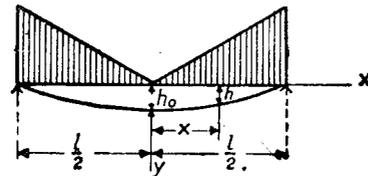


FIG. 189

5. Una viga apoyada en sus extremos está cargada tal como indica la figura 189. ¿Cómo debe variar su altura  $h$  para tener la forma de igual resistencia si el ancho  $b$  de la sección rectangular permanece constante a lo largo de la viga?

*Respuesta:*

$$h^2 = h_0^2 \left( 1 - 8 \frac{x^2}{l^2} \right)$$

6. Determinar la flecha de una hoja de acero de 12 mm. de gruesa (figura 190), bajo la acción de la carga  $P = 10 \text{ kg.}$  en el centro.

*Solución:* Reduciendo el problema al de la flecha de una hoja de

ancho constante e igual a 10 cm., el área de momentos final para este caso vendrá representada por el trapecio  $adeb$  y se obtiene:

$$\delta = \frac{11}{8} \cdot \frac{Pl^3}{48EI_2}$$

donde  $I_2$  es el momento de inercia en el centro. El valor numérico de la flecha se calculará ahora fácilmente.

7. Determinar la flecha máxima de una ballesta (fig. 185) si  $l = 90 \text{ cm.}, h = 12,5 \text{ mm.}, E = 2 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2, \sigma_t = 4.000 \text{ kg./cm.}^2$ .

*Respuesta:*

$$\delta = 12,95 \text{ cm.}$$

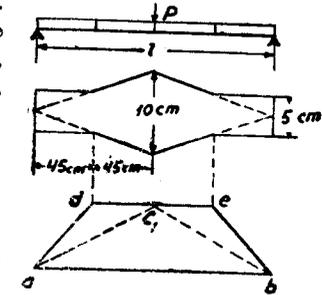


FIG. 190

8. Una viga rectangular simplemente apoyada sufre una carga  $P$  que se mueve a lo largo de la luz. ¿Cómo deberá variar la altura  $h$  de la viga para que ésta tenga la forma de sólido de igual resistencia si el ancho  $b$  de su sección recta que tiene la forma de rectángulo permanece constante a lo largo de la viga?

*Solución:* Para una posición dada de la carga, el momento máximo acontece bajo aquélla. Representando por  $x$  la distancia de la carga al punto medio de la luz, el momento flector bajo la carga es

$$M = \frac{P \left( \frac{l}{2} - x \right) \left( \frac{l}{2} + x \right)}{l}$$

La altura  $h$  que en este punto debe tener la viga viene dada por la ecuación

$$\sigma_t = \frac{6M}{bh^2}$$

de donde,

$$h^2 = \frac{6M}{b\sigma_t} = \frac{6P}{lb\sigma_t} \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right)$$

y

$$\frac{h^2}{\frac{6Pl}{4b\sigma_t}} + \frac{x^2}{\frac{l^2}{4}} = 1$$

Es decir, que en este caso la altura de la viga varía según una ley elíptica, siendo los semiejes de la elipse

$$\frac{l}{2} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{6Pl}{4b\sigma_t}}$$

9. Determinar los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de la viga *AB* representada en la figura 191, cargada en su centro con la fuerza *P*. Se tomará  $\frac{I_1}{I_0} = 2$ .

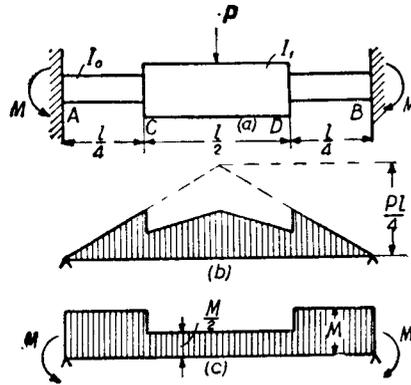


FIG. 191

*Solución:* Se obtiene la solución combinando los dos casos simples de las figuras (b) y (c). La condición de extremos empotrados equivale a la de giros nulos en dichas secciones y, por tanto, las reacciones correspondientes a las vigas conjugadas (b) y (c) deberán ser iguales.

Tendremos:

$$\frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} - \frac{3Pl}{8} \cdot \frac{l}{2} = Ml - \frac{Ml}{4}$$

de donde

$$M = \frac{5}{48} Pl$$

10. Resolver el problema anterior en la hipótesis de aplicar dos fuerzas iguales a *P* en los puntos *C* y *D*.

*Respuesta:*

$$M = \frac{Pl}{6}$$

47. Vigas de materiales diferentes.—Hay casos en la práctica en los que se emplean vigas formadas por dos o más materiales diferentes. La figura 192 (a), representa un caso sencillo; se trata de una viga de madera reforzada por una llanta de acero sujeta con pernos a la cara inferior de la viga.

Suponiendo que no hay deslizamiento entre el acero y la madera durante la flexión, podremos utilizar la teoría de la flexión de vigas de una sola pieza. Como las secciones planas permanecen planas durante la flexión, las deformaciones unitarias de extensión y compresión serán proporcionales a las distancias a la línea neutra. Debido a que el módulo de elasticidad de la madera es mucho menor que el del acero, la parte de madera que trabaja a la flexión será equivalente a una zona mucho más estrecha de ace-

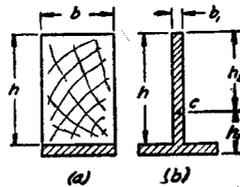


FIG. 192

ro, tal como indica la figura 192 (b). Para mantener constante el momento de las fuerzas interiores, dada una curvatura, es decir, establecidos un alargamiento y una contracción, el ancho  $b_1$  del alma de acero equivalente al ancho *b* de madera que tenemos deberá ser

$$b_1 = \frac{bE_m}{E_a} \tag{a}$$

De este modo, el problema se reduce a la flexión de una viga toda ella de acero y sección en T. Consideremos, como ejemplo, una viga apoyada de 3 m. de longitud y cargada en su centro con 500 kg. Las dimensiones de la parte de madera de su sección recta son  $b = 10$  cm. y  $h = 15$  cm., y por el lado convexo está reforzada con una llanta de acero de 2,5 cm. de ancho y 12,5 mm. de grueso. Suponiendo que  $\frac{E_m}{E_a} = \frac{1}{20}$  y empleando la ecuación (a), la sección equivalente será un alma de  $15 \times 0,50$  y un ala de  $2,5 \times 1,25$ . Las distancias de las fibras más alejadas de la línea neutra —fig. 192 (b)— son  $h_1 = 6,35$  cm. y  $h_2 = 9,90$  centímetros. El momento de inercia respecto a la línea neutra es  $I_z = 287,9$  cm.<sup>2</sup>; por consiguiente, las fatigas en las fibras extremas serán (ecuaciones 61)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} h_1}{I_z} = \frac{150.000 \times 6,35}{4 \times 287,9} = 824 \text{ kg./cm.}^2,$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\min} h_2}{I_z} = \frac{150.000 \times 9,90}{4 \times 287,9} = -1.288 \text{ kg./cm.}^2.$$

Para obtener la fatiga máxima de compresión en la madera de la viga primitiva se multiplicará  $\sigma_{\min}$  por  $\frac{E_m}{E_a} = \frac{1}{20}$ .

Como otro ejemplo de flexión de una viga formada por dos materiales diferentes consideraremos el caso de una pletina constituida por la soldadura de otras dos: una de acero al níquel y la otra de metal Monell (fig. 193). La flexión de la pletina así formada por la acción de fuerzas exteriores puede analizarse del mismo modo que el problema anterior, siendo solamente necesario conocer la relación  $\frac{E_m}{E_a}$  siendo  $E_m$  y  $E_a$  los módulos de

elasticidad del Monell y del acero. Consideraremos la flexión debida a un cambio de temperatura. El coeficiente de dilatación del Monell es mayor que el del acero al níquel, y cuando crece la temperatura la pletina se flexa, originando concavidad en la parte del acero. Este fenómeno de flexión de las pletinas bimetálicas por el cambio de temperatura se utiliza en aparatos diversos aplicados a la regulación de la temperatura<sup>1</sup> (termos-tatos). Sea  $\frac{h}{2}$  el espesor de cada pletina;  $b$ , la anchura;  $t$ , el aumento de temperatura;  $r$ , el radio de curvatura;  $\alpha_a$  y  $\alpha_m$ , los coeficientes de dilatación del

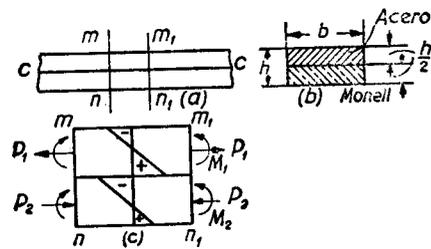


FIG. 193

acero y del Monell;  $E_a I_a$ , la rigidez a la flexión de la pletina de acero, y  $E_m I_m$ , la rigidez a la flexión de la de Monell. Cuando la temperatura aumenta, la pletina de Monell, cuyo coeficiente de dilatación es el mayor, queda comprimida y, en cambio, la de acero queda extendida. Considerando un elemento de pletina separado de la pieza por dos secciones adyacentes  $mn$  y  $m_1 n_1$  —fig. 193 (c)—, las fuerzas internas ligadas a la sección de acero se reducirán a una fuerza de extensión  $P_1$  y a un par  $M_1$ . Del mismo modo, para el Monell, las fuerzas internas pueden reducirse a la compresión  $P_2$  y al par  $M_2$ . Las condiciones de equilibrio de estas fuerzas son:

$$P_1 = P_2 = P$$

y

$$\frac{Ph}{2} = M_1 + M_2. \tag{a}$$

Empleando las ecuaciones

$$M_1 = \frac{E_a I_a}{r}; \quad M_2 = \frac{E_m I_m}{r}$$

<sup>1</sup> Véase publicación del autor en *Journal of the Optical Soc. of Amer.*, vol. 11, pág. 233.

y sustituyendo en (a), se tiene

$$\frac{Ph}{2} = \frac{E_a I_a}{r} + \frac{E_m I_m}{r}, \tag{b}$$

Puede obtenerse otra ecuación para determinar  $P$  y  $r$  por la condición de que en la superficie de unión,  $c - c$ , el alargamiento unitario del Monell y del acero deben ser iguales; por consiguiente,

$$\alpha_a t + \frac{2 P_1}{E_a h b} + \frac{h}{4 r} = \alpha_m t - \frac{2 P_2}{E_m h b} - \frac{h}{4 r}$$

o

$$\frac{2 P}{h b} \left( \frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_m} \right) = (\alpha_m - \alpha_a) t - \frac{h}{2 r} \tag{c}$$

De las ecuaciones (b) y (c) se obtiene

$$\frac{4}{b h^2 r} (E_a I_a + E_m I_m) \left( \frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_m} \right) = (\alpha_m - \alpha_a) t - \frac{h}{2 r} \tag{d}$$

Sustituyendo en esta ecuación

$$I_a = I_m = \frac{b h^3}{96} \quad \text{y} \quad E_a = 1,15 E_m,$$

se obtiene la siguiente ecuación aproximada:

$$\frac{1}{r} = \frac{3 (\alpha_m - \alpha_a) t}{2 h}, \tag{e}$$

y ahora, por la ecuación (b),

$$P = \frac{3}{h^2} (\alpha_m - \alpha_a) t (E_a I_a + E_m I_m) = \frac{b h}{32} (\alpha_m - \alpha_a) t (E_a + E_m) \tag{f}$$

y

$$M_1 = \frac{3 (\alpha_m - \alpha_a) t}{2 h} E_a I_a; \quad M_2 = \frac{3 (\alpha_m - \alpha_a) t}{2 h} E_m I_m \tag{g}$$

Las ecuaciones (f) y (g) determinan  $P$ ,  $M_1$  y  $M_2$ . La fatiga máxima en el acero se obtiene añadiendo a la fatiga de extensión producida por la fuerza  $P$ , la fatiga debida a la curvatura  $\frac{1}{r}$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{2 P}{b h} + \frac{h}{4} \cdot \frac{E_a}{r} = \frac{4}{b h^2 r} \left( E_a I_a + E_m I_m + \frac{b h^3}{16} E_a \right).$$

Suponiendo, por ejemplo, que ambos metales tuviesen el mismo módulo  $E$ , se obtendría

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{hE}{3r},$$

o, empleando la ecuación (e) <sup>1</sup>,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{2} Et (\alpha_m - \alpha_n).$$

Para  $E = 2 \times 10^2 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $t = 200^\circ \text{ C}$  y  $\alpha_m - \alpha_n = 4 \times 10^{-6}$  se obtiene

$$\sigma_{\text{máx}} = 800 \text{ kg./cm.}^2$$

La distribución de las fatigas debidas al calentamiento se ve en la figura 193 (c).

### Problemas

1. Hallar el momento flector máximo que debe solicitar a la viga de madera reforzada con una llanta de acero de la figura 192, si  $b = 15 \text{ cm.}$ ,  $h = 20 \text{ cm.}$  y el espesor de la llanta es 12 mm. Supóngase  $E_m = 10^5 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $E_a = 2 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $\sigma_t = 100 \text{ kg./cm.}^2$  para la madera, y  $\sigma_t = 1.300 \text{ kg./cm.}^2$  para el acero.

2. Supóngase que la viga de madera del problema anterior está reforzada en la cara superior con una llanta de acero de 5 cm. de ancho y 2,5 cm. de gruesa y en la cara inferior con otra de 15 cm. de ancha y 12 mm. de gruesa. Calcúlese suponiendo los mismos valores que anteriormente para  $E$  y  $\sigma_t$  el momento flector máximo que debe solicitar a la viga.

3. Una pletina bimetalica tiene una longitud  $l = 2,5 \text{ cm.}$  Hallar la flecha en su centro producido por un aumento de temperatura igual a 200 grados centigrados si  $E_a = 1,15$ ,  $E_m$  y  $\alpha_m - \alpha_a = 4 \times 10^{-6}$ .

48. Vigas de hormigón armado.—Conocido es por todos que la resistencia del hormigón a la compresión es mucho mayor que a la extensión. Por consiguiente, una viga rectangular de hormigón puede flexarse sólo débilmente debido a las fatigas de extensión que se presentan en su cara convexa y que solamente pueden alcanzar valores reducidos. La viga puede deformarse en mucho mayor grado, disponiendo barras de acero en el lado

<sup>1</sup> Esta ecuación vale también para  $E_a = E_m$ .

convexo, tal como indica la figura 194. Como el hormigón se adhiere fuertemente al acero, no hay deslizamiento de un material con relación al otro durante la flexión y puede aplicarse a este caso los métodos aplicados en el párrafo anterior para el cálculo de las fatigas de flexión. En la práctica, la sección de acero que se pone en la viga es tal que la resistencia a la extensión del hormigón en el lado convexo se extingue antes de que el acero alcance el punto de fluencia, y para cargas mayores prácticamente el acero resiste todo el esfuerzo de extensión. Por consiguiente, para los cálculos prácticos de fatigas de flexión en vigas de

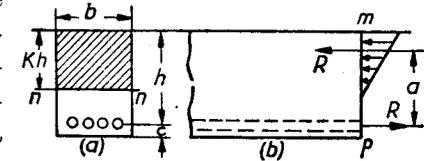


FIG. 194

hormigón armado se acostumbra a suponer que toda la tracción la absorbe el acero y toda la compresión el hormigón. Reemplazando las fatigas de extensión en el acero por su resultante  $R$ , la distribución de fuerzas interiores en cualquier sección  $mp$  será la de la figura 194 (b). Suponiendo, como anteriormente, que las secciones permanecen planas durante la flexión y representando por  $kh$  la distancia de la línea neutra  $nm$  a la cara superior <sup>1</sup>, la contracción unitaria del hormigón  $\epsilon_h$  y el alargamiento unitario  $\epsilon_a$  de las barras de acero vendrán dados por las expresiones siguientes:

$$\epsilon_h = -\frac{kh}{r}; \quad \epsilon_a = \frac{(1-k)h}{r}. \quad (a)$$

El hormigón no sigue la ley de Hooke y su diagrama de compresión tiene forma análoga al de la fundición —fig. 2 (b)—. A medida que la fatiga de compresión aumenta, el coeficiente angular de la tangente al diagrama disminuye; es decir, que el módulo de elasticidad del hormigón disminuye con el crecimiento de la fatiga. En los cálculos prácticos de flexión en vigas de hormigón armado se acostumbra a suponer que la ley de Hooke es válida para el hormigón y se compensa la variación del módulo tomando para él un valor más bajo que el deducido en los diagramas

<sup>1</sup>  $k$  es un factor numérico menor que la unidad.

de ensayos cuando las fatigas son pequeñas. Las normas alemanas e inglesas suponen que  $\frac{E_a}{E_h} = 15$ . Las normas italianas atribuyen a esta relación el valor 10. De las ecuaciones (a) se deduce que las fatigas máximas de compresión para el hormigón y de extensión para el acero son

$$\sigma_h = -\frac{kh}{r} E_h; \quad \sigma_a = \frac{(1-k)h}{r} E_a. \quad (b)$$

La posición de la línea neutra de la sección se encuentra estableciendo que las fuerzas internas ligadas a la sección  $mp$  deben reducirse a un par igual al momento flector. La fuerza de compresión en el hormigón debe ser igual a la fuerza  $R$  en las barras de acero<sup>1</sup>, o sea

$$-\frac{bkh\sigma_h}{2} = \sigma_a A_a, \quad (c)$$

donde  $A_a$  es el área total de acero en la sección. Empleando la noción de cuantía de acero  $\frac{A_a}{bh} = n_1$  y llamando  $n$  a la relación  $\frac{E_a}{E_h}$ , mediante las ecuaciones (c) y (b) obtendremos

$$k^2 = 2(1-k)nn_1, \quad (d)$$

de donde

$$k = -nn_1 + \sqrt{(nn_1)^2 + 2nn_1}. \quad (124)$$

Después de determinar la posición de la línea neutra por la ecuación (124), la relación entre las fatigas máximas en el hormigón y en el acero se obtiene por las ecuaciones (b)

$$-\frac{\sigma_h}{\sigma_a} = \frac{k}{(1-k)n}. \quad (125)$$

La distancia  $a$  entre la resultante  $R$  de las fatigas internas de compresión y la fuerza interna extensora —fig. 194 (b)— es

$$a = \frac{2}{3}kh + (1-k)h = \left(1 - \frac{k}{3}\right)h \quad (126)$$

<sup>1</sup> Las secciones rectas de las barras de acero corrientemente son pequeñas y por ello se emplea la fatiga media en lugar de la fatiga máxima.

y el momento de las fuerzas internas que ha de igualarse al flector exterior  $M$  es

$$aR = aA_a\sigma_a = -\frac{akbh}{2}\sigma_h = M,$$

de donde

$$\sigma_a = \frac{M}{aA_a}, \quad (127)$$

$$\sigma_h = -\frac{2M}{akbh}. \quad (128)$$

Utilizando las ecuaciones (124) a (128) pueden calcularse fácilmente las fatigas de flexión en el caso del hormigón armado.

### Problemas

1. Si  $\frac{E_a}{E_h} = 15$  y  $A_a = 0,008 bh$ , determinar la distancia de la línea neutra a la cara superior de la viga (fig. 194).

*Solución:* Sustituyendo en la ecuación (124)  $n = 15$ ,  $n_1 = 0,008$ , se obtiene  $k = 0,384$ , y la distancia pedida será  $kh = 0,384 h$ .

2. Determinar la cuantía  $n_1 = \frac{A_a}{bh}$  si la fatiga máxima de extensión en el acero es  $960 \text{ kg./cm.}^2$ , la fatiga máxima de compresión en el hormigón es  $51,6 \text{ kg./cm.}^2$  y  $\frac{E_a}{E_h} = n = 15$ .

*Solución:* Por la ecuación (125),  $k = 0,446$ . Por consiguiente (ecuación d)

$$n_1 = \frac{k^2}{2(1-k)n} = 0,012.$$

3. Determinar la cuantía  $n_1$  si la fatiga máxima de compresión en el hormigón es un veinteavo de la fatiga de extensión en el acero.

*Respuesta:*

$$n_1 = 0,0107.$$

4. Si  $n = 15$  y la fatiga de trabajo por compresión en el hormigón es  $52 \text{ kg./cm.}^2$ , determinar la carga admisible en el centro de una viga de hormigón armado de 3 metros de luz, apoyada en sus extremos y tal que  $b = 25 \text{ cm.}$ ,  $h = 30 \text{ cm.}$ ,  $A_a = 0,00975 bh$ .

*Solución:* Por la ecuación (124),

$$k = -15 \times 0,00975 + \sqrt{(15 \times 0,00975)^2 + 2 \times 15 \times 0,00975} = 0,414.$$

Obtenido  $k$ , la ecuación (128) da  $M_{\text{máx}} = 208,750 \text{ kg./cm.}$ , y la carga admisible será

$$P = \frac{4M_{\text{máx}}}{l} = \frac{208,750 \times 4}{300} = 2,784 \text{ kg.}$$

5. Calcular el momento máximo de trabajo para una viga de hormigón armado si  $b = 20$  cm.,  $h = 30$  cm.,  $A_a = 12,5$  cm.<sup>2</sup>,  $\frac{E_a}{E_h} = 12$ , y la fatiga de trabajo para el acero es 1.200 kg./cm.<sup>2</sup> y para el hormigón, 64 kg./cm.<sup>2</sup>.

Respuesta:  $M = 2.400$  m. kg.

6. Determinar el valor de  $k$  para el que las fatigas de trabajo admisibles para el acero y el hormigón se alcanzan simultáneamente.

Solución: Sean  $\sigma_h$  y  $\sigma_a$  las fatigas admisibles para el hormigón y el acero. Tomando esta relación por las ecuaciones (b) y considerando el valor absoluto, se tiene

$$\frac{\sigma_h}{\sigma_a} = \frac{kE_h}{(1-k)E_a}$$

de donde

$$k = \frac{\sigma_h \frac{E_h}{E_a}}{\sigma_h + \sigma_a \frac{E_h}{E_a}}$$

Si la viga satisface a esta condición, se dice que el reforzado es perfecto. Dada  $k$  y empleando la ecuación (126), se obtiene la altura por la ecuación (128) y el área  $A_a$  por la ecuación (127).

7. Determinar la cuantía  $n_1 = \frac{A_a}{bh}$  si  $\sigma_a = 960$  kg./cm.<sup>2</sup>,  $\sigma_h = 51,6$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $n = \frac{E_a}{E_h} = 15$ .

Solución: Por la fórmula del problema anterior se obtiene

$$k = 0,446.$$

Sustituyendo en la ecuación (d), se obtiene

$$n_1 = 0,012.$$

8. Proyectar una viga de 25 cm. de ancha solicitada por un momento de 3.375 m. kg., si  $\sigma_h = 60$  kg./cm.<sup>2</sup>,  $\sigma_a = 960$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $\frac{E_a}{E_h} = 12$ . Hallar la altura  $h$  y la sección de hierro  $A_a$ . Supóngase que el reforzado es perfecto, como en el problema 6.

49. **Fatigas cortantes en vigas de hormigón armado.**— Usando el método del artículo 26 y tomando en examen el elemento  $mn_1n_1$  comprendido entre dos secciones adyacentes  $mp$  y  $m_1p_1$  (fig. 195), se deduce que la fatiga cortante máxima  $\tau_{xy}$  actúa sobre la superficie neutra  $nn_1$ . Representando por  $dR$

la diferencia entre las fuerzas internas totales de compresión en el hormigón ligadas a las secciones  $mp$  y  $m_1p_1$ , la fatiga cortante  $\tau_{xy}$  ligada a la superficie neutra se encontrará por la ecuación de equilibrio siguiente:

$$(\tau_{xy})_{\max} b dx = dR,$$

de donde

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{1}{b} \frac{dR}{dx} \quad (a)$$

Puesto que el momento flector es

$$M = Ra,$$

la ecuación (a) se puede escribir

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{1}{ab} \frac{dM}{dx} = \frac{V}{ab}, \quad (b)$$

donde  $V$  es la fuerza cortante correspondiente a la sección considerada. Mediante la ecuación (126), la expresión anterior de la fatiga cortante se transforma en la siguiente:

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{3V}{bh(3-k)} \quad (129)$$

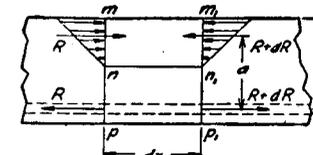


FIG. 195

En los cálculos de aplicación tiene importancia no sólo esta fatiga cortante ligada a superficie neutra, sino también la fatiga cortante que se desarrolla en la superficie de contacto del hormigón y el acero. Considerando nuevamente las dos secciones adyacentes de la figura 195, la diferencia de las fuerzas de extensión en esas dos secciones es

$$dR = \frac{V dx}{a}$$

Esta diferencia se equilibra con las fatigas cortantes distribuidas sobre la superficie de las barras. Representando por  $A$  la superficie lateral de las barras de acero por unidad de longi-

tud de la viga, la fatiga cortante ligada a la superficie de las barras sera

$$\frac{dR}{Adx} = \frac{V}{Aa} = \frac{3V}{(3-k)hA} \quad (130)$$

Esta fatiga será mayor que la correspondiente a la superficie neutra (ecuación 129) si  $A$  es menor que  $b$ . Para aumentar  $A$  sin necesidad de variar la sección total de acero que se introduce en la viga, basta aumentar el número de barras y disminuir su diámetro.

## CAPÍTULO VIII

### FLEXIÓN ACOMPAÑADA DE TENSIÓN O COMPRESIÓN. TEORÍA DE COLUMNAS

50. Flexión acompañada de tracción o compresión.—Supondremos en lo que sigue que la barra prismática está cargada con fuerzas situadas en uno de sus planos de simetría, pero que así como en todo lo anteriormente expuesto las fuerzas eran transversales, ahora pueden tener componente a lo largo del eje de la barra. Un caso sencillo de este tipo es el mostrado en la figura 196, que representa una columna cargada con una fuerza inclinada  $P$ . Esta fuerza se descompone en una transversal  $N$  y otra longitudinal  $T$  y se supone que la columna es relativamente rígida y toma una flecha tan pequeña en la flexión que pueden despreciarse las fatigas de este género que produce la fuerza  $T$  al lado de las correspondientes a la  $N$ .

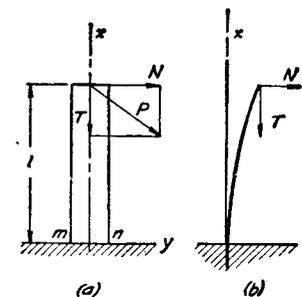


FIG. 196

Por consiguiente, la fatiga resultante en cada punto la obtendremos superponiendo a la fatiga de compresión debida a la fuerza  $T$  la fatiga de flexión que corresponda a la  $N$ . El caso de una columna poco rígida, es decir, flexible, en la que por ser la flecha considerable —fig. 196 (b)— tiene un efecto apreciable la flexión que produce la fuerza  $T$  se verá más adelante (véase artículo 53). La fatiga debida a la fuerza  $T$  es constante para todas las secciones de la columna e igual a  $\frac{T}{A}$ , siendo  $A$  el área

de la sección recta. Las fatigas de flexión dependen del valor del momento que, como sabemos, varía desde cero, para la cabeza de la columna, a  $Nl$  en la base. Por consiguiente, la sección más castigada es la de empotramiento y en ella la fatiga para un punto a la distancia  $y$  del eje  $z$  es

$$\sigma_x = -\frac{T}{A} - \frac{Nly}{I_z} \quad (a)$$

Suponiendo, por ejemplo, que la sección recta de la columna es un rectángulo  $b \times h$ , con el lado  $h$  paralelo al plano de flexión, se tendrá

$$A = bh; \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

La fatiga de compresión máxima se presentará en el punto  $n$  y vale

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{6Nl}{bh^2} - \frac{T}{bh} \quad (b)$$

Esta fatiga es numéricamente la mayor.

En el punto  $m$  se tiene

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6Nl}{bh^2} - \frac{T}{bh}$$

Cuando la fuerza  $P$  no es paralela a uno de los dos planos principales de flexión, las fatigas de flexión producidas por la componente transversal  $N$  se encuentran descomponiendo  $N$  en dos componentes paralelas a dichos planos (véase artículo 38). La fatiga resultante en cualquier punto se obtiene superponiendo dichas fatigas de flexión con la fatiga de compresión producida por la fuerza longitudinal.

**Problemas**

1. Determinar la fatiga máxima de compresión en las columnas de madera de la figura 197. Su altura es 6 m., el diámetro 20 cm. y la carga  $P$  en el hilo  $ABC$ , 30 kg. La fuerza de extensión en cada cable  $DF$  es  $S = 500$  kg.;  $\text{tg } \alpha = \frac{1}{10}$ ;  $\text{sen } \beta = \frac{1}{5}$  y  $\overline{Dk} = 4,5$  m.

*Solución:* Las componentes de la fuerza en el alambre  $BC$  —figura 197 (b)— son  $N_1 = 150$  kg.,  $T_1 = 15$  kg. Las componentes de la fuerza en

el cable  $DF$  son  $N_2 = 100$  kg.,  $T_2 = 490$  kg. El momento flector máximo acontece en el extremo empotrado y vale  $M_{\max} = 45.000$  kg. cm. El es-

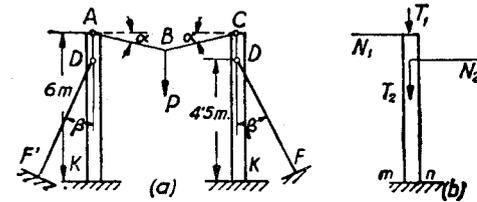


FIG. 197

fuerzo longitudinal de compresión para dicha sección es  $T_1 + T_2 = 505$  kilogramos. La fatiga de compresión máxima es

$$\sigma = \frac{4 \times 505}{\pi d^2} + \frac{32 \times 45.000}{\pi d^3} = 58,88 \text{ kg./cm.}^2$$

2. Determinar la fatiga máxima de extensión en la viga rectangular de madera de la figura 198, si  $S = 2.000$  kg.,  $b = 20$  cm.,  $h = 25$  cm. *Respuesta:*

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6 \times 180 \times 500}{20 \times 25^2} + \frac{2.000}{500} = 47,2 \text{ kg./cm.}^2$$

3. Determinar la fatiga de compresión máxima en la estructura  $ABC$  (fig. 199). La carga  $P$  vale 1.000 kg. El nudo  $B$  es rígido, la ar-

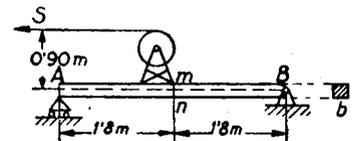


FIG. 198

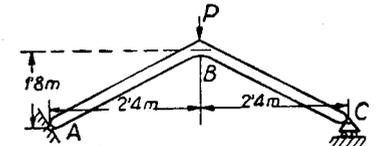


FIG. 199

ticulación en  $A$ , fija, y el apoyo  $C$  es una articulación móvil. La sección recta de las barras  $AB$  y  $BC$  es cuadrada, de  $25 \times 25$  cm.

*Respuesta:*

$$\frac{6 \times 500 \times 240}{25^3} + \frac{300}{25^2} = 46,56 \text{ kg./cm.}^2$$

4. Un muro de fábrica de ladrillo cuyo espesor es 1,8 m. tiene 4,5 m. de altura y sirve para contener tierras (fig. 200). Determinar la fatiga de compresión máxima en la base si su peso es  $\gamma = \frac{25.000}{9}$  kg./m.<sup>3</sup> y la presión de la tierra  $\frac{50.000}{9}$  kg. por metro de pared. La distribu-

ción de la presión de las tierras a lo largo de la altura del muro sigue una ley lineal representada por la recta  $AB$ .

**Respuesta:** La fatiga en  $m = -\frac{25.000 \times 4,5 \times 1,8}{9 \times 10^4 \times 1,8} - \frac{50.000 \times 6 \times 150}{9 \times 180^3 \times 100}$

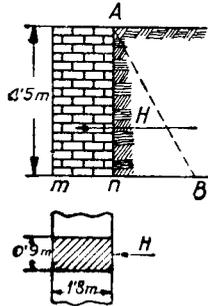


Fig. 200

$= -1,25 - 1,54 = -2,79 \text{ kg./cm.}^2$ . La fatiga en  $n = -1,25 + 1,54 = 0,29 \text{ kg./cm.}^2$ .

5. Determinar el espesor de la pared en el problema anterior para el que la fatiga en  $n$  es nula.

**Respuesta:** 2 metros.

6. Una columna circular de 1,80 m. de altura (fig. 196) está solicitada por una fuerza  $P$ , cuyas componentes  $N$  y  $T$  son iguales y de valor 500 kg. Hallar el diámetro de la columna si la fatiga máxima por compresión no debe sobrepasar los 80 kg./cm.<sup>2</sup>.

7. Hallar  $\sigma_{\text{máx}}$  y  $\sigma_{\text{mín}}$  en la sección central de la barra  $BC$  (fig. 199), si en lugar de la carga

concentrada  $P$  obra una carga vertical  $q = 7 \text{ kg./cm.}$  distribuida a lo largo del eje  $ABC$ .

8. Una barra circular  $AB$  articulada en  $B$  y apoyada en un plano vertical pulimentado (sin rozamiento), por el otro extremo  $A$  está solicitada por su propio peso. Determinar la posición de la sección recta  $mn$  (fig. 201) para la que acontece la fatiga de compresión máxima.

**Solución:** Sean  $l$  la longitud de la barra,  $q$  su peso por unidad de longitud y  $\alpha$  el ángulo de inclinación con la horizontal. La reacción en  $A$  es  $R = \frac{ql}{2} \cot \alpha$ . La fuerza de compresión para una sección cualquiera  $mn$  a la distancia  $x$  de  $A$  es  $q \times \text{sen } \alpha + \frac{ql \cos^2 \alpha}{2 \text{ sen } \alpha}$ ; el momento flector en la misma sección vale  $M = \frac{ql}{2} \cos \alpha \cdot x - \frac{q \cos \alpha}{2} \cdot x^2$ . La fatiga de compresión máxima será:

$$\frac{4}{\pi d^3} \left( qx \text{ sen } \alpha + \frac{ql \cos^2 \alpha}{2 \text{ sen } \alpha} \right) + \frac{32}{\pi d^3} \left( \frac{ql \cos \alpha}{2} \cdot x - \frac{q \cos \alpha}{2} x^2 \right),$$

donde  $d$  es el diámetro de la barra.

Igualando a cero la derivada de esta expresión, se obtiene

$$x = \frac{l}{2} + \frac{d}{8} \text{ tg } \alpha.$$

9. La columna de la figura 196 tiene 1,80 m. de altura y 30 cm. de diámetro. Determinar la magnitud de la fuerza  $P$  si sus componentes  $N$  y  $T$  son iguales y la fatiga máxima de compresión en  $n$  es 80 kg./cm.<sup>2</sup>.

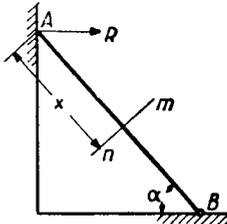


Fig. 201

**Respuesta:**

$$P = 1.630 \text{ kg.}$$

10. Una fuerza  $P$  produce flexión en la barra  $ABC$ , empotrada en  $A$  (fig. 202). Determinar el ángulo que en la deformación gira la sección en  $C$ , si los momentos flectores en  $A$  y  $B$  son iguales en valor absoluto y de signo contrario.

**Solución:** De la igualdad de los momentos flectores en  $A$  y  $B$  se deduce que la fuerza  $P$  pasa por el punto medio  $D$  de la barra  $AB$ . Por consiguiente,  $P_x = \frac{P_y l}{2a}$

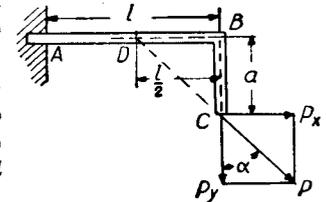


FIG. 202

y pueden calcularse  $P_x$  y  $P_y$ . El giro de la sección en  $B$  en el sentido de las agujas del reloj, debido a la flexión de la parte  $AB$  por la acción de la componente  $P_y$  es  $\frac{P_y l^2}{2EI}$ . La rotación de la misma sección en sentido sinistrorsum debido a la componente  $P_x$  es  $\frac{P_x al}{EI}$ . El giro de la sección en  $C$  respecto a la sección en  $B$ , en sentido contrario a las agujas del reloj, debido a la flexión de la parte  $BC$  de la barra es  $\frac{P_x a^2}{2EI}$ . El ángulo girado por el extremo  $C$  en sentido positivo será, por consiguiente,

$$\frac{P_y l^2}{2EI} - \frac{P_x al}{EI} - \frac{P_x a^2}{2EI} = -\frac{P_x a^2}{2EI}.$$

51. Cargas excéntricas en cuerpos de poca esbeltez.—La carga excéntrica es un caso particular de la combinación de fatigas de flexión con las de tracción o compresión. Cuando la longitud de la barra no es muy grande comparada con sus dimensiones transversales, su flecha es tan pequeña que puede despreciarse comparada con la excentricidad inicial  $e$ ; por consiguiente, puede utilizarse el método de superposición<sup>1</sup>. Sea, por ejemplo, el caso de compresión por la acción de una fuerza longitudinal aplicada con la excentricidad  $e$  (fig. 203) en uno de los dos planos principales de la barra. Introduzcamos ahora dos fuerzas iguales y opuestas de valor  $P$  aplicadas en el centro de gravedad  $O$  de la sección. Puesto que estas dos fuerzas introducida, tienen resultante y momento nulo, el problema no ha cambiado

<sup>1</sup> Para el caso de cargas excéntricas en barras largas, véase artículo 53.

y de este modo tenemos sobre la sección una fuerza  $P$  que produce fatiga de compresión directa  $-\frac{P}{A}$ , tal como indica la figura 203 (b) y un par flector en uno de los planos principales, de valor  $Pe$ , que produce fatigas de flexión  $-\frac{Pe y}{I_z}$  distribuidas tal como indica la figura 203 (c) La fatiga total será, por consiguiente,

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - \frac{Pe y}{I_z} \quad (a)$$

El diagrama de distribución de esta fatiga total se ve en la figura 203 (d). Se supone que la fatiga máxima de flexión es menor que la fatiga constante de compresión; por consiguiente, las fatigas totales serán de compresión para

todos los puntos de la sección. Si la fatiga máxima de flexión es mayor que la fatiga constante de compresión, hay una línea de fatiga nula, paralela al eje  $z$ , tal que divide a la sección en dos zonas, de las cuales la de la izquierda trabaja a extensión y la de la derecha a compresión. Para una sección rectangular de lados  $h$  y  $b$  —figura 203 (a)— la ecuación (a) se escribe

$$\sigma_x = -\frac{P}{bh} - \frac{12 Pe y}{bh^3} \quad (a')$$

poniendo  $y = -\frac{h}{2}$  se obtiene

$$(\sigma_x)_{\max} = -\frac{P}{bh} + \frac{6 Pe}{bh^2} = \frac{P}{bh} \left( -1 + \frac{6e}{h} \right), \quad (b)$$

y sustituyendo  $y = \frac{h}{2}$

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{P}{bh} - \frac{6 Pe}{bh^2} = -\frac{P}{bh} \left( 1 + \frac{6e}{h} \right). \quad (c)$$

Se observará que cuando  $e < \frac{h}{6}$  no existe cambio de signo

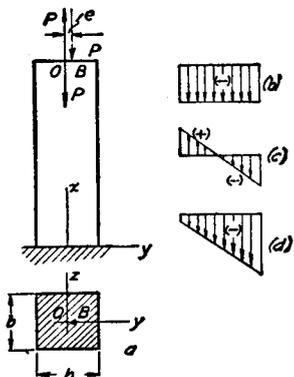


FIG. 203

en la fatiga ligada a la sección; cuando  $e = \frac{h}{6}$ , la fatiga máxima de compresión (ecuación c) es  $\frac{2P}{bh}$ , y la fatiga en el lado opuesto de la sección rectangular es nula; y, por último, cuando  $e > \frac{h}{6}$ , existe inversión en el signo de la fatiga, y la posición de la línea de fatiga nula se obtiene igualando a cero la expresión (a'), con lo que se obtiene

$$y = -\frac{h^2}{12e} \quad (d)$$

Representando por  $k_z$  el radio de giro con relación al eje  $z$  (véase Apéndice), la ecuación (d) queda

$$y = -\frac{k_z^2}{e} \quad (131)$$

Se ve que la distancia de la línea de fatiga nula al centro de gravedad disminuye a medida que la excentricidad  $e$  aumenta.

Un análisis análogo al efectuado para el caso de compresión sirve para el estudio de la tracción excéntrica. La ecuación (131) puede utilizarse para secciones de forma distinta de la rectangular, siempre que el punto de aplicación de la carga esté sobre uno de los ejes principales de inercia.

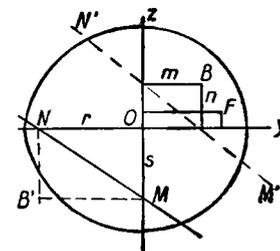


FIG. 204

Consideremos ahora el caso en que el punto  $B$  de aplicación de la fuerza de compresión  $P$  no está sobre uno de los dos ejes principales de inercia de la sección, y sean éstos los ejes  $y$  y  $z$  de la figura 204. Llamando  $m$  y  $n$  a las coordenadas del punto  $B$ , los momentos de  $P$ , con relación a los ejes  $y$  y  $z$ , serán  $Pn$  y  $Pm$ , respectivamente. Por superposición, la fatiga en un punto cualquiera  $F$  de la sección es

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - \frac{Pmy}{I_z} - \frac{Pnz}{I_y}, \quad (e)$$

en donde el primer término del segundo miembro representa la fatiga uniforme de compresión, y los otros términos las fatigas de flexión producidas por los momentos  $Pm$  y  $Pn$ , respectiva-

mente. Como indica la ecuación (e), las fatigas se distribuyen según una ley lineal. La ecuación de la línea neutra, o de fatiga nula, se obtendrá igualando a cero el segundo miembro de la ecuación (e). Empleando la notación  $\frac{I_z}{A} = k_z^2$  e  $\frac{I_y}{A} = k_y^2$ , donde  $k_z$  y  $k_y$  son los radios de giro con relación a los ejes  $z$  e  $y$ , respectivamente, resulta

$$\frac{my}{k_z^2} + \frac{nz}{k_y^2} + 1 = 0.$$

Haciendo en esta ecuación primeramente  $y = 0$ , y después  $z = 0$ , se obtienen los puntos  $M$  y  $N$  de intersección de la línea neutra; con los ejes coordenados  $z$  e  $y$  (fig. 204), las coordenadas  $s$  y  $r$  de esos puntos son

$$s = -\frac{k_y^2}{n}; \quad r = -\frac{k_z^2}{m} \tag{g}$$

De estas ecuaciones se obtiene

$$n = -\frac{k_y^2}{s}; \quad m = -\frac{k_z^2}{r}$$

Estas ecuaciones tienen la misma forma que las ecuaciones (g), y de ello se deduce que cuando la carga actúa en el punto  $B'$  de coordenadas  $s$  y  $r$ , la línea neutra correspondiente será la  $N'M'$  (representada en la figura con línea de puntos), que intercepta sobre los ejes  $y$  y  $z$  las longitudes  $m$  y  $n$ .

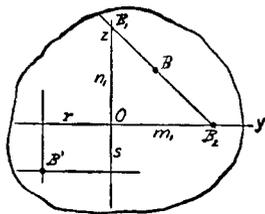


FIG. 205

Existe otra relación importante entre el punto de aplicación  $B$  de la carga y la posición de la línea neutra correspondiente, y es la siguiente: A medida que  $B$  se mueve sobre la línea  $B_1B_2$  (fig. 205), la línea neutra gira alrededor de un punto fijo  $B'$ . La demostración es como sigue: Se descompone la carga en  $B$  en dos componentes paralelas aplicadas en  $B_1$  y  $B_2$ . La componente en  $B_1$  actúa en el plano principal  $xz$ ; por consiguiente, la línea de fatiga

cero correspondiente es paralela al eje  $y$ , y su intersección con  $OZ$ , deducida de una ecuación análoga a la (131), es

$$s = -\frac{k_y^2}{n_1} \tag{h}$$

De modo análogo la línea de fatiga cero para la componente en  $B_2$  es paralela al eje  $z$ , y su distancia a este eje es

$$r = -\frac{k_z^2}{m_1} \tag{k}$$

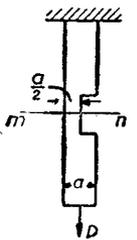


FIG. 206

Para cualquier posición de la carga sobre la línea  $B_1B_2$  la fatiga en  $B'$  será cero; por consiguiente, a medida que el punto de aplicación de la carga se mueva a lo largo de la línea recta  $B_1B_2$ , la línea de fatiga nula correspondiente girará alrededor del punto  $B'$ , cuyas coordenadas se deducen de las ecuaciones (h) y (k).

Problemas

1. El área de la sección recta de una barra cuadrada se reduce a la mitad en la sección  $mn$  (fig. 206). Determinar la fatiga máxima de extensión en esta sección producida por la carga axial  $P$ .

Respuesta:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{2P}{a^2} + \frac{Pa}{4} \frac{24}{a^3} = \frac{8P}{a^2}$$

2. Resolver el problema anterior suponiendo que la barra tiene una sección circular.

3. Una barra de sección en  $\perp$  está cargada excéntricamente con las fuerzas  $P$  (fig. 207). Determinar las fatigas máximas de extensión

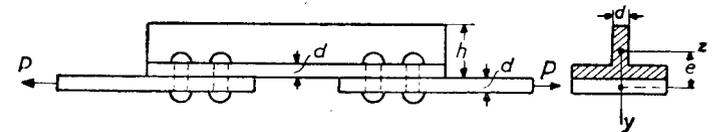


FIG. 207

y compresión en la barra si  $d = 2,5$  cm.,  $h = 12,5$  cm., el ancho del ala  $b = 12,5$  cm. y  $P = 2.000$  kg.

Solución: Las distancias del centro de gravedad de la sección en  $\perp$  a las caras inferior y superior son  $h_1 = 4,03$  cm. y  $h_2 = 8,47$  cm., respectivamente. La excentricidad de la carga es  $e = 1,25 + 4,03 = 5,28$  cm.

El momento de inercia,  $I_z = 767,19$  cm.<sup>4</sup>.

Las fatigas de flexión son:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{P \cdot e \cdot h_1}{I_z} = \frac{2.000 \times 5,28 \times 4,03}{767,19} = 55,4 \text{ kg./cm.}^2,$$

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{P \cdot e \cdot h_2}{I_z} = -\frac{2.000 \times 5,28 \times 8,47}{767,19} = -116,6 \text{ kg./cm.}^2.$$

Combinándolas con la fatiga constante de extensión

$$\frac{P}{A} = \frac{2.000}{56,25} = 35,2 \text{ kg./cm.}^2,$$

se obtiene, para la fatiga máxima de extensión, el valor  $55,4 + 35,2 = 90,6 \text{ kg./cm.}^2$  y para la fatiga máxima de compresión el valor  $116,6 - 35,2 = 81,4 \text{ kg./cm.}^2$ .

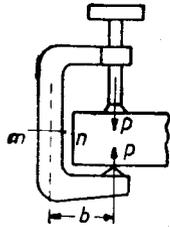


FIG. 208

4. Determinar la fatiga máxima de extensión en la sección *mn* de la pieza representada en la figura 208, si  $P = 150 \text{ kg.}$ ,  $l = 7,5 \text{ cm.}$  y la sección recta es un rectángulo de  $25 \times 6,25 \text{ mm.}$

Respuesta:

$$\sigma_{\max} = 1.824 \text{ kg./cm.}^2.$$

5. Determinar el ancho de la sección *mn* del problema anterior, para que  $\sigma_{\max} = 1.600 \text{ kg./cm.}^2$ .

6. Hallar las fatigas máxima y mínima en el extremo empotrado de la columna rectangular de la figura 203, si  $b = 25 \text{ cm.}$ ,  $h = 30 \text{ cm.}$ ,  $P = 2.500 \text{ kg.}$  y las coordenadas del punto *B* de aplicación de la carga (fig. 204) son  $m = n = 5 \text{ cm.}$  Hallar la posición de la línea neutra.

52. El núcleo de la sección.—En el párrafo anterior hemos visto que, para una pequeña excentricidad *e*, las fatigas normales tienen el mismo signo sobre la totalidad de la sección de una barra cargada excéntricamente. Para mayores valores de *e*, la línea neutra corta a la sección y hay inversión en el signo de las fatigas. En el caso de un material poco resistente a la extensión, tal como fábrica de ladrillo, es necesario determinar la zona en la que puede aplicarse la carga compresora sin que se produzcan fatigas de extensión en el material. Esta región se denomina núcleo de la sección. El método de determinación del núcleo se ve a través de los sencillos ejemplos que exponaremos a continuación.

En el caso de una sección circular de radio *R*, se deduce por simetría que el núcleo es un círculo. El radio *a* de este círculo se determina por la condición de que, cuando el punto de apli-

cación de la carga esté en el perímetro del núcleo, la línea de fatiga cero correspondiente sea tangente al perímetro de la sección.

Recordando que el momento de inercia de un círculo respecto a su diámetro es  $\frac{\pi R^4}{4}$  (véase el Apéndice), y que, por lo tanto, el radio de giro es  $k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{R}{2}$ , se reduce por la ecuación (131) sustituyendo *e* por *a* y  $-y$  por *R*, que

$$a = \frac{k^2}{R} = \frac{R}{4}, \tag{132}$$

es decir, que el radio del núcleo es la cuarta parte del radio de la sección.

Para el caso de una sección anular de radio exterior  $R_0$  y radio interior  $R_i$ , se tiene

$$I = \frac{\pi}{4} (R_0^4 - R_i^4); \quad k^2 = \frac{I}{A} = \frac{R_0^2 + R_i^2}{4},$$

y el radio del núcleo por la ecuación (131) será

$$a = \frac{k^2}{R_0} = \frac{R_0^2 + R_i^2}{4 R_0}. \tag{133}$$

Para  $R_i = 0$ , la ecuación (133) coincide con la ecuación (132). Para una sección anular muy estrecha, es decir, cuando el valor de  $R_i$  se aproxima al de  $R_0$ , el radio *a* del núcleo tiende al valor  $\frac{R_0}{2}$ .

En el caso de una sección rectangular (fig. 209), la línea de fatiga cero coincide con el lado *cg* cuando la carga se aplica en el punto *A*, a la distancia  $\frac{b}{6}$  del centro de gravedad (véase página 225). Del mismo modo la línea de fatiga cero coincide con el lado *gf* cuando la carga actúa en el punto *B*, a la distancia  $\frac{h}{6}$  del centro de gravedad. A medida que la carga se desplaza a lo largo de la línea *AB*, la línea neutra gira alrededor del punto *g* (véase pág. 226) sin cortar a la sección. Por consiguiente, *AB*

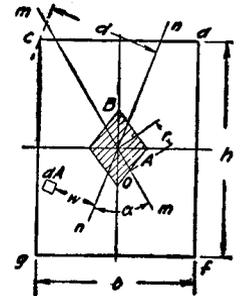


FIG. 209

es uno de los lados del núcleo. Los otros lados se deducen por simetría. El núcleo es, por consiguiente, un rombo de diagonales iguales a  $\frac{h}{3}$  y  $\frac{b}{3}$ . Mientras que el punto de aplicación de la carga sea interior o esté en el perímetro de este rombo, la línea de fatiga cero no corta a la sección y no hay inversión en el signo de fatigas ligadas a ella.

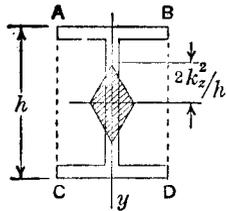


FIG. 210

Para una sección en  $I$  (fig. 210), las posiciones más próximas de las líneas de fatigas cero que no cortan a la sección están dadas por los lados  $AB$  y  $CD$ , y por las líneas de puntos  $AC$  y  $BD$ . Las posiciones correspondientes del punto de aplicación de la carga se determinarán por la ecuación (131).

Por simetría se deduce que el núcleo será el rombo rayado de la figura 210.

Si el punto de aplicación de la carga excéntrica cae fuera del núcleo de una sección, la línea correspondiente de fatiga nula corta a la sección, y la carga produce no solamente fatigas de compresión, sino también fatigas de extensión. Si el material no resiste en absoluto fatigas de extensión, parte de la sección será inactiva y el resto sufrirá fatigas de compresión únicamente.

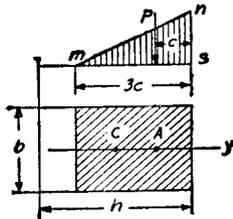


FIG. 211

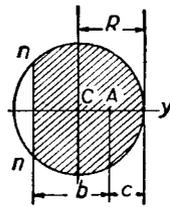


FIG. 212

Sea, por ejemplo, una sección rectangular (fig. 211) con el punto de aplicación  $A$  de la carga en el eje principal  $y$ , y a una distancia  $c$  del extremo de la sección. Si  $c$  es menor que  $\frac{h}{3}$ , parte de la sección no trabajará. La parte que trabaja se encuentra por la condición de que la distribución de las fatigas de compresión ligadas a la sección sigue una ley lineal, representada en la figu-

ra por la línea  $mn$ , y que la resultante de estas fuerzas es igual y contraria a  $P$ . Como esta resultante pasa por el centro de gravedad del triángulo  $mns$ , la dimensión  $ms$  de la parte que trabaja en la sección deberá ser igual a  $3c$ . En el caso de una sección circular (fig. 212), si la excentricidad  $\overline{CA}$  de la carga es mayor que  $\frac{R}{4}$ , y el material no resiste en absoluto las fatigas de

extensión, solamente trabajará una parte de la sección recta. Sea la línea  $nn$  perpendicular a  $AC$ , el límite de dicha porción. La distancia  $b$ , desde el punto  $A$ , se encontrará por las condiciones siguientes: 1.<sup>a</sup>, las fatigas de compresión son proporcionales a las distancias a  $nn$ ; 2.<sup>a</sup>, la suma de las fuerzas internas de compresión ligadas a la parte de sección que trabaja debe ser igual a la carga  $P$ , y 3.<sup>a</sup>, el momento de estas fuerzas respecto a  $nn$  debe ser igual al momento  $Pb$  de la carga  $P$ , respecto al mismo eje. Representando la fatiga máxima de compresión por  $\sigma_{\max}$ , la fatiga de compresión a una distancia  $y$  de  $nn$  será

$$\sigma = \frac{y\sigma_{\max}}{b + c}$$

y las ecuaciones que determinan  $b$  pueden escribirse

$$\int \frac{y\sigma_{\max}}{b + c} dA = P; \quad \int \frac{y^2\sigma_{\max}}{b + c} dA = Pb,$$

de donde

$$b = \frac{I_{nn}}{Q_{nn}}, \tag{a}$$

siendo  $I_{nn} = \int y^2 dA$  el momento de inercia de la parte que trabaja de la sección respecto al eje  $nn$ , y  $Q_{nn} = \int y dA$  el momento estático de la parte que trabaja de la sección con relación al mismo eje. Utilizando la ecuación (a) puede encontrarse fácilmente la posición de  $A$  para cualquier posición dada de  $nn$ . La misma ecuación puede usarse también para otras formas de sección recta, siempre que  $A$  esté situado sobre uno de los ejes principales <sup>1</sup>. Si la carga no actúa sobre un eje principal, el pro-

<sup>1</sup> Para el caso de secciones circulares o anulares, de gran importancia en el cálculo de fatigas en chimeneas, se han publicado tablas para simplificar los cálculos. Véase Keck, *Z. Hannover, Arch u. Ing. Ver.*, pág. 627, 1882. Véase también *V. D. I.*, pág. 1321, 1902, y la publicación de G. Dreyer en *Die Bauzeitung*, 1925.

blema de la determinación de la parte de sección que trabaja es mucho más complicado<sup>1</sup>.

Empleando la noción de núcleo, el cálculo de las fatigas máximas de flexión, cuando el plano de flexión no es un plano principal, puede simplificarse mucho, por ejemplo, en la figura 209; sea  $mm$  el plano axial de la viga en el que actúa un momento flector  $M$ , y  $nn$  la línea neutra correspondiente, la cual forma un ángulo  $\alpha$  con el plano  $mm$  (véase pág. 159). Representando con  $\sigma_{\text{máx}}$  la fatiga máxima en el punto más alejado  $c$ , y con  $d$  su distancia a la línea neutra  $nn$ , la fatiga para cualquier otro punto situado a una distancia  $w$  de  $nn$  será  $\sigma = \sigma_{\text{máx}} \frac{w}{d}$ , y el momento de todas las fuerzas ligadas a la sección, respecto al eje  $nn$ , es

$$\int \frac{\sigma_{\text{máx}} w^2}{d} dA = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{d} I_{nn}, \quad (b)$$

donde  $I_{nn}$  es el momento de inercia de la sección respecto al eje  $nn$ . El momento de las fuerzas exteriores, respecto al mismo eje, es  $M \text{ sen } \alpha$ . Igualándolo al valor (b), se tiene

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Md \text{ sen } \alpha}{I_{nn}}. \quad (c)$$

Esta ecuación puede simplificarse utilizando las propiedades del núcleo de la sección<sup>2</sup>. Sea  $O$  el punto de intersección del plano  $mm$  con el núcleo, y  $r$  su distancia al centro de gravedad de la sección. Por las propiedades del núcleo se deduce que una fuerza de compresión  $P$ , aplicada en  $O$ , produce fatiga nula en el vértice  $c$ ; por consiguiente, la fatiga de extensión producida en  $c$  por el momento flector  $Pr$ , obrando en el plano  $mm$ , es igual en valor absoluto a la fatiga de compresión constante  $\frac{P}{A}$ . Sus-

<sup>1</sup> Diversos cálculos para una sección rectangular se encuentran en las publicaciones siguientes: Engesser, *Zentralblatt d. Bauw.*, página 429, 1919; K. Pohl, *Der Eisenbau*, pág. 211, 1918; O. Henkel, *Zentralbl. d. Bauw.*, pág. 447, 1918; F. K. Esling, *Proc. of the Institute of Civ. Eng.*, parte III, 1905-1906.

<sup>2</sup> Véase R. Land, *Zeitschr. f. Architektur und Ingenieurwesen*, página 291, 1897.

tituyendo  $Pr$  en lugar de  $M$  en la ecuación (c), se obtiene

$$\frac{P}{A} = \frac{Prd \text{ sen } \alpha}{I_{nn}},$$

de donde

$$\frac{d \text{ sen } \alpha}{I_{nn}} = \frac{1}{Ar}. \quad (d)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (c), tendremos

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{Ar}. \quad (134)$$

El producto  $Ar$  se denomina momento resistente de la sección correspondiente al plano  $mm$ . Esta definición está de acuerdo con la definición dada anteriormente (véase pág. 88), y cuando la flexión acontece en un plano principal,  $Ar$  se transforma en  $Z$ .

#### Problemas

1. Determinar el núcleo de una viga I comercial, de 60 cm. de altura, para la que  $A = 145,81 \text{ cm.}^2$ ,  $I_z = 81523 \text{ cm.}^4$ ,  $k_z = 23,65 \text{ cm.}$ ,  $I_y = 1675,8 \text{ cm.}^4$ ,  $k_y = 3,4 \text{ cm.}$  El ancho de las alas,  $b = 17,5 \text{ cm.}$

*Respuesta:* El núcleo es un rombo con diagonales iguales a 37,25 cm. y 2,65 cm.

2. Determinar el radio del núcleo de una sección en forma de anillo circular si  $R_0 = 25 \text{ cm.}$  y  $R_i = 20 \text{ cm.}$

*Respuesta:* El radio del núcleo  $a = 10,25 \text{ cm.}$

3. Determinar el núcleo de una sección en forma de triángulo equilátero.

4. Determinar el núcleo de una sección tubular delgada de forma cuadrada.

*Solución:* Si  $h$  es el espesor del tubo y  $b$  el lado del cuadrado, se tiene

$$I_z = I_y \approx \frac{2}{3} hb^3; \quad k_z^2 = k_y^2 = \frac{b^2}{6}.$$

El núcleo es un cuadrado con diagonales

$$d = 2 \frac{k^2}{\frac{1}{2}b} = \frac{2b}{3}.$$

53. Cargas excéntricas en piezas esbeltas y en uno de los planos principales.—Cuando la longitud de la pieza cargada es muy grande comparada con las dimensiones de la sección recta,

como en el caso de la figura 213, la flecha  $\delta$  no puede despreciarse al lado de la excentricidad  $e$ . El momento flector varía a lo largo del eje de la pieza, y su valor para cualquier sección recta  $mn$  es

$$M = -P(\delta + e - y). \tag{a}$$

La ecuación diferencial de la elástica es, por consiguiente,

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = P(\delta + e - y). \tag{b}$$

Empleando la notación

$$\frac{P}{EI_z} = p^2 \tag{135}$$

se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = p^2(\delta + e); \tag{c}$$

la solución general de esta ecuación es

$$y = C_1 \text{sen } px + C_2 \text{cos } px + \delta + e. \tag{d}$$

Para satisfacer a las condiciones en el empotramiento

$$(y)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0, \tag{e}$$

las constantes arbitrarias de la solución anterior deberán ser:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -(\delta + e)$$

y la ecuación de la elástica se escribirá

$$y = (\delta + e)(1 - \text{cos } px). \tag{f}$$

Haciendo  $x = l$  en la ecuación (f), se obtiene

$$(y)_{x=l} = \delta = (\delta + e)(1 - \text{cos } pl),$$

de donde

$$\delta = \frac{e(1 - \text{cos } pl)}{\text{cos } pl}. \tag{136}$$

Sustituyendo este valor de  $\delta$  en (f) se obtiene para la elástica la ecuación siguiente:

$$y = \frac{e(1 - \text{cos } px)}{\text{cos } pl}. \tag{137}$$

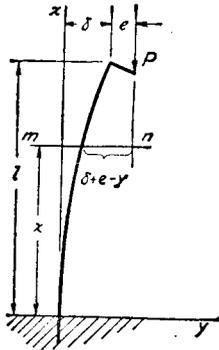


FIG. 213

En el caso de una pieza corta la cantidad  $pl$  es pequeña, y puede escribirse con suficiente aproximación

$$\text{cos } pl \approx 1 - \frac{p^2 l^2}{2} \tag{g}$$

en el numerador de (136), y  $\text{cos } pl = 1$  en el denominador, con los que se obtiene

$$\delta = \frac{ep^2 l^2}{2};$$

ahora bien, utilizando la ecuación (135),

$$\delta = \frac{Pel^2}{2EI_z}. \tag{h}$$

Este valor coincide con la expresión de la flecha de un voladizo flexado por la acción de un par  $Pe$  aplicado en su extremo. Cuando  $pl$  no es pequeño, la flecha no es proporcional a la carga  $P$ , y aumenta más rápidamente que  $P$ , como se puede observar en la tabla siguiente, obtenida mediante la aplicación de la ecuación (136):

FLECHAS PRODUCIDAS POR UNA CARGA LONGITUDINAL EXCÉNTRICA

$pl$ .....	0,1	0,5	1,0	1,5	$\frac{\pi}{2}$
$\delta$ .....	0,005 $e$	0,139 $e$	0,851 $e$	13,1 $e$	$\infty$
Valor aproximado de $\delta$ .	0,005 $e$	0,139 $e$	0,840 $e$	12,8 $e$	$\infty$
$\text{sec } pl$ .....	1,005	1,140	1,867	13,2	$\infty$
$\frac{P}{P_{cr}}$ .....	0,004	0,101	0,405	0,911	1

En esta tabla se observará que las flechas aumentan rápidamente a medida que la cantidad  $pl$  se aproxima al valor  $\frac{\pi}{2}$ .

Cuando  $pl = \frac{\pi}{2}$ , la ecuación (135) da

$$P = EI_z p^2 = \frac{EI_z \pi^2}{4l^2},$$

y la flecha se hace infinitamente grande. Esto muestra que una fuerza compresora de esa magnitud produciría una flecha grande

y que debe esperarse una deformación que sobrepase el punto de fluencia del material.

El momento flector máximo acontece en el empotramiento y tiene por valor

$$M_{\text{máx}} = P(e + \delta) = P \left[ e + \frac{e(1 - \cos pl)}{\cos pl} \right] = Pe \sec pl. \quad (138)$$

Una serie de valores de  $\sec pl$  figura en la cuarta línea de la tabla anterior. Puede observarse que  $M_{\text{máx}}$  crece sin límite cuando  $pl$  se aproxima a  $\frac{\pi}{2}$ . Este fenómeno se analizará en el artículo siguiente.

Aquí, sin embargo, será conveniente repetir que en este caso no existe proporcionalidad entre el valor de la fuerza compresora y la flecha  $\delta$  que produce. Por consiguiente, el método de superposición (pág. 141) no puede aplicarse. Una fuerza  $P$ , aplicada axialmente, produce en la barra únicamente compresión;

pero cuando la misma fuerza obra en presencia de un par  $Pe$ , produce no solamente compresión, sino una flexión adicional; de modo que la deformación resultante no puede obtenerse por simple superposición de una compresión axial debida a la fuerza  $P$  y una flexión debida al par  $Pe$ . La razón por la que en este caso no es aplicable el método de superposición puede verse con facilidad si se compara este problema con la flexión de una pieza por cargas transversales. En este último caso puede suponerse que pequeñas deformaciones en la viga no modifican las distancias entre las fuerzas, y que los momentos flectores pueden calcularse sin considerar la deformación de la viga. En el caso de com-

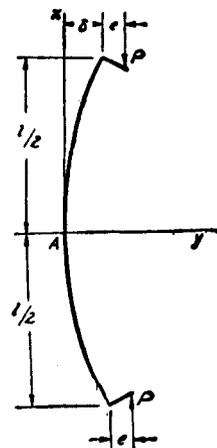


FIG. 214

presión excéntrica de una columna, las deformaciones producidas por el par  $Pe$  cambian por completo el modo en que actúa la carga axial, que toma una acción tanto flectora como compresora. En todos los casos en que la deformación producida por una carga modifica la acción de otra carga se ve que la defor-

mación final no puede obtenerse por el método de superposición. En el estudio realizado se ha supuesto que la flexión acontecía en uno de los planos principales de la columna. Si la excentricidad  $e$  no tiene el sentido de uno de los ejes principales de la sección, es necesario descomponer el par flector  $Pe$  en dos pares componentes que actúen en los planos principales de la columna. La deformación en cada uno de los dos planos principales puede estudiarse en la forma que hemos expuesto.

El estudio realizado para el caso de flexión de una columna empotrada en un extremo puede aplicarse al caso de una pieza comprimida excéntrica por dos fuerzas iguales y opuestas  $P$  (fig. 214). Por simetría se deduce que la sección central  $A$  no gira durante la flexión, y que cada mitad de la pieza de la figura 214 está en las mismas condiciones que la barra de la figura 213. Por consiguiente, la flecha y el momento flector máximo se obtienen escribiendo  $\frac{l}{2}$  en lugar de  $l$  en las ecuaciones (136) y (138). De esta forma se obtiene

$$\delta = \frac{e \left( 1 - \cos \frac{pl}{2} \right)}{\cos \frac{pl}{2}} \quad (139)$$

y

$$M_{\text{máx}} = Pe \sec \frac{pl}{2}. \quad (140)$$

### Problemas

1. Hallar la flecha en el centro y las fatigas máximas de extensión y compresión en una pieza comprimida excéntrica. La sección de la pieza es una  $\square$  de 20 cm. de altura con  $I_z = 50 \text{ cm.}^4$ ,  $I_y = 1260 \text{ cm.}^4$  y  $A = 21 \text{ cm.}^2$ ; su longitud es 3 m. y los extremos están articulados. La distancia de su centro de gravedad al dorso de la  $\square$  es 15 mm. y las fuerzas compresoras  $P = 2.000 \text{ kg.}$  actúan en el plano del dorso de la  $\square$  y en su plano de simetría.

2. Una barra de acero de 1,80 m. de larga y sección cuadrada de  $5 \times 5 \text{ cm.}$  está comprimida excéntrica por fuerzas  $P = 500 \text{ kg.}$  La excentricidad  $e$  está dirigida según una diagonal del cuadrado y vale 2,5 cm. Hallar la fatiga de compresión máxima suponiendo articulados los extremos de la barra.

3. Una barra de acero de 1,20 m. de longitud y sección rectangular de  $2,5 \times 5$  cm. está comprimida por dos fuerzas  $P = 500$  kg. aplicadas en los vértices de las secciones extremas. Suponiendo articulados los extremos, encontrar la fatiga compresora máxima.

54. **Carga crítica.**—En el artículo anterior se vió que la deformación de una columna comprimida excéntricamente aumenta muy rápidamente cuando la cantidad  $pl$  de la ecuación (136) se aproxima al valor  $\frac{\pi}{2}$ . Cuando  $pl$  es igual a  $\frac{\pi}{2}$ , la fórmula (136) de la flecha y la (138) del momento flector máximo dan valores infinitos. Para hallar el valor correspondiente de la carga se emplea la fórmula (135). Poniendo en ella  $p = \frac{\pi}{2l}$ , se encuentra

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2}. \quad (141)$$

Este valor depende, como se ve, solamente de las dimensiones de la columna y del módulo del material, y se denomina carga crítica, o carga de Euler, debido a que Euler fué el primero que dedujo su valor en su famoso estudio de las curvas elásticas<sup>1</sup>. Para ver más claramente el significado físico de esta carga podemos trazar diversas curvas que representan la relación existente entre la carga  $P$  y la flecha  $\delta$  dada por la ecuación (136). En la figura 215 se ven curvas diversas de esta clase, trazadas para diversos valores de la excentricidad relativa  $\frac{e}{k_z}$ . Las abscisas de estas curvas son los valores de la relación  $\frac{\delta}{k_z}$  mientras que las ordenadas son la relación  $\frac{P}{P_{cr}}$ , entre la carga que actúa y su valor crítico definido por la ecuación (141).

Se ve por dichas curvas que las flechas  $\delta$  son cada vez más pequeñas, y que las curvas se aproximan más y más al eje vertical a medida que la excentricidad  $e$  disminuye. También se ve que las flechas aumentan muy rápidamente cuando la carga  $P$  se aproxima a su valor crítico (141), y todas las curvas tienen por asíntota la línea horizontal  $\frac{P}{P_{cr}} = 1$ .

<sup>1</sup> Una traducción inglesa de este trabajo puede verse en *Iris*, número 58 (vol. XX, I), 1933.

La ecuación diferencial de la elástica (79), usada en el estudio del artículo anterior, se dedujo en la hipótesis de que las deformaciones son pequeñas comparadas con la longitud  $l$  de la columna. Por consiguiente, la fórmula (136), que da la flecha  $\delta$ , no da resultados exactos cuando  $P$  se aproxima mucho a  $P_{cr}$ . Sin embargo, las curvas de la figura 215 indican que, independientemente de lo que valga la excentricidad  $e$ , se producen deformaciones muy grandes cuando la carga  $P$  se aproxima a su valor crítico. Si la deformación es grande, también lo son el momento flector en el extremo empotrado y las fatigas correspondientes.

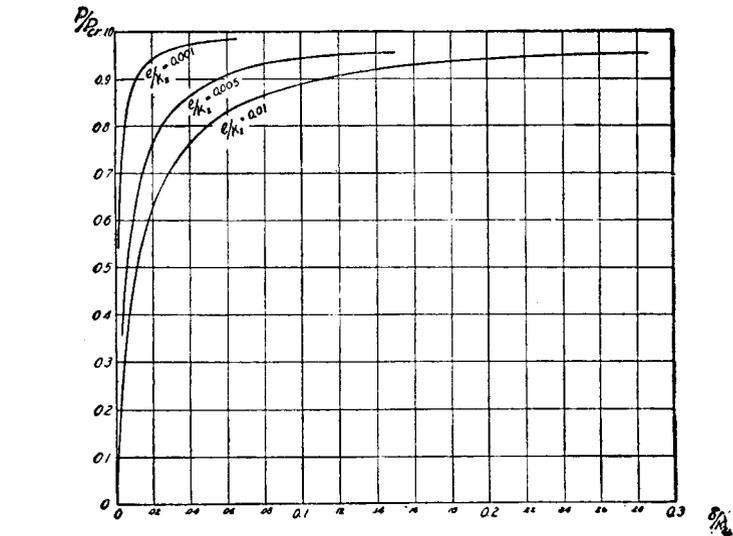


FIG. 215

Los experimentos realizados comprimiendo columnas muestran que, por más precauciones que se tomen para aplicar la carga centrada, siempre existe una pequeña excentricidad accidental. Debido a ello la carga  $P$ , en dichos experimentos, produce no sólo compresión, sino flexión adicional. Las curvas de la figura 216 muestran los resultados de ensayos realizados por investigadores diversos. Se ve que al aumentar el cuidado en la aplicación de la carga las curvas se aproximan más y más al eje vertical, y que el aumento rápido de deformación, a medida

que la carga se aproxima a su valor crítico, se manifiesta de modo más acusado. Las cargas  $P$  próximas al valor crítico producen siempre deformaciones acentuadas que sobrepasan el límite elástico del material, por lo que una columna cargada en esta forma pierde su utilidad práctica. Debido a esto, el valor crítico de la carga dado por la ecuación (141) debe considerarse como una

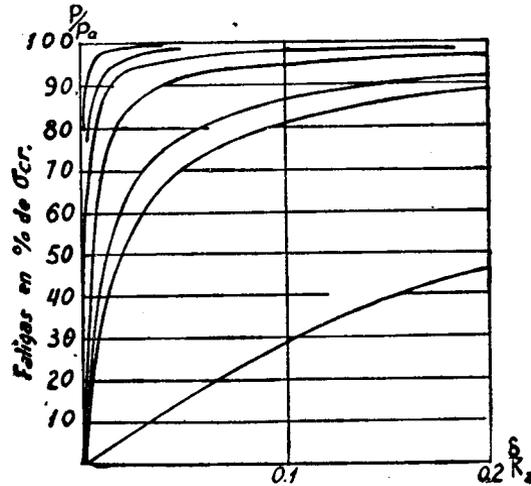


FIG. 216

carga de rotura. En las aplicaciones prácticas la carga de seguridad debe ser menor que la carga crítica, y deducirse dividiendo ésta por un cierto coeficiente de seguridad. Un estudio más detenido de esta cuestión puede verse en los dos artículos siguientes.

Hasta ahora se ha considerado una columna empotrada un extremo y libre en el otro. En el caso de una pieza con los dos extremos articulados (fig. 214), pueden obtenerse conclusiones parecidas.

Las ecuaciones (139) y (140) dan valores infinitos cuando

$$\frac{pl}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo en vez de  $p$  el valor de la expresión (135) se obti

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}, \tag{1}$$

valor de la carga crítica para una barra con extremos articulados.

En el caso de compresión de columnas con los extremos empotrados, la elástica toma la forma indicada en la figura 217. Puede considerarse dividida en cuatro trozos, análogos cada uno de ellos a la elástica obtenida para una columna empotrada en un extremo y libre en el otro. El valor crítico de la

carga se encuentra, en este caso, poniendo  $\frac{l}{4}$  en lugar de  $l$  en la ecuación (141); se obtiene

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}. \tag{143}$$

Este valor es la carga crítica para una columna con los extremos empotrados.

Debe notarse que al obtener la ecuación (136) se supuso que la excentricidad acontecía en la dirección del eje  $y$ , y la flexión en el plano  $xy$ . Si la excentricidad acontece en dirección del eje  $z$ , se obtienen fórmulas análogas. La flexión se presenta entonces en el plano  $xz$ , y para calcular las flechas debe sustituirse  $I_z$  por  $I_y$  en la ecuación (136). Si no se hace ninguna presunción sobre la aplicación central de la carga, y la flexión acontece como resultado de una excentricidad accidental, debemos considerar deformaciones en ambos planos principales  $xy$  y  $xz$ , y al calcular el valor crítico de la carga, usar el menor de los dos momentos principales de inercia en las ecuaciones (141), (142) y (143). En lo sucesivo supondremos que  $I_z$  es el menor de los momentos principales de inercia, y  $k_z$  el radio de giro correspondiente.

Para el cálculo de flechas es ventajoso, a veces, emplear fórmulas aproximadas en lugar de las exactas (136) y (138). Se vió en el artículo anterior que para cargas pequeñas, es decir,  $pl$  menor que  $\frac{1}{10}$ , la flecha puede calcularse con suficiente aproximación por la expresión

$$\delta = \frac{Pel^3}{2EI_z}, \tag{a}$$

donde se ha despreciado la influencia de la fuerza axial en

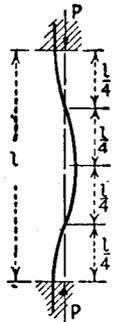


FIG. 217

la flexión, y sólo se ha considerado el momento flector constante  $Pe$ .

Para cargas mayores, la ecuación (a) no es suficientemente aproximada y debe considerarse la influencia de la fuerza compresora sobre la flexión. Esta influencia depende principalmente de la relación  $\frac{P}{P_{cr}}$ , y la flecha puede obtenerse con aproximación aceptable por la fórmula

$$\delta = \frac{Pel^2}{2EI_z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (b)$$

Las flechas calculadas por esta fórmula figuran en la tercera línea de la tabla de la página 235. Comparando los valores que en ella figuran con los de la segunda línea se ve que la fórmula (b) es suficientemente aproximada hasta para valores de la carga próximos al valor crítico.

Para una pieza con los extremos articulados la fórmula aproximada, análoga a la (b), es <sup>1</sup>

$$\delta = \frac{Pel^2}{8EI_z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (c)$$

El primer factor del segundo miembro es la flecha producida por los pares  $Pe$ , aplicados en los extremos. El segundo factor representa el efecto en la flecha de la fuerza longitudinal compresora  $P$ .

La ecuación (c) se utiliza frecuentemente para determinar de modo experimental la carga crítica correspondiente a una columna. Si los resultados de los experimentos se representan gráficamente mediante una curva análoga a una de las de la figura 216, la asíntota horizontal de dicha curva determina  $P_{cr}$ . Esta operación no puede realizarse con aproximación suficiente, especialmente si la excentricidad accidental no es pequeña y la curva no vuelve rápidamente, de modo brusco, al aproxi-

<sup>1</sup> Esta solución aproximada fué dada por el profesor J. Perry. Véase *Engineer*, diciembre, 10 y 24, 1886.

marse a la asíntota horizontal. Mediante la ecuación (c), puede determinarse  $P_{cr}$  de modo más satisfactorio. Dividiendo dicha ecuación por  $\frac{P}{P_{cr}}$ , se obtiene

$$\frac{\delta}{P} \cdot P_{cr} = \frac{e\pi^2}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

$$y \quad \frac{\delta}{P} \cdot P_{cr} - \delta = \frac{e\pi^2}{8}$$

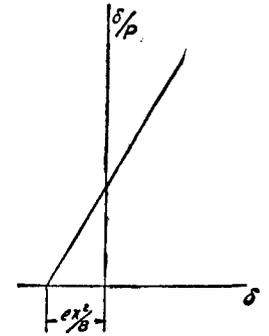


Fig. 218

Esta ecuación muestra que si referimos la dependencia de  $\frac{\delta}{P}$  a la flecha  $\delta$ ,

medida durante el ensayo, mediante ejes rectangulares, se obtiene una serie de puntos en línea recta (figura 218). Esta línea corta al eje horizontal ( $\frac{\delta}{P} = 0$ ) a la distancia  $\frac{e\pi^2}{8}$  desde el origen y la inversa de la pendiente de la línea da la carga crítica <sup>1</sup>.

55. **Fatiga crítica. Proyecto de columnas.**—Consideremos el caso de una columna con los extremos articulados. La fatiga crítica se obtiene dividiendo la carga crítica dada por la ecuación (142) por el área de la sección recta  $A$ . De este modo se obtiene

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{k_z}\right)^2} \quad (144)$$

Se ve que para un material dado el valor de la fatiga crítica depende del que toma la relación  $\frac{l}{k_z}$ , denominada esbeltez. En la figura 219, la curva  $ACB$  representa <sup>2</sup> la relación entre  $\sigma_{cr}$  y  $\frac{l}{k_z}$  para un acero cuyo módulo  $E$  vale  $2 \times 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup>. La curva queda perfectamente definida por el valor

<sup>1</sup> Este método, ideado por R. V. Southwell (*Proc. Roy. Soc. London*, serie A, vol. 135, pág. 601, 1932), ha dado buenos resultados prácticos y se utiliza con profusión en los ensayos de columnas.

<sup>2</sup> Esta curva se denomina algunas veces curva de Euler, por deducirse de la fórmula de Euler para la carga crítica.

del módulo de elasticidad del material y es independiente de la fatiga de rotura. Para valores elevados de la esbeltez  $\frac{l}{k_z}$ , la fatiga crítica es reducida, lo que indica que una columna muy esbelta pandea y pierde su resistencia para una fatiga de compresión muy pequeña. Esta contingencia no puede obviarse em-

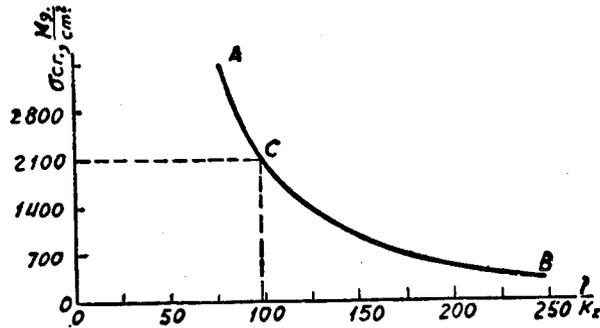


FIG. 219

pleando un acero de alta resistencia, puesto que el módulo de elasticidad del acero no varía mucho con su composición y los tratamientos térmicos y permanece prácticamente constante. La columna puede robustecerse aumentando el momento de inercia  $I_z$  y el radio de giro  $k_z$ , lo que se realiza sin aumentar el área de la sección, colocando el material tan lejos como sea posible del eje. Por esta razón, las formas tubulares son más económicas como columnas que las secciones macizas. A medida que la esbeltez disminuye, la fatiga crítica aumenta y la curva  $ACB$  se aproxima asintóticamente al eje vertical. Sin embargo, existe un cierto límite en el empleo de la curva de Euler. La expresión de la carga crítica se ha obtenido utilizando la ecuación diferencial (79) para la elástica, lo que supone que el material es perfectamente elástico y sigue la ley de Hooke (véase artículo 31). Por consiguiente, la curva  $ACB$  de la figura 219 da solamente resultados satisfactorios para piezas esbeltas en las que  $\sigma_{cr}$  permanece inferior al límite elástico del material. Para aquellas columnas en las que  $\sigma_{cr}$  obtenida por la ecuación (144) es mayor que el límite de proporcionalidad del material, la curva de Euler no da resultado satisfactorio y

debe recurrirse a la vía experimental para estudiar el pandeo de columnas comprimidas más allá del límite de proporcionalidad. Estos experimentos realizados con columnas de materiales que, como el acero, tienen un acusado punto de fluencia, muestran que la columna pierde su estabilidad y pandea cuando la fatiga compresora alcanza el valor de la fatiga de fluencia.

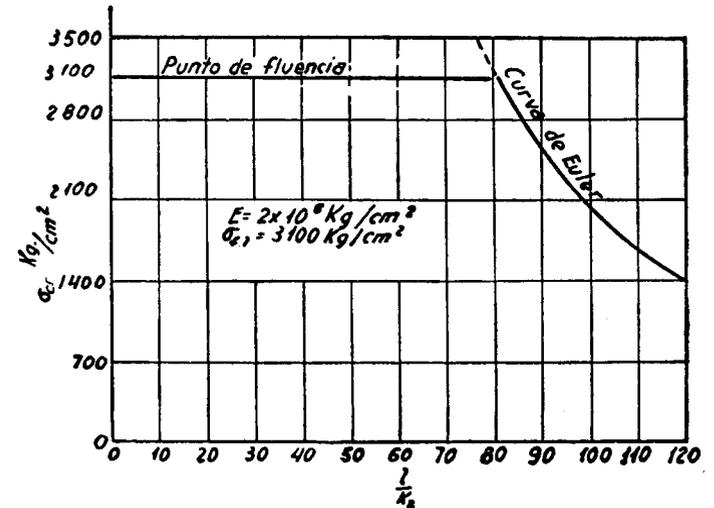


FIG. 220

En la figura 220 se dan algunos resultados experimentales. El material es un acero corriente con acusado punto de fluencia a  $\sigma_{Fl} = 3.100 \text{ kg./cm.}^2$ . Se ve que para columnas de gran esbeltez ( $\frac{l}{k_z} > 80$ ), el valor que el ensayo da para la fatiga crítica coincide satisfactoriamente con la curva de Euler, mientras que para columnas cortas permanece prácticamente independiente de la esbeltez  $\frac{l}{k_z}$  y es igual a la fatiga de fluencia.

En el caso de un acero corriente con poco carbono el punto de fluencia no se presenta tan acusado como en el caso anterior y acontece para una fatiga mucho menor. Para un acero de este tipo se puede tomar  $\sigma_{Fl} = 2.400 \text{ kg./cm.}^2$ . El límite de proporcionalidad es mucho más bajo, por lo que la curva de Euler es válida solamente para esbelteces iguales o superiores a 100,

a la que corresponde una  $\sigma_{cr} = 2.000 \text{ kg./cm.}^2$ . Para fatigas más elevadas, es decir, para  $\frac{l}{k_z} < 100$ , el material no sigue la ley de Hooke y la curva de Euler no puede usarse. Se acostumbra a reemplazar la región inelástica por dos líneas rectas  $AB$  y  $BC$ , tal como indica la figura 221. La línea horizontal  $AB$  corresponde a

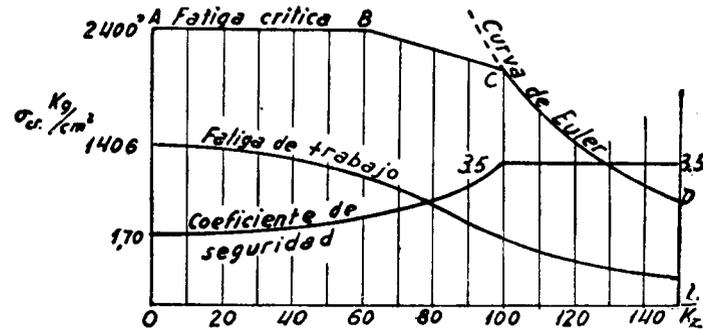


FIG. 221

la fatiga de fluencia, y la línea inclinada  $BC$  corresponde a fatigas entre el límite de proporcionalidad y el de fluencia del material.

Construido el diagrama  $ABCD$  de la figura 221 para el acero de que está formada una columna, puede obtenerse fácilmente la fatiga crítica correspondiente a dimensiones cualesquiera en la sección recta. Basta calcular en cada caso el valor de la esbeltez  $\frac{l}{k_z}$  y tomar la ordenada correspondiente de la curva.

Para obtener la fatiga de trabajo debe dividirse la fatiga crítica por un coeficiente de seguridad apropiado. Al escoger este factor, debe tenerse en cuenta que a medida que la esbeltez aumenta tienden a aumentar las imperfecciones, tales como la curvatura inicial de la columna. Parece lógico, por consiguiente, introducir un coeficiente de seguridad variable, que aumente con la esbeltez. En algunas instrucciones, el coeficiente de seguridad aumenta desde 1,7 para  $\frac{l}{k_z} = 0$  a 3,5 para  $\frac{l}{k_z} = 100$ .

Varía en forma tal, que la fatiga de trabajo en la zona plástica sigue una ley parabólica. Para  $\frac{l}{k_z} > 100$ , el coeficiente de segu-

ridad se toma constante e igual a 3,5 y la fatiga de trabajo se deduce de la curva de Euler. En la figura 221 se ven las curvas correspondientes a la fatiga de trabajo y al coeficiente de seguridad como funciones de la esbeltez para un acero corriente.

En el análisis realizado se ha supuesto la columna articulada en sus extremos. Este caso se denomina algunas veces caso fundamental de pandeo, por ser el más frecuente al proyectar las barras comprimidas de las estructuras con nudos articulados. Las fatigas de trabajo establecidas por el diagrama de la figura 221, para el caso fundamental, pueden utilizarse en otros, con tal de que se tome en lugar de la longitud real de la columna una longitud reducida, cuyo valor depende de las condiciones en los extremos de la columna. Considerando, por ejemplo, el caso de una columna con un extremo empotrado y el otro libre, y también la columna con los dos extremos empotrados, las fórmulas para la carga crítica pueden ponerse, respectivamente, en la forma

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2l)^2} \quad \text{y} \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\frac{l}{2})^2}$$

Comparando estas fórmulas con la ecuación (142) del caso fundamental, se deduce que para el proyecto de una columna con un extremo empotrado y el otro libre debe tomarse una longitud doble de la real de la columna al ir a utilizar el diagrama de la figura 221. En el caso de una columna con ambos extremos empotrados, la longitud reducida es igual a la mitad de la longitud real.

La elección de las dimensiones apropiadas de la sección de una columna se hace generalmente por tanteos. Dada la carga  $P$  que actúa sobre la columna, se dan, por comparación, dimensiones a la sección recta y se calculan  $k_z$  y  $\frac{l}{k_z}$  para estas dimensiones. Por el diagrama de la figura 221 se obtiene el valor de la fatiga de trabajo, y multiplicando este valor por el área de la sección recta, se obtiene la carga de trabajo para la columna. Si esta carga es algo menor o mayor que  $P$ , la sección escogida es válida. En caso contrario, se hace un nuevo tanteo. Para columnas empotradas, se considera útil toda la sección

para el cálculo de  $k_z$ , puesto que los agujeros de roblonado no afectan de modo apreciable a la carga crítica. Sin embargo, para calcular la carga de trabajo de la columna debe multiplicarse la fatiga de trabajo por el área neta de la sección, a fin de tener mayor seguridad de que no se presentarán fatigas excesivas.

### Problemas

1. Una barra de acero de sección rectangular de  $2,5 \times 5$  cm., con los extremos articulados, está comprimida axialmente. Determinar la longitud mínima para la que la ecuación (144) que da la fatiga crítica pueda aplicarse. El límite de proporcionalidad del material es 2.000 kg./cm.<sup>2</sup> y  $E = 2 \times 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup>. Determinar el valor de la fatiga crítica si la longitud de la pieza es 1,50 m.

2. Resolver el problema anterior suponiendo una barra circular de 2,5 cm. de diámetro con los extremos empotrados.

3. Determinar la carga crítica para una I de 1,80 m. de longitud y 15 cm. de altura, suponiendo articulados los extremos.  $I_z = 70$  cm.<sup>4</sup>,  $I_y = 850$  cm.<sup>4</sup> y  $A = 22,50$  cm.<sup>2</sup>. Determinar la carga de trabajo por la curva de la figura 221.

4. Resolver el problema anterior suponiendo empotrados los extremos de la columna.

5. Calcular, mediante la figura 221, la carga de trabajo de una columna formada por dos vigas en I de la misma sección que la del problema 3 (fig. 222). La longitud de la columna es 3 m. y los extremos están articulados. Se supone que los elementos de enlace son lo suficientemente rígidos para que las dos vigas en I trabajen juntas como una sola pieza.

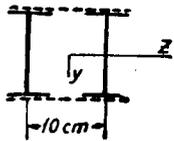


FIG. 222

6. Resolver el problema anterior suponiendo empotrados los extremos de la columna.

7. Una columna de 3 m. de longitud, con los extremos articulados, está formada por dos  $\square$  de 20 cm., que tienen  $I_z = 50$  cm.<sup>4</sup>,  $I_y = 1260$  cm.<sup>4</sup> y  $A = 21$  cm.<sup>2</sup>. La distancia del centro de gravedad de cada una, a su dorso, es  $e = 14,5$  mm.

Hallar la carga de trabajo de la columna si la separación entre las espaldas de las  $\square$  es 10 cm.

8. Determinar las dimensiones de una pieza de acero de sección cuadrada y longitud igual a 1,80 m. comprimida por la carga  $P = 20.000$  kg. Los extremos están articulados. Usese la figura 221.

9. Resolver el problema anterior suponiendo que los extremos de la barra están empotrados. Usese la figura 221.

56. Proyecto de columnas por el método de las inexactitudes supuestas.—En el artículo anterior la carga de trabajo de una

columna se dedujo dividiendo la carga crítica por un coeficiente de seguridad apropiado. El punto débil de este método es precisamente el modo arbitrario, en parte, de elegir el coeficiente de seguridad que, como hemos visto, varía con la esbeltez. Para hacer más racional el proyecto de columnas, se ha ideado otro método basado en supuestas inexactitudes<sup>1</sup>. Sobre los resultados experimentales conocidos se puede adjudicar un cierto valor a la excentricidad inevitable  $e$  con que se aplica la fuerza compresora  $P$ . Por consiguiente, empleando estos valores en las fórmulas del artículo 53, se puede calcular el valor  $P_{Fl}$  de la carga para el que la fatiga compresora máxima en la columna alcanza la fatiga de fluencia del material. La carga de trabajo se obtiene a continuación dividiendo  $P_{Fl}$  por un factor de seguridad apropiado. Es decir, en lugar de utilizar la carga crítica, que equivale a la carga de rotura, se utiliza la carga para la que la fluencia comienza como punto de partida para el cálculo de la carga de trabajo.

Este método de proyectar columnas se simplifica utilizando diagramas cuyo trazado daremos a continuación. Sea el caso de una columna con los extremos articulados (fig. 214). El momento flector máximo se obtiene por la ecuación (140) y la fatiga de compresión máxima es

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{Z} \sec \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \frac{l}{2} \quad (a)$$

El primer término del segundo miembro es la fatiga directa y el segundo la fatiga de máxima compresión por flexión. La carga para la que comienza la fluencia se obtiene poniendo  $\sigma_{Fl}$  en vez de  $\sigma_{\max}$  en la ecuación (a). Se tiene

$$\sigma_{Fl} = \frac{P_{Fl}}{A} \left( 1 + \frac{e}{r} \sec \frac{l}{2k_z} \sqrt{\frac{P_{Fl}}{EA}} \right) \quad (b)$$

$r = \frac{Z}{A}$  representa el radio del núcleo (véase pág. 232) y

$k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$  el radio de giro mínimo. La cantidad  $\frac{P_{Fl}}{A}$  es la fatiga

<sup>1</sup> Véase la publicación de D. H. Young, *Proceedings Am. Soc. Civil Eng.*, diciembre, 1934.

compresora media cuando comienza la fluencia. Representando esta fatiga por  $\sigma_c$  se obtiene

$$\sigma_{Fl} = \sigma_c \left( 1 + \frac{e}{r} \sec \frac{l}{2k_z} \sqrt{\frac{\sigma_c}{E}} \right). \quad (c)$$

En esta ecuación, dado un valor para la excentricidad relativa  $\frac{e}{r}$ , puede calcularse fácilmente  $\sigma_c$  para cualquier valor de la esbeltez  $\frac{l}{k_z}$ . Los resultados obtenidos para un acero corriente de  $\sigma_{Fl} = 2.500 \text{ kg./cm.}^2$  están representados por las curvas de la

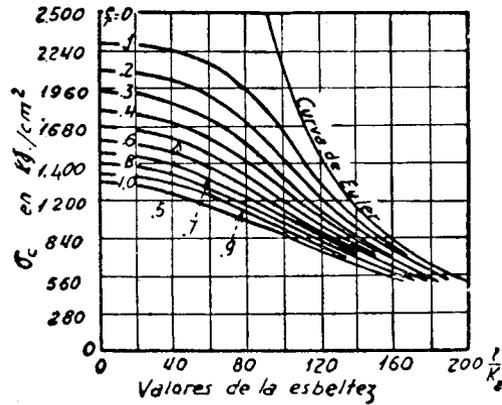


FIG. 223

figura 223. Mediante estas curvas se calculan fácilmente la fatiga media  $\sigma_c$  y la carga compresora  $P_{Fl} = A\sigma_c$ , para la que comienza la fluencia, dados  $\frac{e}{r}$  y  $\frac{l}{k_z}$ .

Dividiendo  $P_{Fl}$  por el coeficiente de seguridad, se obtiene la carga de trabajo.

En el estudio realizado se ha supuesto que en la columna se presentaba una inexactitud inevitable bajo la forma de excentricidad de la carga. De modo análogo estudiaríamos el caso de inexactitudes debidas a una curvatura inicial de la columna desde la forma recta<sup>1</sup>. Representando la flecha máxima d

<sup>1</sup> La forma inicial del eje de la columna suele suponerse ser semionda de forma sinusoidal.

eje de la columna por  $a$  y estudiando  $\sigma_c$  como función de la relación  $\frac{a}{r}$  y de la esbeltez  $\frac{l}{k_z}$ , obtendríamos unas curvas análogas a las de la figura 223.

En la práctica se da la flecha inicial  $a$  por una relación con la longitud  $l$  de la columna. Los resultados obtenidos para tres valores diferentes de la relación  $\frac{a}{l}$  y para  $\sigma_{Fl} = 2.500 \text{ kg./cm.}^2$  correspondientes a una sección en I se ven en la figura 224. Para columnas muy cortas, las tres curvas dan  $\sigma_c = 2.500 \text{ kg./cm.}^2$ . Para columnas muy esbeltas, los valores dados por las

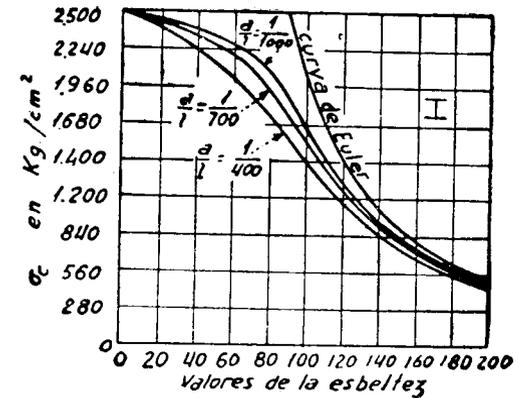


FIG. 224

curvas se aproximan a los de la curva de Euler. Utilizando una de las curvas y dividiendo el valor  $\sigma_c$  correspondiente por un coeficiente de seguridad, por ejemplo, 2, se obtiene el valor de la fatiga media de trabajo. La ventaja de este método es el empleo de un coeficiente de seguridad constante, en tanto que el aumento de inexactitudes con la longitud de la columna  $l$  se tiene en cuenta fácilmente suponiendo que la excentricidad es proporcional a ella. Sin embargo, el valor de las inexactitudes debe hacerse depender de los datos experimentales existentes.

57. Fórmulas empíricas para el proyecto de columnas.— En los dos métodos descritos para el cálculo de columnas es ne-

<sup>1</sup> Corrientemente se toma entre los límites  $\frac{l}{400} \geq a \geq \frac{l}{1.000}$ .

cesario tomar arbitrariamente o el coeficiente de trabajo (figura 221) o las inexactitudes inevitables (figs. 223 y 224). Estas cantidades no pueden elegirse de modo apropiado mas que multiplicando los ensayos de laboratorio. En tales circunstancias, es natural que muchos ingenieros prefieran el uso de fórmulas empíricas que representen el resultado de tales experimentos. Este procedimiento es legítimo siempre que la aplicación de las fórmulas se mantenga entre los límites para los que ha sido establecida y para los que ha recogido la información experimental. Cuando sea necesario extrapolar dichos límites, deberán modificarse las fórmulas de acuerdo con las nuevas condiciones. Para ello son de importancia capital las consideraciones teóricas.

Una de las fórmulas empíricas más antiguas se debe a Tredgold<sup>1</sup>. Ha sido adoptada por Gordon, para representar los resultados de los ensayos de Hodgkinson y su forma final se debe a Rankine. La fatiga compresora media de trabajo dada por la fórmula de Rankine es

$$\sigma_t = \frac{a}{1 + b \left(\frac{l}{k_z}\right)^2}, \quad (a)$$

donde  $a$  es una fatiga y  $b$  un factor numérico, constantes para un material dado. Eligiendo de modo apropiado estas constantes, la fórmula da resultados satisfactorios entre ciertos límites.

El Instituto Americano para la Construcción en Acero, en sus instrucciones de 1928, da para la fatiga de trabajo en una columna

$$\sigma_t = \frac{18.000}{1 + \frac{l^2}{18.000 k_z^2}} \text{ libras/pulg.}^2 \quad (b)$$

para  $\frac{l}{k_z} > 60$ . Para columnas cortas  $\sigma_t$  se toma igual a 15.000 libras por pulgada cuadrada.

La Asociación Americana de Ingenieros de Ferrocarriles

<sup>1</sup> Para conocer la historia de la fórmula véase E. H. Salmon, *Columns*, London, 1921. Véase también Todhunter y Pearson, *History the Theory of Elasticity*, vol. 1, pág. 105, Cambridge, 1886.

la fórmula lineal, adoptada también por los constructores de Chicago y Nueva York, cuya fórmula es

$$\sigma_t = 16.000 - 70 \frac{l}{r} \cdot \text{libras/pulg.}^2. \quad (c)$$

Se emplea para  $30 < \frac{l}{k_z} < 120$  para piezas principales y hasta  $\frac{l}{k_z} = 150$  para piezas secundarias. Para valores de  $\frac{l}{k_z}$  menores que 30 que toma  $\sigma_t = 14.000$  libras/pulgada<sup>2</sup>.

La fórmula parabólica propuesta por Ostensfeld<sup>1</sup> se usa también algunas veces. Da la fatiga crítica de compresión en la forma

$$\sigma_{cr} = a - b \left(\frac{l}{k_z}\right)^2. \quad (d)$$

Las constantes  $a$  y  $b$  dependen de las propiedades mecánicas del material. Para el acero corriente, la ecuación (d) toma a veces la forma

$$\sigma_{cr} = 2.650 - 0,09 \left(\frac{l}{k_z}\right)^2 \cdot \text{kg./cm.}^2. \quad (e)$$

Esta expresión representa una parábola que es tangente a la curva de Euler en  $\frac{l}{k_z} = 122,5$  y toma el valor  $\sigma_{cr} = 2.650$  kg./cm.<sup>2</sup> para columnas cortas. El coeficiente de seguridad varía de 2,5 a 3.

<sup>1</sup> *Zeitschr.* Véase *Deutsch Ing.*, vol. 42, pág. 1462, 1898. Véase también C. E. Fuller y W. A. Johnston, *Applied Mechanics*, vol. 2, página 359, 1919.

CAPITULO IX

TORSIÓN Y FLEXIÓN COMBINADA CON TORSIÓN

58. Torsión de un eje circular.—Consideremos un eje circular empotrado en el extremo superior y sometido a la acción de un par aplicado en el extremo inferior (fig. 225). Puede com-

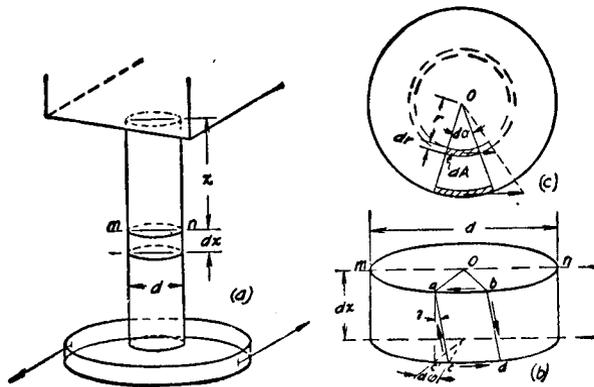


FIG. 225

probarse mediante medidas hechas en su superficie que las secciones circulares del eje permanecen circulares durante la torsión y que sus diámetros y las distancias entre ellos no cambian con tal que el ángulo de torsión sea pequeño.

Un disco aislado del eje, tal como indica la figura 225 (b), estará en el estado de equilibrio elástico siguiente. La sección inferior habrá girado respecto a la superior un ángulo  $d\phi$ , siendo la rotación de la sección  $mn$  respecto al extremo empotrado. Un elemento  $abcd$  de la superficie lateral del disco de lados verticales antes de la deformación toma la forma indicada en

figura 225 (b). Las longitudes de los lados son esencialmente las mismas y solamente han variado los ángulos. El elemento estará sometido a fatiga cortante pura (véase artículo 16) y la magnitud de la distorsión angular dada por el triángulo infinitesimal  $cac'$  es

$$\gamma = \frac{c'c}{ac'}$$

Donde  $c'c$  es el arco de radio  $\frac{d}{2}$  correspondiente a la diferencia  $d\phi$  de los ángulos de rotación de las dos secciones adyacentes. Tendremos

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dx} d. \tag{a}$$

Para un eje sometido a torsión por la acción de un momento en su extremo el ángulo de torsión es proporcional a la longitud y la cantidad  $\frac{d\phi}{dx}$  es constante y representa el ángulo de giro por unidad de longitud de eje. La representaremos por  $\theta$ . Sustituyendo en (a),

$$\gamma = \frac{1}{2} \theta d. \tag{145}$$

Las fatigas cortantes que actúan en los lados del elemento y producen la distorsión anterior tienen las direcciones conocidas. Su magnitud por la ecuación (40) es

$$\tau = \frac{1}{2} G\theta d. \tag{146}$$

Para estudiar el estado de fatiga en el interior del eje se supondrá que no solamente no se distorsionan los círculos perimetrales de las secciones rectas del eje, sino también que las secciones, en su totalidad, permanecen planas y giran como si fuesen absolutamente rígidas, es decir, todo diámetro de la sección recta permanece recto y gira el mismo ángulo. Los ensayos de ejes circulares a torsión muestran que la hipótesis admitida está completamente de acuerdo con los resultados experimentales. Establecido esto, el análisis efectuado en el elemento  $abcd$  de la superficie del eje —fig. 225 (b)— será válido para un elemento similar de la superficie de un cilindro interno, cuyo radio  $r$

reemplace a  $\frac{d}{2}$  —fig. 225 (c)—. El grueso del elemento en dirección radial se considera infinitesimal.

Tales elementos están también en estado de fatiga cortante pura y la fatiga cortante en sus lados es

$$\tau_r = Gr\theta, \quad (b)$$

lo que demuestra que la fatiga cortante varía proporcionalmente a la distancia  $r$  desde el centro del eje. La figura 226 muestra esta distribución de fatigas. La fatiga máxima se presenta en la superficie exterior del eje. Para un material dúctil, el período plástico comienza en esta superficie. Para un material menos resistente al esfuerzo cortante en sentido longitudinal que en el transversal, por ejemplo, un árbol de madera con las fibras paralelas a su eje, las primeras fisuras se producirán por esfuerzos cortantes que

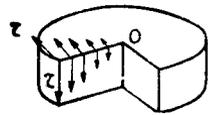


FIG. 226

actúen en las secciones axiales y aparecerán en la superficie del árbol en dirección longitudinal. En el caso de un material menos resistente a extensión que a esfuerzo cortante, por ejemplo, un árbol circular de fundición o una pieza cilíndrica de yeso, aparecerá una fisura a lo largo de una hélice inclinada a  $45^\circ$  con el eje (fig. 227). La explicación es sencilla. Recordemos que el estado cortante puro es equivalente a una extensión en una dirección y a una compresión igual en dirección perpendicular (véase fig. 41). Un elemento rectangular tomado de la superficie exterior del árbol sometido a torsión con lados a  $45^\circ$  con el eje estará sometido a las fatigas que se ven en la figura 227. Las fatigas de extensión mostradas producen la fisura en hélice mencionada.



FIG. 227

Veamos ahora las relaciones existentes entre el momento torsor aplicado  $M_t$  y las fatigas que produce.

Para el equilibrio de la porción de eje comprendida entre extremo donde se ha aplicado el momento torsor y la sección ideal  $mn$  es necesario que las fatigas distribuidas en la sección recta sean estáticamente equivalentes a un par igual y opues al de torsión  $M_t$ .

Por cada elemento de área  $dA$  —fig. 225 (c)—, la fuerza cortante es  $\tau_r dA$ . El momento de esta fuerza respecto al eje del árbol será  $(\tau_r dA)r = G\theta r^2 dA$  (utilizando la ecuación  $b$ ). El momento total  $M_t$  respecto al eje del árbol es la suma, extendida al área total de la sección recta, de los momentos de cada fuerza elemental, es decir,

$$M_t = \int_{r=0}^{r=\frac{d}{2}} G\theta r^2 dA = G\theta \int_{r=0}^{r=\frac{d}{2}} r^2 dA = G\theta I_p. \quad (c)$$

Donde  $I_p$  es el momento polar de inercia de la sección circular. Según el apéndice, para un círculo de diámetro  $d$ ,  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ;

$$M_t = G\theta \frac{\pi d^4}{32}$$

y

$$\theta = \frac{M_t}{G} \times \frac{32}{\pi d^4} = \frac{M_t}{GI_p} \quad (147)$$

Vemos que  $\theta$ , el ángulo de torsión por unidad de longitud de eje, varía proporcionalmente al momento aplicado e inversamente al módulo  $G$  y a la cuarta potencia del diámetro. Si el árbol tiene una longitud  $l$ , el ángulo total de torsión será

$$(\varphi)_t = \theta l = \frac{M_t l}{GI_p} \quad (148)$$

Esta ecuación se utiliza en las comprobaciones físicas de la teoría y ha sido verificada por numerosísimos experimentos que han dado veracidad a la hipótesis de partida. Se hace notar que los experimentos de torsión son los comúnmente usados para determinar los módulos de los materiales a esfuerzo cortante. Si se mide el ángulo de torsión producido en un árbol dado por un momento torsor conocido, el valor de  $G$  puede calcularse fácilmente utilizando la ecuación (148).

Llevando el valor de  $\theta$  de la ecuación (147) a la ecuación (146) se obtiene una ecuación que da la máxima fatiga cortante en la torsión de árboles circulares:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_t d}{2 I_p} = \frac{16 M_t}{\pi d^3} \quad (149)$$

Esta expresión indica que la fatiga es proporcional al momento torsor e inversamente proporcional al cubo del diámetro del árbol. En las aplicaciones prácticas el diámetro del árbol debe calcularse conocida la potencia  $H$  en CV. que debe transmitir. Dado  $H$ , el momento torsor se obtiene en kg. cm. por la bien conocida ecuación

$$M_t \times \frac{2\pi n}{60} = H \times 75 \times 100 \quad (150)$$

en la que  $n$  representa el número de revoluciones por minuto del árbol. Despejando  $M_t$  en la ecuación (150) y sustituyéndolo en la (149), se obtiene

$$d = 71,7 \sqrt[3]{\frac{H}{n\tau_{\max}}} \cdot \text{cm.} \quad (151)$$

Tomando, por ejemplo, como fatiga cortante de trabajo el valor  $\tau_t = 800 \text{ kg./cm.}^2$  se tiene

$$d = 7,80 \sqrt[3]{\frac{H}{n}} \cdot \text{cm.}$$

### Problemas

1. Determinar el diámetro  $d$  del árbol de una máquina de 200 CV., cuya velocidad es  $n = 120 \text{ r. p. m.}$ , siendo la fatiga de trabajo  $\tau_t = 210 \text{ kg./cm.}^2$ .

*Respuesta:*

$$d = 71,7 \sqrt[3]{\frac{200}{120 \times 210}} = 14,2 \text{ cm.}$$

2. Determinar la potencia en CV. transmitida por un árbol si  $d = 15 \text{ cm.}$ ,  $n = 120 \text{ r. p. m.}$ ,  $G = 8 \times 10^8 \text{ kg./cm.}^2$  y el ángulo de torsión medido entre dos secciones rectas distantes 7,5 m. es  $\frac{1}{15}$  de radian.

*Solución:* De la ecuación (148),

$$M_t = \frac{\pi d^4 \varphi G}{32 l} = \frac{\pi \times 15^4}{32} \times \frac{8 \times 10^8}{15 \times 7,5 \times 100}$$

La potencia transmitida, deducida de la ecuación (150), es

$$H = \frac{M_t \times 2\pi n}{60 \times 75 \times 100} = \frac{\pi \times 15^4 \times 8 \times 10^8 \times 2\pi \times 120}{32 \times 15 \times 7,5 \times 100 \times 60 \times 75 \times 100} = 591,6$$

3. Un árbol de diámetro  $d = 9 \text{ cm.}$  hace 45 r. p. m. Determinar la potencia transmitida si la máxima fatiga cortante es  $320 \text{ kg./cm.}^2$ .

4. Un árbol de acero ( $G = 8 \times 10^8 \text{ kg./cm.}^2$ ) tiene un tamaño tal que la máxima fatiga cortante es  $1.000 \text{ kg./cm.}^2$  para un ángulo de torsión de  $90^\circ$ . Determinar la relación  $\frac{l}{d}$ .

*Respuesta:*

$$\frac{l}{d} = 628.$$

5. Un eje de acero con los extremos empotrados (fig. 228) está sometido a la acción de un momento torsor  $M_t$ , aplicado en una sección intermedia  $mn$ . Determinar el ángulo de torsión dada la fatiga de trabajo  $\tau_t$ .

*Solución:* Para los dos trozos del eje el ángulo de torsión ha de ser igual, por consiguiente, ecuación (148), los momentos torsores serán

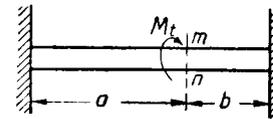


FIG. 228

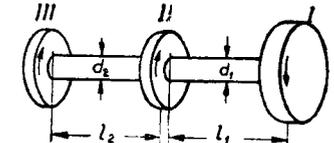


FIG. 229

inversamente proporcionales a las longitudes de los trozos. Si  $a > b$ , el mayor momento torsor es el de la parte derecha del árbol y su valor es  $\frac{M_t \cdot a}{a + b}$ . Sustituyendo este valor como momento torsor y  $\tau_t$  por  $\tau_{\max}$  en la ecuación (149), se obtiene el siguiente valor para  $d$ :

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 a M_t}{(a + b) \pi \tau_t}}$$

Puede obtenerse ahora el ángulo de torsión utilizando la ecuación (148).

6. Las poleas I, II y III transmiten 500 CV., 200 CV. y 300 CV., respectivamente (fig. 229). Encontrar la relación de los diámetros  $d_1$  y  $d_2$ , para que la fatiga máxima sea la misma en las dos partes del árbol. Encontrar la relación de los ángulos de torsión en las dos partes.

*Solución:* Los momentos de torsión en las dos partes están en la relación 5 : 3. Si queremos tener la misma fatiga máxima, se deduce usando la ecuación (149), que

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$$

Los ángulos de torsión por las ecuaciones (148) y (149) estarán en la relación

$$\varphi_1 : \varphi_2 = \frac{l_1}{l_2} \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$$

7. Suponiendo que el eje del problema anterior tiene una sección constante y gira a 200 r. p. m., hallar su diámetro para que  $\tau_t = 480 \text{ kg./cm.}^2$ . Hallar el ángulo de torsión de cada trozo del eje, si  $G = 8 \times 10^5 \text{ kg./cm.}^2$  y  $l_1 = l_2 = 1,20 \text{ m.}$

8. Determinar la longitud de un árbol de acero de 5 cm. de diámetro ( $G = 8 \times 10^5 \text{ kg./cm.}^2$ ), si la fatiga máxima es  $1.000 \text{ kg./cm.}^2$ , cuando el ángulo de torsión es  $6^\circ$ .

Respuesta:

$$l = 209 \text{ cm.}$$

9. Determinar el diámetro a partir del cual el ángulo de torsión del árbol, y no la fatiga máxima, es el factor de control al proyectar, si  $G = 8 \times 10^5 \text{ kg./cm.}^2$ ;  $\tau_t = 210 \text{ kg./cm.}^2$ , y el ángulo de torsión máximo admisible  $\frac{1^\circ}{4}$  por m.

Solución: Eliminando  $M_t$  entre las ecuaciones

$$\frac{16 M_t}{\pi d^3} = 210; \quad \frac{32 M_t}{G \pi d^4} = \frac{\pi}{180 \times 4 \times 100}$$

se obtiene  $d = 12 \text{ cm.}$ ; para  $d < 12 \text{ cm.}$ , el ángulo de torsión es el factor de control al proyectar.

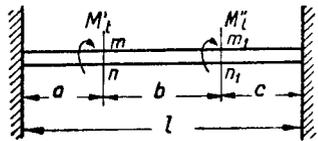


FIG. 230

10. Determinar el momento torsor en cada trozo de un árbol con los extremos empotrados sobre el que actúan los momentos torsores  $M'_t$  y  $M''_t$  aplicados en dos secciones intermedias (figura 230).

Solución: Calculando los momentos torsores producidos en cada porción del eje por cada uno de los momentos  $M'_t$  y  $M''_t$  (ver el problema 5) y sumando estos momentos, se obtiene

$$\frac{M'_t(b+c) + M''_t c}{l}, \quad \frac{M'_t a - M''_t c}{l}, \quad \frac{M'_t a + M''_t(a+b)}{l}.$$

11. Determinar los diámetros y los ángulos de torsión de los árboles del problema 6 si  $n = 120 \text{ r. p. m.}$ ,  $\tau_{\text{máx}} = 210 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $l_1 = 1,80 \text{ m.}$ ,  $l_2 = 1,20 \text{ m.}$

59. Torsión de árboles huecos.—En el análisis de la torsión de árboles macizos se ha visto (véase figura 226) que solamente el material situado en la superficie exterior del eje está sometido a una fatiga igual al coeficiente de trabajo. El material restante trabajará a una fatiga más baja, y en los casos en que la reducción de peso tiene gran importancia, como, por ejemplo, en los ejes propulsores de un avión, es conveniente usar árboles hue-

cos. Para analizar la torsión, en este caso, se hacen las mismas hipótesis que en el caso de los árboles macizos. La expresión general de la fatiga cortante vendrá dada por la ecuación (b) del artículo anterior. Al calcular los momentos de las fatigas cortantes, el radio  $r$  lo haremos variar desde el valor  $\frac{d_1}{2}$ , que es el radio de la circunferencia interior, al valor  $\frac{d}{2}$ , que tiene en la periferia. La ecuación (c) del párrafo anterior se reemplazará por la ecuación siguiente:

$$G\theta \int_{\frac{1}{2}d_1}^{\frac{1}{2}d} r^2 dA = M_t = G\theta I_p,$$

donde  $I_p = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4)$  es el momento polar de inercia de la sección anular. Por tanto,

$$\theta = \frac{32 M_t}{\pi (d^4 - d_1^4) G} = \frac{M_t d}{G I_p} \tag{152}$$

y el ángulo de torsión será

$$(\varphi)_t = \theta l = \frac{M_t l}{G I_p} \tag{153}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16 M_t}{\pi d^3 \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right)} = \frac{M_t d}{2 I_p} \tag{154}$$

Vemos por las ecuaciones (153) y (154) que si, por ejemplo, se toma  $d_1 = \frac{1}{2} d$ , el ángulo de torsión y la fatiga máxima, comparados con las mismas cantidades para un árbol macizo de diámetro  $d$ , vienen aumentados aproximadamente en un 6 por 100, mientras que la reducción en el peso del árbol será de un 25 por 100.

Problemas

1. Un eje hueco de acero, de 25 cm. de diámetro exterior y 15 cm. de interior, gira a 1.000 r. p. m. ¿Qué potencia en CV. transmite, si  $\tau_{\text{máx}} = 640 \text{ kg./cm.}^2$ ?

2. Hallar el momento torsor que puede aplicarse a un eje circular hueco si  $d = 15 \text{ cm.}$ ,  $d_1 = 10 \text{ cm.}$  y  $\tau_t = 640 \text{ kg./cm.}^2$ .

3. El eje propulsor de un barco es hueco; transmite 8.000 CV a. 100 r. p. m., con una fatiga de trabajo  $\tau_t = 320 \text{ kg./cm.}^2$ . Si  $\frac{d}{d_1} = 2$ , encontrar  $d$ .

Solución:

$$M_t = \frac{8.000 \times 60 \times 75 \times 100}{2 \pi \times 100}$$

La ecuación (154) da para este caso:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16}{15} \cdot \frac{16 M_t}{\pi d^3}$$

60. Torsión de ejes de sección rectangular.—El problema de la torsión de un árbol de sección rectangular es complicado,

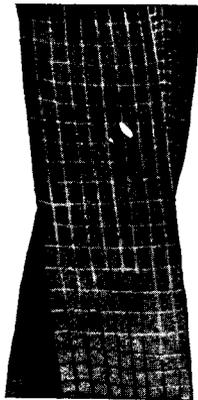


Fig. 231

debido al alabeo de la sección durante la torsión. Este alabeo puede verse de modo experimental mediante una barra rectangular de caucho, en cuyas caras se ha trazado un sistema de cuadrícula. Observando la figura 231 se aprecia que durante la torsión las líneas primitivamente perpendiculares al eje de la barra se han curvado. Se observa que la distorsión de los pequeños cuadrados anteriormente mencionados varía a lo largo de los lados de esta sección recta, alcanza su valor máximo en el centro y es nula en los ángulos. De aquí se deduce que la fatiga cortante, que varía como la distorsión, es máxima en el centro de los lados y nula en los ángulos de la sección recta. El estudio detenido del problema <sup>1</sup> ha hecho ver que la máxima fatiga cortante se presenta en el punto medio de los lados más largos de la sección rectangular y que está dada por la ecuación

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_t}{abc^2}, \tag{155}$$

donde  $b$  es el mayor y  $c$  el menor de los lados de la sección rec-

<sup>1</sup> La solución completa se debe a De Saint-Venant, *Mém. des Savants étrangers*, t. 14, 1855. Un resumen de este trabajo se encuentra en *History of the Theory Elasticity*, de Todhunter y Pearson, vol. II, página 312.

tangular y  $\alpha$  un factor numérico dependiente de la relación  $\frac{b}{c}$ .

En la tabla III, inserta más abajo, se dan algunos valores de  $\alpha$ .

Como fórmula aproximada que da resultados satisfactorios, puede utilizarse la siguiente:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_t}{bc^2} \left( 3 + 1,8 \frac{c}{b} \right)$$

TABLA III

DATOS PARA LA TORSIÓN DE EJES DE SECCIÓN RECTANGULAR

$\frac{b}{c}$	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6	8	10	$\alpha$
$\alpha =$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta =$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

El ángulo de torsión por unidad de longitud en el caso de una sección rectangular viene dado por la ecuación

$$\theta = \frac{M_t}{\beta bc^3 G} \tag{156}$$

Los valores del factor numérico  $\beta$  vienen dados en la tercera línea de la tabla anterior.

En todos los casos considerados, el ángulo de torsión por unidad de longitud es proporcional al momento torsor y puede representarse por la ecuación  $\theta = \frac{M_t}{C} (a)$ , donde  $C$  es una constante llamada rigidez de torsión del árbol.

En el caso de un árbol circular (ecuación 147),  $C = GI_p$ .

Para un árbol rectangular (ecuación 156),  $C = \beta bc^3 G$ .

61. Resorte helicoidal de espiras cerradas.—Supongamos que un resorte helicoidal de sección recta circular esté sometido a la acción de fuerzas axiales  $P$  (fig. 232) y que cada espira esté situada, aproximadamente, en un plano perpendicular al eje de la hélice. Considerando el equilibrio de la parte superior del resorte limitada por una sección axial  $mn$ —fig. 232 (b)—, puede deducirse de las ecuaciones de la estática que las fatigas para la sección  $mn$  se reducen a las que producen la fuerza cortante  $P$  que actúa en el centro de la sección y el par que obra en sentido contrario a las agujas del reloj y actúa en el plano de la sección.

El valor de este par es  $PR$ , siendo  $R$  el radio de la superficie cilíndrica que contiene a la línea media del resorte. El par torsor  $PR$  origina una fatiga cortante máxima, que aplicando la ecuación (149), será

$$\tau_1 = \frac{16PR}{\pi d^3}, \tag{a}$$

donde  $d$  es el diámetro de la sección recta  $mn$  de la espira. A esta fatiga debida a la torsión debe superponerse la debida

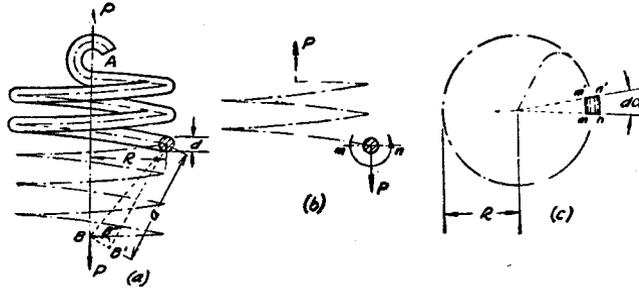


FIG. 232

a la fuerza cortante  $P$ . En primera aproximación, se supone que esta fuerza cortante se distribuye de modo uniforme en la sección recta. La fatiga cortante correspondiente será

$$\tau_2 = \frac{4P}{\pi d^2}. \tag{b}$$

En el punto  $m$ , las direcciones de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  coinciden y, por tanto, la fatiga cortante máxima que se presenta precisamente en ese punto tiene por valor

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( l + \frac{d}{4R} \right). \tag{157}$$

Como se ve fácilmente, el segundo término del paréntesis que representa el efecto de la fuerza cortante aumenta con la relación  $\frac{d}{R}$  y tiene una importancia grande y no puede despreciarse en el caso de resortes pesados tales como los que se emplean en los coches de ferrocarril. Debido a este término, los puntos, tales como  $m$  del lado interno de la espira, están en peo-

res condiciones de trabajo que los puntos tales como  $n$ . En los ensayos realizados con resortes pesados se ha visto que los fallos del material se producen de ordinario en el lado interno de las espiras.

Hay, además, otra razón por la que la fatiga máxima se produce en el lado interno de la espira.

Al calcular la fatiga debida a la torsión, hemos usado la ecuación (a) obtenida para barras cilíndricas. En realidad, cada elemento del resorte estará en las condiciones de la figura 233.

Se ve que si la sección recta  $bf$  gira con relación a la  $ac$ , por efecto de la torsión, el desplazamiento del punto  $b$  con relación al  $a$  será el mismo que el del punto  $f$  con relación al  $c$ . Debido a que la distancia  $ab$  es más pequeña que la  $cf$ , la distorsión en el lado interno  $ab$  será mayor que en el

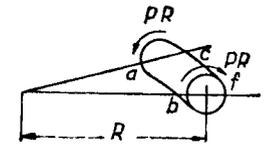


FIG. 233

lado exterior  $cf$  y, por consiguiente, la fatiga producida por el par  $PR$  será mayor en  $b$  que en  $f$ . Tomando este efecto en consideración y añadiendo el efecto de la fuerza cortante<sup>1</sup> se sustituye la ecuación (157) por la siguiente para el cálculo de la fatiga cortante máxima

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right) \tag{158}$$

en la que

$$m = \frac{2R}{d}.$$

Puede verse que el factor de corrección, cantidad dentro del paréntesis, aumenta al disminuir  $m$ ; por ejemplo, en el caso  $m = 4$  este factor vale, aproximadamente, 1,40, y para  $m = 10$  su valor es 1,14.

Para el cálculo de la deformación del resorte se tiene en cuenta solamente, en los cálculos ordinarios, el efecto de la torsión

<sup>1</sup> Estas investigaciones fueron hechas por V. Roever, *V. D. I.*, vol. 57, pág. 1906, 1913; también A. M. Wahl, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 1928. Este último determina también experimentalmente las fatigas mediante medidas hechas en la superficie de la espira. Ver también la publicación de J. R. Finnicome, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, vol. 6 A, pág. 188, 1939.

de las espiras. El ángulo de torsión de un elemento situado entre dos secciones adyacentes  $mn$  y  $m'n'$  —fig. 232 (c)—, se obtendrá usando la ecuación (148), en la que en lugar de  $l$  se pone  $Rd\alpha$ ; dicho ángulo será

$$d\varphi = \frac{PRRd\alpha}{I_p G}.$$

Debido a esta torsión, el trozo inferior del resorte gira con relación al centro de  $mn$  —fig. 232 (a),— y el punto de aplicación  $B$  de la fuerza  $P$  describe el arco infinitesimal  $BB' = ad\varphi$ . La componente vertical de este desplazamiento es

$$B'B'' = BB' \frac{R}{a} = Rd\varphi = \frac{PR^3 d\alpha}{I_p G}. \quad (c)$$

La deformación completa del resorte se obtiene sumando las deformaciones  $B'B''$  debidas a cada elemento  $mm'n'$ , a lo largo de la longitud del resorte. De este modo se obtiene

$$\delta = \int_0^{2\pi n} \frac{PR^3}{I_p G} d\alpha = \frac{64nPR^3}{d^4 G}, \quad (159)$$

donde  $n$  representa el número de espiras.

Para un resorte de sección recta distinta de la circular, puede utilizarse el método anterior para el cálculo de las fatigas y deformaciones, si en lugar de las ecuaciones (148) y (149) se toman las correspondientes a la forma de sección de que se trate. Por ejemplo, en el caso de sección rectangular deberán usarse las ecuaciones (155) y (156).

### Problemas

1. Determinar la fatiga máxima y el alargamiento de un resorte helicoidal (fig. 232), si  $P = 125$  kg.,  $R = 10$  cm.,  $d = 2$  cm. el número de espiras es 20 y  $G = 8 \times 10^5$  kg./cm.<sup>2</sup>.

*Solución:* En la ecuación (158),  $m = 10$  y

$$\tau_{\max} = \frac{16 \times 125 \times 10}{\pi \times 2^3} \times 1,14 = 907 \text{ kg./cm.}^2,$$

$$\delta = \frac{64 \times 20 \times 125 \times 10^3}{2^4 \times 8 \times 10^5} = 12,5 \text{ cm.}$$

2. Resolver el problema anterior suponiendo que la espira tiene sección cuadrada de 2 cm. de lado,

*Solución:* Suponiendo que el factor de corrección debido a la fuerza cortante y a la curvatura de las espiras —véase ecuación (158)— es, como en el caso anterior, 1,14, por la ecuación (155) se obtiene:

$$\tau_{\max} = \frac{PR}{0,208 \times 2^3} \times 1,14 = 856 \text{ kg./cm.}^2.$$

Para calcular el alargamiento, debemos poner 0,141  $d^4$  —véase ecuación (156)— en lugar de  $\frac{\pi d^4}{32}$  en la ecuación (159); por tanto,

$$\delta = 8,7 \text{ cm.}$$

3. Comparar los pesos de dos resortes helicoidales, uno de sección circular y el otro de sección cuadrada, proyectados para las condiciones establecidas en el problema 1 y que sufran la misma fatiga máxima. En ambos casos el factor de corrección se tomará 1,14. Comparar las deformaciones de los dos resortes.

*Solución:* La longitud del lado de la sección cuadrada se hallará por la ecuación

$$\frac{\pi d^3}{16} = 0,208 b^3,$$

de donde

$$b = \sqrt[3]{0,944} d = 0,981 d.$$

Los pesos de los resortes están en la misma relación que las áreas de las secciones rectas, es decir, en la relación

$$\frac{\pi d^2}{4} : 0,981^2 d^2 = 0,816.$$

Las flechas de los dos resortes están en la relación

$$0,141 b^4 : \frac{\pi d^4}{32} = 0,141 \times 0,926 : \frac{\pi}{32} = 1,33.$$

4. ¿Cómo se distribuirá la carga  $P$  entre los dos extremos del resorte helicoidal de la figura 234, si el número de espiras por encima del punto de aplicación de la carga es 6 y el de espiras situadas por debajo es 5?

*Respuesta:*

$$R_1 : R_2 = 5 : 6.$$

5. Dos resortes helicoidales del mismo material, de la misma sección recta circular y de la misma longitud, dispuestos como indica la figura 235, están comprimidos entre dos planos paralelos. Determinar la fatiga máxima en cada uno si  $d = 1,5$  cm. y  $P = 60$  kg.

*Solución:* De la ecuación (159) se deduce que la carga  $P$  se distribuye entre los dos resortes en razón inversa de los cubos de los radios

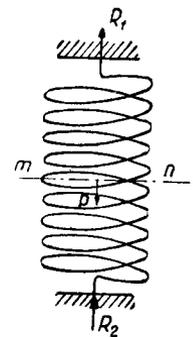


FIG. 234

de la espira, es decir, las fuerzas de compresión en los resortes exterior e interior están en la relación 27 : 64. Las fatigas máximas en los resortes son —ecuación (158)— 164 kg./cm.<sup>2</sup> y 314 kg./cm.<sup>2</sup>.



FIG. 235

es  $n$  y la proyección horizontal de la línea media del resorte es una espiral de ecuación.

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}$$

*Solución:* Un punto  $A$  del resorte, determinado por un valor particular del ángulo  $\alpha$ , está a una distancia del eje del resorte

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}$$

El momento de torsión correspondiente es

$$M_t = P \left( R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n} \right)$$

El máximo momento torsor corresponde a  $\alpha = 2\pi n$  y vale  $PR_2$ .

El valor límite de  $P$ , deducido de la ecuación (158), será:

$$P = \frac{2,700 \times \pi \times 2,5^3}{16 \times 20 \times 1,09} = 380 \text{ kg.}$$

La deformación del resorte se obtendrá por la ecuación (c) (véase pág. 266) del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{32P}{\pi d^4 G} \int_0^{2\pi n} \left[ R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n} \right]^3 d\alpha \\ &= \frac{16Pn}{d^4 G} (R_1^2 + R_2^2) (R_1 + R_2). \end{aligned}$$

8. Determinar el área de la sección recta que deben tener las espiras de un resorte cónico, proyectado para las condiciones del probl

6. ¿Cuál es la carga límite para el resorte del problema 1, si la fatiga de trabajo es  $\tau_t = 1.400 \text{ kg./cm.}^2$ ? ¿Cuál será la deformación del resorte para esta carga límite?

*Respuesta:*

$$192 \text{ kg.}; \delta = 19,2 \text{ cm.}$$

7. Un resorte cónico (fig. 236) está sometido a la acción de dos fuerzas axiales de valor  $P$ . Determinar el valor admisible de  $P$  para una fatiga de trabajo  $\tau_t = 2.700 \text{ kg./cm.}^2$ . Datos complementarios: diámetro de la sección recta,  $d = 2,5 \text{ cm.}$ ; radio del cono en la parte superior del resorte,  $R_1 = 5 \text{ cm.}$ ; ídem en la base,  $R_2 = 20 \text{ cm.}$  Determinar el alargamiento del resorte si el número de espiras

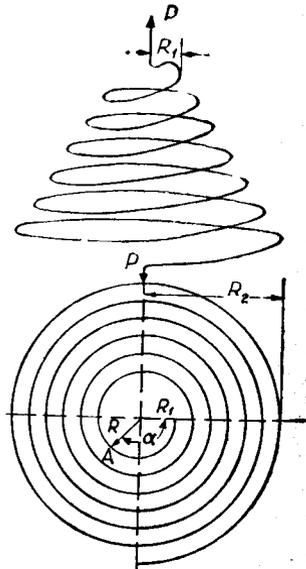


FIG. 236

ma anterior, pero de sección cuadrada. Tómese 1,09 como factor de corrección.

*Respuesta:*

$$b^2 = 5,76 \text{ cm.}^2$$

62. **Flexión y torsión combinadas en ejes circulares.**—En el análisis del problema de la torsión hecho anteriormente (véase página 254) se supuso que el eje estaba sometido a torsión simple. En las aplicaciones prácticas son frecuentes los casos en que un momento torsor y otro flector actúan simultáneamente. Las fuerzas transmitidas a un eje por una polea o un volante producen corrientemente torsión y flexión a la vez. Un caso sencillo de este género es el de la figura 237. Un eje circular empotrado en un extremo y cargado en el otro con una fuerza vertical  $P$  a la distancia  $R$  del eje. Este caso se reduce a una torsión produ-

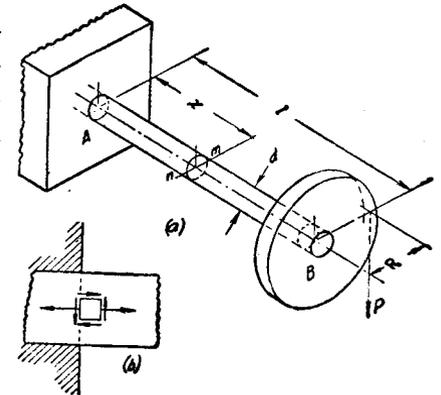


Fig. 237

cida por un momento  $M_t = PR$  y a la acción de una fuerza transversal  $P$  en el extremo libre<sup>1</sup>. El momento torsor es constante a lo largo del eje y el momento flector debido a  $P$  para una sección a la distancia  $x$  del empotramiento vale

$$M = -P(l - x). \tag{a}$$

Para analizar la fatiga máxima producida en el eje es necesario considerar: 1.º, las fatigas cortantes debidas al momento torsor  $M_t$ ; 2.º, las fatigas normales debidas al momento flector (a), y 3.º, las fatigas cortantes debidas a la fuerza cortante  $P$ . La fatiga máxima por torsión se presenta en la circunferencia del eje y vale

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}. \tag{b}$$

<sup>1</sup> El peso del eje y el de la polea se desprecian en este problema.

La fatiga normal máxima debida a la flexión acontece en las fibras más alejadas de la línea neutra de la sección empotrada, puesto que para ella el momento flector es máximo, y tiene por valor

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = \frac{M}{Z} = \frac{32M}{\pi d^3}. \quad (c)$$

La fatiga debida a la fuerza cortante tiene corrientemente una importancia secundaria. Su valor máximo tiene lugar en la línea neutra de las secciones, allí donde son cero las fatigas de flexión; por consiguiente, la fatiga combinada máxima se presenta en el punto donde son máximas las fatigas (1) y (2), es decir, en los puntos más alto y más bajo de la sección de empotramiento. En la figura 237 (b) se ve un elemento correspondiente a la parte más alta de la sección de empotramiento y sobre el que se indica el modo de actuar las fatigas. Las fatigas principales correspondientes a este elemento serán (ecuaciones (72) y (73), pág. 118):

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2},$$

utilizando las ecuaciones (b) y (c),

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{2Z} (M + \sqrt{M^2 + M_t^2}) = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + M_t^2}). \quad (160)$$

Del mismo modo, empleando la ecuación (73),

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{1}{2Z} (M - \sqrt{M^2 + M_t^2}) = \frac{16}{\pi d^3} (M - \sqrt{M^2 + M_t^2}). \quad (160')$$

Puede observarse que  $\sigma_{\text{máx}}$  tiene el mismo valor que en un caso de flexión simple para el que el momento flector equivalente fuese

$$M_{\text{equiv}} = \frac{1}{2} (M + \sqrt{M^2 + M_t^2}).$$

La fatiga cortante máxima para el elemento considerado figura 237 (b)—, deducida de la ecuación (34), será

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_t^2}. \quad (161)$$

Para metales dúctiles, como los que ordinariamente se usan en la fabricación de ejes, es norma corriente utilizar la fatiga cortante máxima para la determinación del diámetro del eje. Llamando  $\tau_t$  a la fatiga de trabajo y sustituyendo su valor en lugar de  $\tau_{\text{máx}}$  en la ecuación (161), el diámetro del eje vendrá dado por la expresión

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_t} \sqrt{M^2 + M_t^2}}. \quad (162)$$

Todo lo anteriormente expuesto puede aplicarse al caso de un eje hueco cuyo diámetro exterior sea  $d$  y de un diámetro interior  $d_1$ . En este caso,

$$Z = \frac{\pi (d^4 - d_1^4)}{32d} = \frac{\pi d^3}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d} \right)^4 \right],$$

y haciendo  $\frac{d_1}{d} = n$ , las ecuaciones (160) y (160') se transformarán en

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - n^4)} (M + \sqrt{M^2 + M_t^2}), \quad (163)$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - n^4)} (M - \sqrt{M^2 + M_t^2}) \quad (164)$$

para el caso de un eje hueco.

La fatiga cortante máxima será

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16}{d^3 (1 - n^4)} \sqrt{M^2 + M_t^2}, \quad (165)$$

y  $d$  se calcula por la fórmula

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_t (1 - n^4)} \sqrt{M^2 + M_t^2}}. \quad (166)$$

Si sobre el eje actúan varias fuerzas transversales análogas a la de la figura 237, el momento flector total  $M$  y el torsor  $M_t$ , en cada sección, son los que deben tenerse en cuenta para el cálculo de dicha sección mediante las ecuaciones (162) ó (166). Si las fuerzas transversales que actúan sobre el eje no son paralelas, los momentos flectores debidos a ellas deben sumarse

vectorialmente para obtener el momento resultante  $M$ . El problema número 3, que veremos a continuación, se refiere a un caso de esta naturaleza.

### Problemas

1. Un eje circular de 6,25 cm. de diámetro soporta una polea de 250 kg. de peso y 75 cm. de diámetro (fig. 238). Determinar la fatiga cortante máxima en la sección  $mn$  si las tensiones horizontales en los

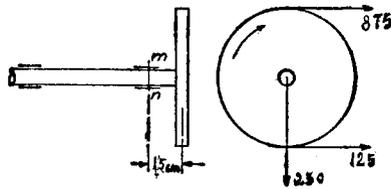


FIG. 238

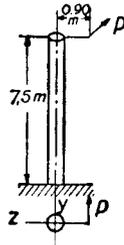


FIG. 239

ramales superior e inferior de la correa son 875 kg. y 125 kg., respectivamente.

*Solución:* En la sección  $mn$ ,

$$M_t = (875 - 125) \times 37,5 = 28.125 \text{ kg. cm.}$$

$$M = 15 \sqrt{250^2 + 1.000^2} = 15.462,5 \text{ kg. cm.}$$

Por consiguiente, mediante la ecuación (161),

$$\tau_{\text{máx}} = 669,6 \text{ kg./cm.}^2$$

2. Un tubo vertical (fig. 239) está sometido a la acción de una fuerza horizontal  $P = 125 \text{ kg.}$ , que se aplica a una distancia del eje del tubo igual a 90 cm. Determinar  $\sigma_{\text{máx}}$  y  $\tau_{\text{máx}}$  si la longitud del tubo es 7,5 m. y el momento resistente de la sección  $Z = 156,25 \text{ cm.}^3$ .

*Solución:* En la sección de empotramiento se tiene  $M_t = 125 \times 90 = 11.250 \text{ kg. cm.}$ ,  $M = 125 \times 750 = 93.750 \text{ kg. cm.}$  Aplicando la ecuación (163),

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{312,5} (93.750 + \sqrt{93.750^2 + 11.250^2}) = 602,4 \text{ kg./cm.}^2$$

por la ecuación (165):

$$\tau_{\text{máx}} = 302,4 \text{ kg./cm.}^2$$

3. Determinar el diámetro de un eje circular de sección uniforme (fig. 240) capaz de soportar dos poleas iguales de 75 cm. de diámetro

tro cada una. Las tensiones en los ramales de ambas poleas son los representados en la figura. Se tomará  $\tau_t = 480 \text{ kg./cm.}^2$ .

*Solución:* Las secciones más castigadas son  $mn$  y  $m_1n_1$ , puesto que soportan la totalidad del momento torsor y los mayores momentos flectores. El momento torsor para ambas secciones es  $M_t = (750 - 250) \times 37,5 = 18.750 \text{ kg. cm.}$  El momento flector en  $mn$  es  $(750 + 250 + 250) \times 15 = 18.150 \text{ kg. cm.}$  El momento flector en  $m_1n_1$  en el plano horizontal es

$$\frac{1}{4} (750 + 250) \times 75 = 18.750 \text{ kg. cm.}$$

El momento flector para la misma sección recta en el plano vertical es

$$\frac{250 \times 75}{4} - \frac{1.250 \times 15 \times 37,5}{75} = -4.687,5 \text{ kg. cm.}$$

El momento resultante para la sección  $m_1n_1$  es

$$M = \sqrt{18.750^2 + 4.687,5^2} = 19.325 \text{ kg. cm.}$$

Como se ve, es mayor que el momento correspondiente a la sección  $mn$ , y deberá, por consiguiente utilizarse en unión del valor  $M_t$  para el cálculo del diámetro  $d$  del eje —ecuación (162)—, de donde

$$d = 6,57 \text{ cm.}$$

4. Determinar el diámetro del eje de la figura 238 si la fatiga cortante de trabajo debe ser  $\sigma_t = 480 \text{ kg./cm.}^2$ .

5. Determinar el diámetro exterior de un eje hueco si  $\tau_t = 480 \text{ kg./cm.}^2$ ,  $\frac{d_1}{d} = \frac{1}{3}$  y las dimensiones y fuerzas restantes las de la figura 240.

6. Resolver el problema 3 suponiendo que sobre la polea de la derecha actúa, en lugar de las tensiones verticales de 750 y 250 kg., una fuerza horizontal, tangente al perímetro, que produce el mismo momento torsor.

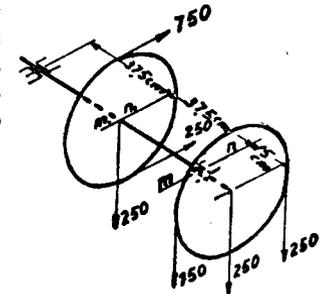


FIG. 240

energía total  $U$  almacenada en la barra durante la deformación. Por consiguiente,

$$U = \frac{P\delta}{2} \tag{167}$$

Utilizando la ecuación (1), se obtienen las dos expresiones siguientes para la energía de deformación de una barra prismática:

$$U = \frac{P^2 l}{2 AE}, \tag{168}$$

$$U = \frac{AE\delta^2}{2l} \tag{169}$$

En la primera de ellas, la energía de deformación viene en función de las características geométricas y elásticas de la barra y de la carga  $P$  y en la segunda se expresa como una función de las mismas características y del alargamiento  $\delta$ .

En las aplicaciones prácticas, la energía de deformación por unidad de volumen tiene gran importancia, y su valor, deducido de las ecuaciones (168) y (169), será

$$w = \frac{U}{Al} = \frac{\sigma^2}{2E}, \tag{170}$$

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2}, \tag{171}$$

donde  $\sigma = \frac{P}{A}$  es la fatiga de extensión y  $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$  es el alargamiento unitario.

La cantidad de energía de deformación que por unidad de volumen puede almacenar una barra sin deformación permanente<sup>1</sup> se halla sustituyendo el límite de elasticidad del material en lugar de  $\sigma$ , en la ecuación (170). Un acero con un límite de elasticidad de 2.000 kg./cm.<sup>2</sup> y  $E = 2 \times 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup> da  $w = 1$  kgcm./cm.<sup>3</sup>, una goma con un módulo de elasticidad  $E = 10$  kg./cm.<sup>2</sup> y un límite de elasticidad de 20 kg./cm.<sup>2</sup> da

$$w = \frac{20^2}{2 \times 10} = 20 \text{ kgcm./cm.}^3.$$

<sup>1</sup> Esta cantidad se denomina por algunos autores «módulo de resiliencia».

CAPÍTULO X

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

63. Energía elástica de deformación en la tracción.—Al analizar la extensión simple de una barra (véase fig. 1), se vió que durante el alargamiento bajo la acción de una carga creciente se gastaba trabajo y que este trabajo se transformaba

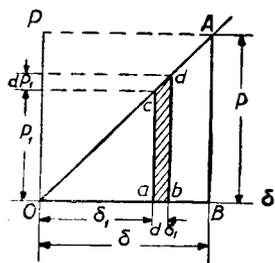


FIG. 241

parcial o totalmente en energía potencial de deformación. Si la deformación no alcanza el límite elástico, el trabajo realizado por la fuerza exterior se transforma por completo en energía potencial y puede recobrase realizando una descarga gradual de la barra deformada.

Si el valor final de la carga es  $P$  y el alargamiento correspondiente  $\delta$ , el diagrama de ensayo a la extensión tendrá la

forma indicada en la figura 241, en la que las abscisas son los alargamientos y las ordenadas las cargas correspondientes.  $P_1$  representa un valor intermedio de la carga;  $\delta_1$ , el alargamiento debido a él. Un aumento  $dP_1$  de la carga origina un incremento  $d\delta_1$  en el alargamiento. El trabajo realizado por  $P_1$  durante este alargamiento es  $P_1 d\delta_1$ , representado en la figura por el área rayada. Si se tiene en cuenta el aumento de  $P_1$  durante el alargamiento, el trabajo realizado estará representado por el área del trapecio  $abcd$ . El trabajo total realizado al aumentar la carga desde  $O$  a  $P$  es la suma de áreas elementales análogas y vendrá dado por el área del triángulo  $OAB$ . Dicha área representa la

Tiene, a veces, gran interés conocer el máximo de la energía de deformación por unidad de peso  $w_1$  que un material puede almacenar sin que se produzca deformación permanente. Esta cantidad se calcula por la ecuación (170), poniendo, en vez de  $\sigma$ , el límite de elasticidad y dividiendo  $w$  por el peso de un  $\text{cm.}^3$  del material. En la tabla que sigue se exponen algunos datos de esta naturaleza:

Material	Densidad	$E$ kg./cm. <sup>2</sup>	Límite de elasticidad en kg./cm. <sup>2</sup>	$w$ por cm. <sup>3</sup>	$w_1$ por kg.
Acero corriente ...	7,8	$2 \times 10^6$	2.000	1 kg./cm. <sup>3</sup>	128 kg./cm.
Acero duro..	7,8	$2 \times 10^6$	8.000	16 » »	2051 » »
Cobre.....	8,5	$1 \times 10^6$	300	0,045 » »	5,3 » »
Roble.....	1,0	$10^5$	300	0,45 » »	450 » »
Goma .....	0,93	10	20	20 » »	21505 » »

Se observará que la cantidad de energía que puede almacenar un determinado peso de goma es unas diez veces mayor que la que puede almacenar el mismo peso de acero para resortes y unas 200 veces mayor que la que es capaz de almacenar el mismo peso de un acero corriente.

**Problemas**

1. Una barra prismática de acero de 28 cm. de largo y 25 cm.<sup>2</sup> de sección recta se comprime con una fuerza  $R = 2.000$  kg. Determinar la energía de deformación.

Respuesta:

$$U = 1 \text{ kg. cm.}$$

2. Determinar la energía de deformación en el problema anterior si el área de la sección recta de la barra es 12,5 cm.<sup>2</sup>, en lugar de 25 cm.<sup>2</sup>.

Respuesta:

$$U = 2 \text{ kg. cm.}$$

3. Determinar la energía de deformación en una barra vertical de acero y sección uniforme deformada por su propio peso si la longitud de la barra es 30 m., el área de su sección recta es 6,25 cm.<sup>2</sup> y el peso del acero por m.<sup>3</sup>, 7.800 kg.

Respuesta:

$$U = 1,158 \text{ kg. cm.}$$

4. Determinar la energía de deformación en el problema anterior si además del peso propio tiene la barra una carga axial  $P = 500$  kg. aplicada en su extremo.

Respuesta:

$$U = 41,37 \text{ kg. cm.}$$

5. Encontrar la solución del problema representado en la figura 15 para el caso en que todas las barras tengan la misma sección y el mismo módulo, igualando la energía de deformación del sistema al trabajo suministrado por la carga  $P$ .

Solución: Siendo  $X$  la fuerza en la barra vertical, su alargamiento será  $\frac{Xl}{AE}$  y el trabajo suministrado por  $P$  es  $\frac{1}{2} P \times \frac{Xl}{AE}$ . Igualando esta expresión a la energía de deformación, se obtiene

$$\frac{1}{2} P \frac{Xl}{AE} = \frac{X^2 l}{2AE} + 2 \frac{(X \cos^2 \alpha)^2 l}{2AE \cos^2 \alpha}$$

de donde

$$X = \frac{P}{1 + 2\cos^3 \alpha}$$

lo que reproduce la solución ya encontrada.

6. Comprobar el problema 2, página 9, mostrando que el trabajo suministrado por la carga es igual a la energía de deformación de las dos barras.

7. Una barra de acero de 75 cm. de longitud y 6,25 cm.<sup>2</sup> de sección recta se deforma 0,05 cm.

Hallar el valor de la energía de deformación.

Respuesta: Por la ecuación (169),

$$U = \frac{(0,05)^2 \times 2 \times 10^6 \times 6,25}{2 \times 75} = 208,3 \text{ kg./cm.}$$

8. Comparar los valores de la energía de deformación en las dos barras circulares de la figura 242 (a) y (b), suponiendo una distribución uniforme de fatigas en las secciones rectas de las barras.

Solución: La energía de deformación de la barra prismática es

$$U = \frac{P^2 l}{2AE}$$

La energía de deformación de la otra barra es

$$U_1 = \frac{P^2 \frac{1}{4} l}{2AE} + \frac{P^2 \frac{3}{4} l}{8AE} = \frac{7}{16} \frac{P^2 l}{2AE}$$

Por consiguiente,

$$U_1 : U = \frac{7}{16}$$

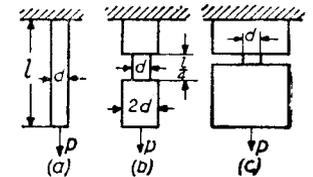


FIG. 242

Para una fatiga máxima, dada la cantidad de energía almacenada en una barra con garganta, es menor que la que almacena una barra de sección uniforme. Es necesaria una cantidad muy pequeña de trabajo para que la fatiga alcance un límite peligroso en una barra que tenga una garganta muy estrecha y un gran diámetro exterior, tal como la representada en la figura 242 (c).

64. **Fatigas producidas por choque.**—Un modo sencillo de producir tracción por choque es el representado en la figura 243. Un peso  $W$  cae desde una altura  $h$  sobre el tetón  $mn$  y por choque produce extensión en la barra  $AB$ . Si las masas de la barra y el tetón son pequeños comparados con la masa que produce el choque, se puede obtener una solución del problema bastante aproximada, despreciando la masa de la barra y suponiendo que el peso de dicha barra no realiza trabajo durante el choque. Después del choque, el conjunto tetón y cuerpo  $W$  se desplaza hacia abajo, ocasionando la extensión de la barra. Debido a la resistencia de la

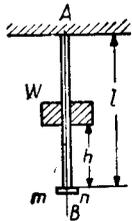


FIG. 243

barra, la velocidad de movimiento del cuerpo disminuye hasta anularse. En este momento, el alargamiento de la barra y las fatigas de extensión correspondientes alcanzan un valor máximo, y estos valores máximos pueden calcularse con facilidad en la hipótesis de que el trabajo total suministrado por el peso se transforma en energía de deformación de la barra<sup>1</sup>. Si  $\delta$  representa el alargamiento máximo, el trabajo suministrado por  $W$  será  $W(h + \delta)$ . La energía de deformación de la barra viene dada por la ecuación (169). Por consiguiente, la ecuación para el cálculo de  $\delta$  será

$$W(h + \delta) = \frac{AE}{2l} \delta^2, \quad (a)$$

de donde

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g} \delta_{st} v^2}, \quad (172)$$

siendo

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE}$$

<sup>1</sup> En los casos prácticos parte de la energía se pierde y el alargamiento real es menor que el calculado con la hipótesis admitida.

la deformación estática de la barra por la acción de la carga  $W$  y  $v = \sqrt{2gh}$  la velocidad de caída del cuerpo en el momento del choque con el tetón  $mn$ . Si la altura  $h$  es grande, comparada con  $\delta_{st}$ , la ecuación (172) puede escribirse de modo aproximado

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{st} v^2}.$$

La fatiga de extensión correspondiente que se produce en la barra es

$$\sigma = \frac{\delta E}{l} = \frac{E}{l} \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{st} v^2} = \sqrt{\frac{2E}{Al} \frac{Wv^2}{2g}}. \quad (173)$$

La expresión subradical es directamente proporcional a la energía cinética de caída del cuerpo y al módulo de elasticidad del material de la barra e inversamente proporcional al volumen  $Al$  de la barra. Por consiguiente, la fatiga puede disminuirse no sólo aumentando la sección transversal de la pieza, sino también aumentando su longitud o haciéndola de otro material de menor módulo,  $E$ . Esto marca una diferencia esencial respecto a la fatiga estática, que, como sabemos, es independiente de la longitud de la barra y del módulo  $E$ .

Poniendo, en vez de  $\sigma$ , en la ecuación (173), la  $\sigma_t$  escogida para fatiga de trabajo, la relación que determina las dimensiones de una barra sometida a choque será

$$Al = \frac{2E}{\sigma_t^2} \frac{Wv^2}{2g}, \quad (174)$$

es decir, para un material dado el volumen de la barra debe ser proporcional a la energía cinética de caída del cuerpo si se quiere tener una fatiga máxima constante. Consideremos ahora el caso extremo de anularse  $h$ , es decir, el peso  $W$  se aplica de modo súbito sobre el tetón  $mn$ , sin velocidad inicial. A pesar de no existir en este caso energía cinética al comienzo de la extensión de la barra, el problema es diferente al de una carga estática o gradual de la barra. En el caso de una aplicación estática, se supone que la carga se aplica gradualmente y que, por consiguiente, hay siempre equilibrio entre la carga que actúa y las fuerzas elásticas resistentes de la barra. La cuestión de la energía cinética

no lo es todo, por consiguiente, en el problema que examinamos. En el caso de una aplicación súbita de la carga, el alargamiento de la barra y la fatiga subsiguiente son nulos al principio de la deformación y la carga súbitamente aplicada  $W$  empieza a moverse por la acción de su propio peso. Durante este movimiento, las fuerzas resistentes de la barra crecen de un modo gradual, hasta que equilibran a  $W$ , cuando el desplazamiento del peso es  $\delta_{st}$ . Pero en este momento la carga tiene cierta energía cinética adquirida durante el recorrido  $\delta_{st}$  y, por consiguiente, continúa su movimiento hacia abajo hasta que su velocidad quede

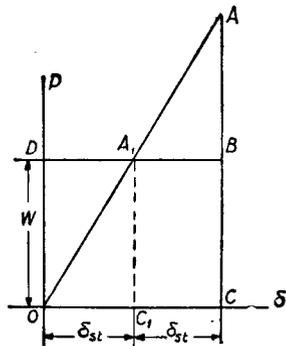


FIG. 244

anulada por la acción de las fuerzas resistentes de la barra. El alargamiento máximo determinado por esta condición se obtiene de la ecuación (172), poniendo en ella  $v = 0$ . Se tiene

$$\delta = 2\delta_{st}, \quad (175)$$

es decir, una carga súbitamente aplicada; debido a las condiciones dinámicas, produce una deformación doble que la que produciría la misma carga aplicada de modo gradual.

El resultado obtenido puede encontrarse también de modo gráfico (fig. 244). La línea inclinada  $OA$  es el diagrama alargamiento-carga para la barra de la figura 243. Por consiguiente, para un alargamiento cualquiera, tal como  $OC$ , el área  $AOC$  da la energía de deformación correspondiente de la barra. La línea horizontal  $DB$ , a la distancia  $W$  del eje  $\delta$ , determina el rectángulo  $ODBC$ , cuya área representa el trabajo suministrado por la carga  $W$  a lo largo del desplazamiento  $OC$ . Cuando  $\delta$  es igual a  $\delta_{st}$ , el trabajo suministrado será el representado por el área del rectángulo  $ODA_1C_1$ . En el mismo instante, la energía almacenada por la barra viene dada por el área del triángulo  $OA_1C_1$ , que, como se ve, es solamente la mitad del área del rectángulo anterior. La otra mitad del trabajo suministrado la conserva el cuerpo de peso  $W$  en forma de energía cinética. Debido a esta velocidad adquirida, el cuerpo continuará su movimiento y no se para hasta una distancia  $\delta = 2\delta_{st}$  del punto de partida.

En este momento el trabajo total suministrado por el peso  $W$ , representado por el rectángulo  $ODBC$ , es igual a la energía de deformación almacenada en la barra y representada por el triángulo equivalente  $OAC$ .

El estudio anterior del choque se basa en la hipótesis de que las fatigas que acontecen en la barra permanecen siempre por debajo del límite de elasticidad del material. Pasado este límite, el alargamiento de la barra no es proporcional a la fuerza extensora. Suponiendo que el diagrama alargamiento-carga no dependa de la velocidad de la deformación de la barra<sup>1</sup>, puede determinarse el alargamiento correspondiente a un caso de choque, aunque dicho alargamiento sobrepase del límite de elasticidad, utilizando el diagrama normal de ensayo a tracción del material (fig. 245). Para un alargamiento máximo dado  $\delta$ , el área correspondiente  $OADF$  representa el trabajo que es necesario suministrar para producir tal alargamiento,

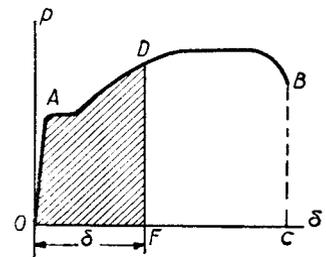


FIG. 245

y este trabajo debe ser igual al trabajo  $W(h + \delta)$  producido por el peso  $W$ . Cuando  $W(h + \delta)$  sea igual o mayor que el área total  $OABC$  del diagrama de ensayo, la carga dinámica producirá la rotura de la barra.

De lo expuesto se deduce que cualquier cambio en la forma de la barra que origine una disminución del área total  $OABC$  del diagrama disminuye al mismo tiempo la capacidad de resistencia de la barra al choque. En las piezas con garganta de las figuras 242 (b) y (c), por ejemplo, el período plástico del material se concentrará en la garganta y el alargamiento total y el trabajo necesario para producir la rotura será mucho menor que en el caso de la barra cilíndrica de la misma figura.

Las piezas de esta forma son muy poco resistentes al choque, aun cuando el material sea dúctil. Todos los elementos de es-

<sup>1</sup> Los ensayos muestran que con una gran velocidad de deformación el punto de fluencia crece y es necesario mayor cantidad de trabajo para romper la probeta que en una prueba estática. Véase N. N. Davidenkoff, *Bulletin Polyt. Institute*, St. Petersburg, 1913; también Welter, *Ztschr. f. Metallkunde*, 1924.

estructura que tengan agujeros o cualquier variación brusca de sección son de modo análogo débiles al choque<sup>1</sup>. En el análisis del problema del choque que acabamos de realizar se ha despreciado la masa de la barra frente a la masa  $W$  del cuerpo que producía el choque. Únicamente de este modo puede suponerse que la energía total de caída del cuerpo se transforma en energía de deformación de la barra. El problema es bastante más complicado cuando la barra tiene una masa apreciable que toma parte en los cambios de energía del choque.

Recordemos, primeramente, que cuando una masa  $\frac{W}{g}$  se mueve con una velocidad  $v$  y choca centralmente con otra masa  $\frac{W_1}{g}$  en reposo, y la deformación en el punto de contacto es inelástica, la velocidad  $v_a$  de ambas masas después del choque es

$$v_a = \frac{W}{W + W_1} v. \quad (b)$$

En el caso de la barra de la figura 243 las condiciones del problema son más complicadas. Durante el choque, el extremo superior  $A$  queda inmóvil, mientras que el extremo inferior  $B$  adquiere la misma velocidad que el cuerpo  $W$ . Por consiguiente, para el cálculo de la velocidad final  $v_a$  por la ecuación (b) deberá utilizarse una «masa reducida», en lugar de la masa total de la barra. Suponiendo que la velocidad de la barra varíe linealmente a lo largo de su longitud, se verá que en este caso la masa reducida debe tomarse igual a un tercio de la masa total de la barra<sup>2</sup>. Para una barra de peso  $q$  por unidad de longitud, la ecuación (b) da

$$v_a = \frac{W}{W + \frac{ql}{3}} v.$$

Este valor es la velocidad común que se establece para la carga  $W$  y el extremo inferior de la barra en el primer instante

<sup>1</sup> Véase Hackstroh, *Baumaterialienkunde*, pág. 321, 1905, y H. Zimmerman, *Zentralbl. d. Bauverw.*, pág. 265, 1899.

<sup>2</sup> Esta solución fué obtenida por H. Cox, *Cambridge Phil. Soc Trans.*, pág. 73, 1849. Véase también Todhunter y Pearson, *History*, vol. 1, pág. 895.

del choque. Suponiendo plástica la deformación en la superficie de contacto entre el cuerpo que cae y el apoyo  $mn$  (fig. 243), es decir, sin rebote alguno, la energía cinética correspondiente es

$$\frac{v_a^2}{2g} \left( W + \frac{1}{3} ql \right) = \frac{Wv^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{ql}{3W}}.$$

Esta cantidad deberá sustituir a

$$\frac{Wv^2}{2g} = Wh$$

en la ecuación (a) para tener en cuenta la pérdida de energía en el primer momento del choque. Por consiguiente, en lugar de la ecuación (172), se obtendrá

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g} \delta_{st} v^2 \frac{1}{1 + \frac{ql}{3W}}}. \quad (176)$$

El método empleado da resultados tanto más satisfactorios cuanto más pequeña es la masa de la barra comparada con la masa del cuerpo que cae.

En los demás casos es necesario tener en cuenta las vibraciones longitudinales de la barra<sup>1</sup>. La deformación local en el punto de contacto durante el choque ha sido estudiada por J. E. Sears<sup>2</sup> y J. E. P. Wagstaff<sup>3</sup>.

### Problemas

1. Un peso de 5 kg. unido a un hilo de acero de 3 mm. de diámetro (figura 246) cae desde  $A$  con la aceleración  $g$ . Determinar la fatiga producida en el hilo cuando se detiene bruscamente su extremo superior  $A$ . Se despreciará la masa del hilo.

<sup>1</sup> Las vibraciones longitudinales de una barra prismática durante el choque fueron estudiadas por Navier. Una solución más racional es la dada por De Saint Venant (véase su traducción de Clebsch, *Theorie der Elasticitat fester Körper*, nota en el párrafo 61). Véase también I. Bousinesq, *Application des Potentiels*, pág. 508, y C. Ramsauer, *Ann. d. Phys.*, vol. 30, 1909.

<sup>2</sup> J. E. Sears, *Trans Cambridge Phil. Soc.*, vol. 21, pág. 49, 1908.

<sup>3</sup> J. E. P. Wagstaff, *London Royal Soc. Proc. (Serie A)*, vol. 105, página 544, 1924.

*Solución:* Si la aceleración del peso  $W$  es igual a  $g$ , no habrá fatiga alguna en el hilo durante el movimiento. La fatiga después de la detención brusca se hallará por la ecuación (173), en la que se desprecia  $\delta_{st}$ .  
Sustituyendo  $v^2 = 2gh$  y  $l = h$ , se obtiene

$$\sigma = \sqrt{\frac{2EW}{A}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 10^6 \times 5 \times 4}{3,14 \times 3^2}} = 1680 \text{ kg./cm.}^2$$

Se observará que la fatiga no depende de la altura  $h$  de caída, a causa de que la energía cinética del cuerpo aumenta en la misma proporción que el volumen del hilo.

2. Un peso  $W = 500$  kg. cae desde una altura  $h = 90$  cm. sobre un pilar vertical de madera de 6 m. de largo y 25 cm. de diámetro fijado por su extremo inferior. Determinar la fatiga máxima de compresión en el pilar, suponiendo que para la madera  $E = 1,2 \times 10^5$  kg./cm.<sup>2</sup> y despreciando la masa del pilar y la cantidad  $\delta_{st}$ .



*Respuesta:*

$$\sigma = 160 \text{ kg./cm.}^2$$

Fig. 246 3. Un peso  $W = 5.000$  kg. unido al extremo de un hilo de acero (fig. 246) desciende con una velocidad constante  $v = 90$  cm./seg. ¿Qué fatiga se producirá en él cuando su extremo superior se detenga bruscamente? La longitud libre del cable en el momento del choque es  $l = 18$  m., el área de su sección recta es  $A = 15,625$  mm.<sup>2</sup> y  $E = 1,2 \times 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup>.

*Solución:* Despreciando la masa del cable y suponiendo que la energía cinética del cuerpo en movimiento se transforma por completo en energía de deformación del cable, la ecuación que determina el alargamiento máximo del cable es

$$\frac{AE\delta^2}{2l} - \frac{AE\delta_{st}^2}{2l} = \frac{W}{2g} v^2 + W(\delta - \delta_{st}), \quad (d)$$

donde  $\delta_{st}$  representa el alargamiento estático del cable.

Teniendo en cuenta que  $W = \frac{AE\delta_{st}}{l}$  se obtiene mediante la ecuación (d),

$$\frac{AE}{2l} (\delta - \delta_{st})^2 = \frac{Wv^2}{2g},$$

de donde

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\frac{Wv^2 l}{AEg}}$$

Por consiguiente, después de la detención súbita, la fatiga de extensión del cable crece con la relación

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \frac{v}{\delta_{st}} \sqrt{\frac{Wl}{AEg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{g\delta_{st}}} \quad (e)$$

Para los datos del problema

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE} = \frac{5.000 \times 1.800}{15,625 \times 1,2 \times 10^6} = 0,48 \text{ cm.}$$

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \frac{90}{\sqrt{981 \times 0,48}} = 5,18.$$

Por consiguiente,

$$\sigma = 5,18 \frac{W}{A} = 1,656 \text{ kg./cm.}^2$$

4. Resolver el problema anterior si se interpone un resorte que alargue 1 cm. por cada 400 kg. entre el cable y la carga.

*Solución:*

$$\delta_{st} = 0,48 + \frac{5.000}{400} = 12,98 \text{ cm.}$$

Sustituyendo en la ecuación (e),

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + 0,80 = 1,80; \quad \sigma = 1,8 \frac{W}{A} = 576 \text{ kg./cm.}^2$$

5. Para el caso de la figura 243, determinar la altura  $h$  tal que la fatiga máxima en la barra durante el choque sea 2.400 kg./cm.<sup>2</sup>.

Se supone  $W = 12,5$  kg.,  $l = 1,80$  m.,  $A = 3,125$  cm.<sup>2</sup>,  $E = 2,4 \times 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup>. La masa de la barra se desprecia.

*Respuesta:*  $h = 54$  cm.

65. Energía elástica de deformación en los casos de fuerza cortante y torsión.—La energía de deformación almacenada en un elemento sometido a fatiga cortante pura

(figura 247) puede calcularse por el método empleado en el caso de extensión simple. Si se supone fija la cara inferior  $ad$  del elemento, solamente deberá considerarse como trabajo suministrado durante la deformación el que realice la fuerza  $P$  ligada a la cara superior  $bc$ . Suponiendo que el material sigue la

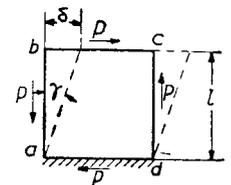


FIG. 247

ley de Hooke, la distorsión es proporcional a la fatiga cortante y el diagrama que representa dicha relación será análogo al de la figura 241. El trabajo dado por la fuerza  $P$  y almacenado en forma de energía elástica de deformación, será, por consiguiente (véase ecuación 167),

$$U = \frac{P\delta}{2} \quad (167')$$

Recordando que

$$\frac{\delta}{l} = \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{P}{AG},$$

se obtienen, deducidas de la ecuación (167'), las dos ecuaciones siguientes:

$$U = \frac{P^2 l}{2AG}, \quad (177) \quad U = \frac{AG\delta^2}{2l}. \quad (178)$$

Las expresiones correspondientes de la energía de deformación por unidad de volumen se obtendrán dividiendo estas ecuaciones por el volumen  $Al$  de la pieza

$$w = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (179) \quad w = \frac{\gamma^2 G}{2}, \quad (180)$$

donde  $\tau = \frac{P}{A}$  es la fatiga cortante y  $\gamma = \frac{\delta}{l}$  es la distorsión unitaria. La cantidad de energía de deformación por cortadura que por unidad de volumen puede almacenar la pieza sin deformación permanente se obtiene sustituyendo en la ecuación (179)  $\tau$  por el límite de elasticidad.

La energía almacenada por un eje circular sometido a torsión se calcula fácilmente por la ecuación (179). Si  $\tau_{\text{máx}}$  es la fatiga cortante en la superficie del eje, la fatiga cortante en un punto situado a la distancia  $r$  del eje será:  $\tau_{\text{máx}} \frac{2r}{d}$ , siendo  $d$  el diámetro. La energía por unidad de volumen en este punto, dada por la ecuación (179), será

$$w = \frac{2\tau_{\text{máx}}^2 r^2}{Gd^2}. \quad (a)$$

La energía almacenada por el material comprendido entre dos superficies cilíndricas de radios  $r$  y  $r + dr$  es

$$\frac{2\tau_{\text{máx}}^2 r^2}{Gd^2} l \times 2\pi r dr,$$

donde  $l$  representa la longitud del eje. Por consiguiente, la energía total almacenada en el árbol será

$$U = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{2\tau_{\text{máx}}^2 r^2}{Gd^2} l 2\pi r dr = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2 l}{4} \frac{\tau_{\text{máx}}^2}{2G}. \quad (18)$$

Esta expresión indica que la energía total de deformación es solamente la mitad de la que correspondería al caso en que todos los elementos del árbol sufriesen la misma fatiga cortante  $\tau_{\text{máx}}$ .

La energía de torsión puede calcularse mediante el diagrama de torsión (fig. 248), construido tomando el momento torsor en ordenadas y el ángulo de torsión de abscisas. Por debajo del límite de elasticidad, el ángulo de torsión es proporcional al momento torsor y el diagrama será la recta  $OA$ . El área infinitesimal rayada en la figura representa el trabajo suministrado por el momento torsor para un aumento del ángulo de torsión  $d\varphi$ . El área total  $OAB = M_t \frac{\varphi}{2}$ , representa la energía total almacenada por el eje durante la torsión. Recordando que  $\varphi = \frac{M_t l}{GI_p}$  se obtiene

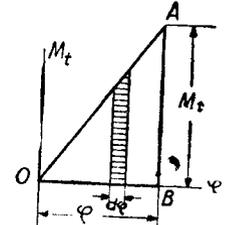


FIG. 248

$$U = \frac{M_t^2 l}{2GI_p} \quad \text{ó} \quad U = \frac{\varphi^2 GI_p}{2l}. \quad (182)$$

En la primera de las ecuaciones, la energía se expresa en función del momento torsor y en la segunda viene dada como función del ángulo de torsión.

En el caso general de que la sección tenga una forma cualquiera y el momento torsor varíe a lo largo del eje, el ángulo de torsión entre dos secciones adyacentes viene dado por la ecuación (véase pág. 263)

$$\frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{M_t}{C} dx.$$

La energía de deformación de un elemento del árbol será

$$\frac{1}{2} M_t \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{C}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$$

y la energía total de torsión es

$$U = \frac{C}{2} \int_0^l \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx. \quad (183)$$

## Problemas

1. Determinar la relación entre el límite de elasticidad por cortadura y el límite de elasticidad a la tracción si la energía de deformación que por  $\text{cm.}^3$  puede almacenar el material sin deformación permanente es la misma en tracción que en cortadura.

*Solución:* Por las ecuaciones (170) y (179) se tiene

$$\frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\tau^2}{2G},$$

de donde

$$\frac{\tau}{\sigma} = \sqrt{\frac{G}{E}}.$$

Para el acero,

$$\tau = \sigma \sqrt{\frac{1}{2,6}} = 0,62 \sigma.$$

2. Determinar la flecha de un resorte helicoidal (fig. 232), empleando el método de la energía de deformación en torsión.

*Solución:* Sea  $P$  la fuerza que actúa en la dirección del eje de la hélice (fig. 232),  $R$  el radio de las espiras y  $n$  su número. La energía de torsión almacenada por el resorte —ecuación (182)—, será

$$U = \frac{(PR)^2 2\pi Rn}{2GI_p}.$$

Igualando esta expresión al trabajo suministrado  $\frac{P\delta}{2}$ , se obtiene

$$\delta = \frac{2\pi nPR^3}{GI_p} = \frac{64nPR^3}{Gd^4}.$$

3. El peso de un resorte helicoidal de acero es 5 kg. Determina la cantidad de energía que podrá almacenarse en este resorte sin deformación permanente si el límite de elasticidad por cortadura es:

$$0,62 \times 8.000 = 4.960 \text{ kg./cm.}^2.$$

*Solución:* La energía por kg. del material será 2.051 kg. cm. Por consiguiente, la energía total de torsión<sup>1</sup> que puede almacenarse en es resorte será:

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 2051 = 5127 \text{ kg. cm.}$$

4. Un eje circular macizo y un tubo delgado del mismo material y peso están sometidos a torsión. ¿Qué relación existe entre los valores de la energía almacenada si la fatiga máxima es la misma en ambos

*Respuesta:*

$$\frac{1}{2} : 1.$$

<sup>1</sup> La distribución de fatigas se ha supuesto ser la de un eje circular sometido a torsión.

5. Un eje circular de acero con un volante en un extremo gira a 120 r. p. m. Se detiene bruscamente por el otro extremo. Determinar la fatiga máxima en el eje durante el choque si la longitud del eje es  $l = 1,5 \text{ m.}$ , el diámetro  $d = 5 \text{ cm.}$ , el peso del volante  $W = 50 \text{ kg.}$  y su radio de giro  $r = 25 \text{ cm.}$   $G = 9,2 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2$ .

*Solución:* La fatiga máxima se produce cuando la energía cinética del volante se transforma totalmente en energía de deformación por torsión del eje. La energía cinética del volante es

$$\frac{Wr^2\omega^2}{2g} = \frac{50 \times 25^2 \times (4\pi)^2}{2 \times 981} = 2562,5 \text{ kg. cm.}$$

Sustituyendo este valor de  $U$  en la ecuación (181),

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{16 \times 9,2 \times 10^6 \times 2.562,5}{\pi \times 5^2 \times 150}} = 1792 \text{ kg./cm.}^2$$

6. Dos barras circulares del mismo material y la misma longitud, pero de diferentes secciones  $A$  y  $A_1$ , están sometidos a torsión por la acción del mismo momento torsor. ¿Qué relación existe entre los valores de la energía de deformación almacenada en las dos barras?

*Respuesta:* Son inversamente proporcionales a los cuadrados de las áreas de las secciones rectas.

66. Energía elástica de deformación en la flexión.—Empezaremos por el caso de flexión pura. Para una barra prismática empotrada en un extremo y flexada (fig. 249) por un par  $M$ , aplicado en el otro, el desplazamiento angular en el extremo libre es

$$\varphi = \frac{Ml}{EI_z}.$$

(a)

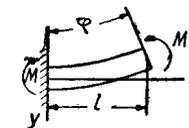


FIG. 249

Este desplazamiento es proporcional al momento flector  $M$ , y empleando un diagrama análogo al de la figura 248 puede deducirse, por un razonamiento análogo, que el trabajo suministrado durante la deformación por el momento flector  $M$ , o, lo que es lo mismo, la energía almacenada por la barra es

$$U = \frac{M\varphi}{2}. \quad (b)$$

Empleando la ecuación (a) esta energía puede expresarse por una de estas formas:

$$U = \frac{M^2 l}{2EI_z}; \quad (184) \quad U = \frac{\varphi^2 EI_z}{2l}. \quad (185)$$

A veces interesa expresar la energía potencial como una función de la fatiga normal máxima  $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z}$ . Para una sección rectangular se tendrá  $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{6M}{bh^2}$ , o  $M = \frac{bh^2\sigma_{m\acute{a}x}}{6}$ , y la ecuación (184) da

$$U = \frac{1}{3} bhl \frac{\sigma_{m\acute{a}x}^2}{2E} \tag{186}$$

En este caso se ve que la energía total es sólo la tercera parte de la que correspondería al caso de que todas las fibras sufriesen la fatiga  $\sigma_{m\acute{a}x}$ .

En el caso de flexión por fuerzas transversales a la barra despreciaremos, en principio, la energía por cortadura. La energía almacenada por un elemento de viga de longitud  $dx$  —ecuaciones (184) y (185)— será

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI_z} \quad \text{ó} \quad dU = \frac{EI_z (d\varphi)^2}{2dx}$$

El momento flector  $M$  es variable respecto a  $x$ , y

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| dx$$

(véase pág. 130). La energía total almacenada en la barra es, por consiguiente,

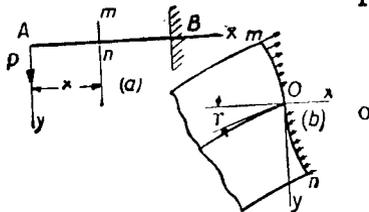


FIG. 250

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI_z} \tag{187}$$

$$U = \int_0^l \frac{EI_z}{2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \tag{188}$$

Sea, por ejemplo, el voladizo  $AB$  (fig. 250). El momento flector para una sección cualquiera  $mn$  es  $M = -Px$ . Sustituyendo en la ecuación (187), da

$$U = \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{2EI_z} = \frac{Pl^3}{6EI_z} \tag{c}$$

Para una barra rectangular,  $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{6Pl}{bh^2}$ , y la ecuación (c) puede ponerse en la forma

$$U = \frac{1}{9} bhl \frac{\sigma_{m\acute{a}x}^2}{2E} \tag{c'}$$

Esta expresión indica que la cantidad de energía que puede almacenarse en una viga rectangular en voladizo, cargada en su extremo, sin que se produzca deformación permanente, es un tercio de la que se puede almacenar por flexión pura y solamente la novena parte de la correspondiente a la extensión simple de la misma barra. Esta consideración tiene importancia en el proyecto de resortes, puesto que éstos deben absorber una cantidad dada de energía sin deterioro y deben tener el menor peso posible. La cantidad de energía que puede absorber un voladizo se aumenta haciéndolo de sección variable. Por ejemplo, un voladizo en sólido, de igual resistencia a la flexión, de sección rectangular, de altura  $h$  constante (fig. 185), tiene, para valores iguales de  $P$ ,  $h$  y  $\sigma_{m\acute{a}x}$ , una flecha  $y$ , por consiguiente, una cantidad de energía almacenada, que es sólo el 50 por 100 mayor del valor que corresponde a la barra de sección uniforme. Al mismo tiempo, el voladizo de resistencia uniforme pesa la mitad de la barra prismática, lo que en definitiva indica que puede almacenar el triple de energía por kilogramo de material.

Volviendo a la ecuación (c), e igualando la energía de deformación al trabajo suministrado por la carga  $P$  durante la deformación, se tiene

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EI_z} \tag{d}$$

de donde

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_z}$$

Este valor de la flecha coincide con el de la ecuación (95). La flecha adicional debida a las fuerzas cortantes puede determinarse también mediante la energía potencial de deformación. Para el voladizo de la figura 250, de sección rectan-

gular, la fatiga cortante a la distancia  $y$  del eje neutro es (véase ecuación 65)

$$\frac{P}{2I_z} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

La energía por cortadura en un volumen elemental  $bdxdy$ , en virtud de la ecuación (179), será

$$\frac{P^2}{8GI_z^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 bdx dy,$$

y la energía total por cortadura es

$$U = \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{P^2}{8GI_z^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 bdx dy = \frac{P^2 l h^2}{20GI_z}. \quad (e)$$

Esta energía debe añadirse al segundo miembro de la ecuación (d)<sup>1</sup> para obtener la flecha total. Se tendrá

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{Pl^3}{6EI_z} + \frac{P^2 l h^2}{20GI_z}, \quad (f)$$

y, por consiguiente,

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_z} \left( l + \frac{3}{10} \frac{h^2 E}{l^2 G} \right). \quad (g)$$

El segundo término del paréntesis representa el efecto de las fatigas cortantes en la flecha de la viga. Empleando el método desarrollado en el artículo 39, en la hipótesis de que el elemento afecto al centro de gravedad de la sección empotrada permanece vertical (fig. 250), el giro adicional debido a la cortadura será

$$\gamma = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{3}{2} \frac{P}{bhG},$$

y la flecha adicional resultará

$$\frac{3}{2} \frac{Pl}{bhG};$$

por consiguiente,

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_z} + \frac{3}{2} \frac{Pl}{bhG} = \frac{Pl^3}{3EI_z} \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{h^2}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \right). \quad (g')$$

<sup>1</sup> Como las fatigas cortantes que actúan sobre un elemento (figura 247) no modifican las longitudes de los lados del elemento, si sobre esas caras actúan fatigas normales, éstas no producen trabajo durante la distorsión. Por esta razón, la energía total es simplemente la suma de las dos cantidades de energía.

Como se ve, las ecuaciones (g) y (g') no coinciden; la diferencia se explica del modo siguiente: Las consecuencias del artículo 39 se obtuvieron en la hipótesis de que las secciones de la barra se podían alabea libremente por la acción de las fatigas cortantes. En este caso la sección empotrada deberá curvarse, tomando la forma *mon* —fig. 250 (b)—, y al calcular el trabajo total desarrollado en la ménsula debe considerarse no solamente el trabajo realizado por la fuerza  $P$  —fig. 250 (a)—, sino el que efectúan las fatigas ligadas a la sección empotrada —figura 250 (b)—. Tomando en consideración este último trabajo, la flecha calculada por medio de la energía de deformación coincide con la obtenida en el artículo 39 y dada por la ecuación (g')<sup>1</sup>.

En el caso de una viga simplemente apoyada, cargada en su centro, la sección media de la pieza no alabea por consideraciones de simetría. En este caso la ecuación (g), aplicada a cada mitad de la viga, dará un resultado más exacto para la flecha que la ecuación (g'). Puede comprobarse comparando las ecuaciones aproximadas (g) y (g') con la solución, más correcta, dada en el artículo 39.

### Problemas

1. Una viga de madera en voladizo de 1,80 de longitud y sección rectangular de 20 cm.  $\times$  12,5 cm. está sometida a la acción de una carga uniforme de  $\frac{10}{3}$  kg. por cm. Determinar la energía de deformación almacenada si  $E = 1,2 \times 10^5$  kg./cm.<sup>2</sup>.

Respuesta:

$$U = \frac{q^2 l^5}{40EI_z} = \frac{10^2 \times 180^5 \times 12}{3^2 \times 40 \times 1,2 \times 10^5 \times 12,5 \times 20^3} = 52,5 \text{ kg./cm.}$$

2. ¿En qué proporción aumenta la energía de deformación calculada en el problema anterior si la altura de la viga es 12,5 cm. y el ancho 20 cm.?

Respuesta: La energía de deformación crece en la relación  $\frac{8^3}{3^3}$ .

3. Dos barras idénticas, una apoyada y la otra con los extremos empotrados, están flexadas por la acción de cargas concentradas iguales en su sección central. ¿En qué relación están los valores de la energía de deformación almacenada?

Respuesta: 4 : 1.

4. Resolver el problema anterior para una carga uniformemente distribuida de intensidad  $q$  sobre ambas barras.

<sup>1</sup> Véase *Theory of Elasticity*, pág. 150, 1934.

5. Dos vigas de la misma longitud y sección rectangular están igualmente cargadas; las secciones tienen el mismo ancho, pero las alturas están en la relación 2 : 1. Encontrar la relación entre las cantidades de energía de deformación almacenada.

*Solución:* Para una carga dada, la energía de deformación es proporcional a la flecha y ésta es inversamente proporcional al momento de inercia de la sección. Reduciendo la altura a la mitad, se hará ocho veces mayor la cantidad de energía de deformación.

67. **Flexión producida por choque.**—La flecha dinámica de una viga, originada por el choque de un cuerpo  $W$  que cae sobre ella, se puede determinar por procedimientos análogos a los empleados en el caso de que el choque produzca extensión (artículo 64). Sea, por ejemplo, una viga simplemente apoyada, percutida en el centro (fig. 251), y supongamos que la masa de la viga puede despreciarse frente a la masa del cuerpo que choca con ella y que las fatigas que se originan están por debajo del límite de fluencia. No habrá, por consiguiente, pérdida de energía en el choque, y el trabajo suministrado por el peso  $W$  durante su caída se transformará completamente en energía de deformación por flexión de la viga<sup>1</sup>. Sea  $\delta$  la flecha máxima de la viga durante el choque. Si suponemos que la elástica de la viga durante el choque tiene la misma forma que para una deformación estática, la fuerza capaz de originar dicha flecha sería (ecuación 90)

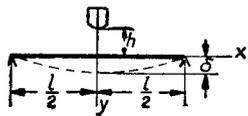


Fig. 251

Sea, por ejemplo, una viga simplemente apoyada, percutida en el centro (fig. 251), y supongamos que la masa de la viga puede despreciarse frente a la masa del cuerpo que choca con ella y que las fatigas que se originan están por debajo

del límite de fluencia. No habrá, por consiguiente, pérdida de energía en el choque, y el trabajo suministrado por el peso  $W$  durante su caída se transformará completamente en energía de deformación por flexión de la viga<sup>1</sup>. Sea  $\delta$  la flecha máxima de la viga durante el choque. Si suponemos que la elástica de la viga durante el choque tiene la misma forma que para una deformación estática, la fuerza capaz de originar dicha flecha sería (ecuación 90)

$$P = \frac{48EI_z}{l^3} \delta. \quad (a)$$

La energía total almacenada por la viga es igual al trabajo suministrado por la fuerza  $P$ , o sea

$$U = \frac{P\delta}{2} = \delta^2 \frac{24EI_z}{l^3}.$$

Si  $h$  representa, como anteriormente, la altura de caída, la ecuación por la que se determina  $\delta$  será

$$W(h + \delta) = \delta^2 \frac{24EI_z}{l^3}, \quad (b)$$

<sup>1</sup> La deformación local en la superficie de contacto de la carga y la viga se desprecia en este cálculo.

de donde

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g} \delta_{st} v^2}, \quad (189)$$

siendo

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{48EI_z} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{2gh}.$$

La ecuación (189) es de la misma forma que la que obtuvimos para el caso de extensión por choque, ecuación (172). Es interesante hacer notar que la forma de la ecuación es invariante para cualquier otro caso de choque con tal de que la flecha en el punto de choque sea proporcional a la fuerza  $P$  ejercida en dicho punto. Si representamos por  $\alpha$  el factor de proporcionalidad, cuyo valor depende de la estructura, se tendrá

$$\alpha P = \delta \quad \text{y} \quad U = \frac{P\delta}{2} = \frac{\delta^2}{2\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$W(h + \delta) = \frac{\delta^2}{2\alpha},$$

y puesto que  $\delta_{st} = W\alpha$ , esta ecuación se reduce a la ecuación (189).

La flecha  $\delta$  así calculada representa un límite superior, al que la flecha dinámica se acerca cuando no hay pérdidas de energía durante el choque. Las pérdidas de esta naturaleza reducen la flecha dinámica dada por la ecuación (189). Las fatigas correspondientes pueden hallarse multiplicando por  $\frac{\delta}{\delta_{st}}$  las fatigas obtenidas por la aplicación estática de la carga  $W$ . Cuando  $h$  es grande comparada con  $\delta_{st}$ , la ecuación (189) puede ponerse en la forma más sencilla

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{st} v^2}. \quad (c)$$

Para el caso de una viga apoyada en los extremos y percutida en el centro esta ecuación da

$$\delta = \sqrt{\frac{Wv^2}{2g} \cdot \frac{l^3}{24EI_z}}. \quad (d)$$

El momento flector máximo es en este caso

$$M_{\text{máx}} = \frac{Pl}{4} = \frac{\delta 48 EI_z l}{l^3 4}$$

y

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{Z} = \frac{\delta 48 EI_z l}{l^3 4Z}$$

Para una sección rectangular, empleando la ecuación (d),

$$\sigma_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{Wv^2}{2g} \cdot \frac{18E}{lA}} \quad (e)$$

Esta expresión indica que la fatiga máxima depende de la energía cinética del cuerpo que cae y del volumen  $lA$  de la viga.

Para determinar el efecto de la masa de la viga sobre la flecha máxima se supondrá que la elástica, durante el choque, tiene la misma forma que para una deformación estática.

Con esta hipótesis se deduce<sup>1</sup> que la masa reducida para una viga apoyada en sus extremos es  $\frac{17}{35} \frac{ql}{g}$ , y, por consiguiente, que la velocidad común que se establece al comenzar el choque es

$$v_a = \frac{W}{W + \frac{17}{35} ql} v.$$

La energía cinética total después de establecerse la velocidad común  $v_a$  es

$$\frac{v_a^2}{2g} \left( W + \frac{17}{35} ql \right) = \frac{Wv^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{ql}{W}};$$

poniendo este valor en lugar de

$$\frac{Wv^2}{2g} = Wh$$

en la ecuación (b), se obtiene

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{\delta_{st} v^2}{g \left( 1 + \frac{17}{35} \frac{ql}{W} \right)}} \quad (190)$$

<sup>1</sup> Véase publicación de Homersham Cox, mencionada anteriormente (pág. 282).

Esta expresión ya tiene en cuenta el efecto de la masa de la viga en la flecha<sup>1</sup>.

En el caso de un voladizo, si el peso  $W$  ataca a la viga en el extremo, el valor de la masa reducida de la viga es  $\frac{33}{140} \frac{ql}{g}$ .

Cuando una viga simplemente apoyada en sus extremos sufre el choque en un punto cuyas distancias a los extremos son  $a$  y  $b$ , respectivamente, la masa reducida es

$$\frac{1}{105} \left[ 1 + 2 \left( 1 + \frac{l^2}{ab} \right)^2 \right] \frac{ql}{g}$$

### Problemas

1. Una viga de madera de sección rectangular, apoyada en sus extremos y cuya longitud es 2,70 m. sufre en su centro un choque ocasionado por un peso de 20 kg. que cae desde una altura  $h = 30$  cm. Determinar el área necesaria en la sección recta si la fatiga de trabajo es  $\sigma_t = 80$  kg./cm.<sup>2</sup> y  $E = 1,2 \times 10^5$  kg./cm.<sup>2</sup>.

Solución: Empleando la ecuación (e), página 296<sup>2</sup>,

$$A = \frac{Wv^2}{2g} \cdot \frac{18E}{l\sigma_t^2} = 20 \times 30 \times \frac{18 \times 1,2 \times 10^5}{270 \times 80^2} = 750 \text{ cm.}^2$$

2. ¿En qué proporción cambia el área del problema anterior si 1.º la luz de la viga aumenta de 2,7 a 3,6 m., y 2.º, si el peso  $W$  aumenta en el 50 por 100?

Respuesta: 1.º El área disminuye en la relación 3 : 4. 2.º El área aumenta en el 50 por 100.

3. Un peso  $W = 50$  kg. cae desde una altura de 30 cm. sobre el centro de una viga de sección en I apoyada en sus extremos y cuya

<sup>1</sup> Diversos ejemplos en los que se aplica esta ecuación figuran en la publicación del profesor Tschetsche, *Zeitschr. d. Ver. d. Ing.*, página 134, 1894. Un estudio más detallado del choque transversal sobre una viga se basa en la investigación de las vibraciones laterales, unido al estudio de la deformación local en el punto de choque. Véase De Saint Venant, loc. cit., pág. 537, nota final del párrafo 61; C. R., vol. 45, página 204, 1857. Véase también S. Timoshenko, *Ztschr. f. Math. u. Phys.*, vol. 62, pág. 198, 1913. Diversos ensayos con vigas sujetas a choque han sido realizados en Suiza, dando resultados de acuerdo con la teoría. Véase *Tech. Komm. d. Verband, Schweiz Brückenbau u. Eisenhochbau-fabriken*, Bericht von M. Roß, marzo, 1922. Véase también los recientes artículos de Tuzi (Z.), y Nisida (M.), *Phil. Mag.* (7), vol. 21, pág. 448, y R. N. Arnold, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers*, volumen 137, 1937, pág. 217.

<sup>2</sup> La deformación local en la superficie de contacto de la carga con la viga se desprecia en este cálculo.

longitud es 3 m. Encontrar las dimensiones de la sección para  $\sigma_t = 2.400$  kg./cm.<sup>2</sup>,  $E = 2,4 \times 10^6$  kg./cm.<sup>2</sup>.

*Solución:* Despreciando  $\delta_{st}$  frente a  $h$  (véase ecuación c), la relación entre la flecha dinámica y la estática será:

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}$$

Si la elástica durante el choque tiene la misma forma que la deformación estática, las fatigas máximas de flexión estarán en la misma relación que las flechas, y por consiguiente,

$$\sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} \cdot \frac{Wl}{4Z} = \sigma_t,$$

de donde

$$\frac{Z}{c} = \frac{6EW h}{\sigma_t^2 l},$$

siendo  $Z$  el momento resistente de la sección y  $c$  la distancia de la fibra más alejada a la línea neutra, o sea la mitad de la altura de la viga en nuestro caso. Sustituyendo los datos numéricos, se tiene:

$$\frac{Z}{c} = \frac{6 \times 2,4 \times 10^6 \times 50 \times 30}{2,400^2 \times 300} = 12,50 \text{ cm.}^2$$

Se necesitará un perfil en I de 12,5 cm. de altura, cuyo peso es 20,4 kg./m.

4. ¿Qué fatiga producirá en la viga del problema anterior un peso de 100 kg., cayendo sobre el centro de la viga desde una altura de 15 cm.?

*Respuesta:*

$$\sigma_{\text{máx}} = 2.312 \text{ kg./cm.}^2.$$

5. Una viga de madera en voladizo tiene 1,80 m. de longitud y una sección cuadrada de 30 × 30 cm. Sobre su extremo libre cae un peso  $W = 50$  kg. desde una altura  $h = 30$  cm. Determinar la flecha máxima teniendo en cuenta la pérdida de energía debida a la masa de la viga.

*Solución:* Despreciando  $\delta_{st}$  frente a  $h$ , la ecuación análoga a la (190) da

$$\delta = \sqrt{\frac{\delta_{st} v^2}{g} \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \frac{ql}{W}}}$$

para  $ql = 120$  kg.,

$$\delta = \sqrt{\delta_{st} \frac{60}{1 + \frac{33 \times 120}{140 \times 50}}} = 0,68 \text{ cm.}$$

6. Una viga apoyada en sus extremos sufre una percusión en su centro por la acción de un peso  $W$  que cae desde una altura  $h$ . Despre-

ciendo  $\delta_{st}$  frente a  $h$ , encontrar el valor de la relación  $\frac{ql}{W}$  tal que el efecto de la masa de la viga reduzca la flecha dinámica en un 10 por 100.

*Respuesta:*

$$\frac{ql}{W} = 0,483.$$

68. La expresión general de la energía de deformación.—Al examinar los problemas de tensión, compresión, torsión y flexión se ha visto que la energía de deformación puede representarse en todos los casos por una función de segundo grado en las fuerzas exteriores (ecuaciones 168, 177 y 184), o por una función de segundo grado en los desplazamientos (ecuaciones 169, 178 y 185). La expresión general de la energía de deformación de un cuerpo elástico tiene también esta forma siempre que se verifiquen las siguientes condiciones: que el material siga la ley de Hooke, y que las condiciones del problema sean tales que los pequeños corrimientos debidos a la deformación no afecten a la acción de las fuerzas exteriores y sean despreciables para el cálculo de las fatigas<sup>1</sup>. Con estas condiciones los desplazamientos de un sistema elástico son funciones lineales de las cargas exteriores, y si estas cargas aumentan en una cierta relación, todos los desplazamientos aumentan en la misma proporción. Consideremos un cuerpo sometido a la acción de las fuerzas exteriores  $P_1, P_2$  y  $P_3 \dots$  (fig. 252), y apoyado de tal modo que le sea imposible todo movimiento como cuerpo rígido. Sean  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$  los corrimientos elásticos de los puntos de aplicación de las fuerzas, medido cada uno en la dirección de la fuerza correspondiente<sup>2</sup>. Si las fuerzas externas aumentan gradualmente de modo que estén siempre en equilibrio con las fuerzas elásticas internas, el trabajo por ellas realizado durante la de-

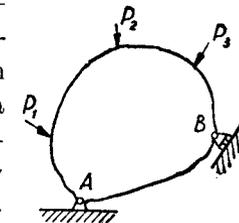


FIG. 252

<sup>1</sup> Diversos problemas, tales como la flexión de barras por fuerzas transversales unida a extensión o compresión axial no satisfacen a las condiciones anteriores. Con referencia a estos casos de excepción, véase el artículo 72.

<sup>2</sup> Los corrimientos de los puntos en direcciones perpendiculares a las fuerzas correspondientes no se tienen en cuenta en el estudio que sigue.

formación será igual a la energía de deformación almacenada por el cuerpo deformado. El valor de esta energía no depende del orden en que se apliquen las fuerzas, sino solamente de sus valores finales. Supongamos que todas las fuerzas externas  $P_1, P_2, P_3 \dots$ , aumentan simultáneamente en la misma relación; en este caso la relación entre cada fuerza y su corrimiento correspondiente puede representarse por un diagrama análogo al de la figura 241, y el trabajo suministrado por todas las fuerzas  $P_1, P_2, P_3 \dots$ , igual a la energía de deformación almacenada en el cuerpo, será

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_3 \delta_3}{2} + \dots, \quad (191)$$

es decir, la energía total de deformación es igual a la mitad de la suma de los productos de cada fuerza exterior por el corrimiento correspondiente<sup>1</sup>. En las hipótesis hechas anteriormente, los desplazamientos  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ , son funciones lineales de las fuerzas  $P_1, P_2, P_3 \dots$ . La sustitución de estas funciones en la ecuación (191) da una expresión general de la energía de deformación, en forma de función homogénea de segundo grado, en las fuerzas exteriores. Si las fuerzas se representan como funciones lineales de los corrimientos, y estas funciones se sustituyen en la ecuación (191), obtendremos una expresión para la energía de deformación, en forma de función homogénea de segundo grado, en los corrimientos.

En lo expuesto anteriormente no se han considerado las reacciones en los apoyos. El trabajo suministrado por estas reacciones durante la deformación es igual a cero, puesto que el desplazamiento de un apoyo fijo, tal como  $A$  (fig. 252), es nulo, y el corrimiento de un apoyo móvil, tal como  $B$ , es perpendicular a la reacción, despreciando el rozamiento en el apoyo. Por consiguiente, las reacciones no figuran en la expresión de la energía potencial (191).

Consideremos la energía almacenada en un elemento cúbico sometido a extensión, uniforme en tres direcciones perpendicu-

lares (fig. 50). Si la arista del cubo es la unidad de longitud, las fuerzas extensoras en sus caras, numéricamente, serán  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , y los alargamientos correspondientes  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ . Por consiguiente, la energía de deformación almacenada en un centímetro cúbico, —ecuación (191)—, será

$$w = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \epsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \epsilon_z}{2}.$$

Sustituyendo, en vez de los alargamientos, los valores dados por (43)<sup>1</sup>,

$$w = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x). \quad (192)$$

Esta expresión se aplica también en el caso de que algunas de las fatigas normales sean compresiones; basta para ello atribuirles signo negativo.

Si en unión de las fatigas normales hay fatigas cortantes ligadas a las caras del elemento, debe sumarse la energía cortante correspondiente (véase pág. 292), y empleando la ecuación (179) se tendrá como expresión total de la energía almacenada en un centímetro cúbico

$$w = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (193)$$

Como segundo ejemplo consideraremos una viga apoyada en los extremos, cargada en el centro con una fuerza  $P$  y flexada por un par  $M$ , aplicado en el extremo  $A$ . La flecha en el centro, ecuaciones (90) y (105), será

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Ml^2}{16EI}. \quad (a)$$

El giro en el extremo  $A$  —ecuaciones (88) y (104)— es

$$\theta = \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Ml}{3EI}. \quad (b)$$

<sup>1</sup> Los cambios de temperatura debidos a la deformación no se consideran de importancia práctica. Para una discusión más detallada, véase el libro de T. Weyrauch *Theorie elastischer Körper*, pág. 163, Leipzig, 1884. Véase también *Z. f. Architektur und Ingenieurwesen*, vol. 54, páginas 91 y 277, 1908.

<sup>1</sup> Esta conclusión fué obtenida por primera vez por Clapeyron véase Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, 2.<sup>a</sup> ed. página 79, 1866.

Por consiguiente, la energía de deformación de la viga, igual al trabajo suministrado por la fuerza  $P$  y el par  $M$ , será

$$U = \frac{P\delta}{2} + \frac{M\theta}{2} = \frac{1}{EI} \left( \frac{P^2 l^3}{96} + \frac{M^2 l}{6} + \frac{MPl^2}{16} \right). \quad (c)$$

Esta expresión es una función homogénea de segundo grado en la fuerza y par exteriores. Resolviendo las ecuaciones (a) y (b) en  $M$  y  $P$ , y sustituyendo sus valores en la ecuación (c), se obtendrá la expresión de la energía de deformación, en forma de función homogénea de segundo grado en los corrimientos. Se habrá observado que cuando sobre el cuerpo actúan pares los corrimientos correspondientes son los giros de los elementos de superficie sobre los que dichos pares actúan.

69. **El teorema de Castigliano.**—Puede establecerse, deducido de la expresión de la energía de deformación en los diversos casos, un método muy sencillo para el cálculo de los corrimientos de los puntos de un cuerpo elástico durante la deformación. Por ejemplo, en el caso de extensión simple (fig. 1), la energía de deformación viene dada por la ecuación (168),

$$U = \frac{P^2 l}{2AE},$$

tomando la derivada de esta expresión respecto a  $P$ , se obtiene

$$\frac{dU}{dP} = \frac{Pl}{AE} = \delta,$$

es decir, la derivada de la energía de deformación, con relación a la carga, da el desplazamiento correspondiente a la carga, o sea lo que el punto de aplicación de la carga se desplaza en la dirección de la carga. En el caso de un voladizo cargado en el extremo libre, la energía de deformación es (ecuación c, página 290)

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI}.$$

La derivada de esta expresión, con relación a la carga  $P$ , da la flecha en el extremo libre  $\frac{Pl^3}{3EI}$ .

En la torsión de un árbol circular la energía de deformación es (ecuación 182)

$$\frac{M_t^2 l}{2GI_p}.$$

La derivada de esta expresión con relación al momento torsor da

$$\frac{dU}{dM_t} = \frac{M_t l}{GI_p} = \varphi,$$

donde  $\varphi$  es el ángulo de torsión de eje y representa el corrimiento correspondiente al momento torsor.

Cuando actúan varias cargas sobre un cuerpo elástico puede utilizarse el mismo procedimiento para el cálculo de los corrimientos; por ejemplo, la expresión (c) del párrafo anterior da la energía de deformación de una viga flexada por una carga  $P$ , concentrada en su centro, y por un par  $M$  en el extremo. La derivada parcial de esta expresión, con relación a  $P$ , da la flecha en el punto de acción de la carga, y la derivada parcial, respecto a  $M$ , da el ángulo de rotación del extremo de la viga en que actúa el par  $M$ .

El teorema de Castigliano es una generalización de estos resultados<sup>1</sup>. Si el material del sistema sigue la ley de Hooke, y las condiciones son tales que los pequeños desplazamientos debidos a la deformación pueden despreciarse al analizar el modo de obrar las fuerzas, la energía de deformación de un sistema puede expresarse por una función homogénea de segundo grado de las fuerzas exteriores (véase artículo 68), y su derivada parcial, con relación a una fuerza cualquiera, da el desplazamiento correspondiente a dicha fuerza (véase artículo 72 para casos de excepción). Los términos fuerza y corrimiento tienen en este caso un significado más amplio que el corriente, incluyendo los de par y corrimiento angular, respectivamente. Consideremos un caso general (fig. 252). Supongamos que la energía de deforma-

<sup>1</sup> Véase la publicación de Castigliano *Nuova teoria intorno dell' equilibrio dei sistemi elastici* (Atti della Accademia delle scienze, Torino, 1875). Véase también su *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Turin, 1879. Para una traducción inglesa del trabajo de Castigliano, véase E. S. Andrews, London, 1919.

ción está expresada como función de las fuerzas  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , es decir, que

$$U = f(P_1, P_2, P_3, \dots) \quad (a)$$

Si se da un pequeño aumento  $dP_n$  a cualquier fuerza exterior  $P_n$ , la energía de deformación tomará un nuevo valor, que será

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \quad (b)$$

Pero el valor de la energía de deformación no depende del orden por el que las cargas se apliquen al cuerpo y solamente depende de sus valores finales. Puede suponerse, por consiguiente, que la carga infinitesimal  $dP_n$  se aplica primeramente, y después las cargas  $P_1, P_2, P_3, \dots$ . El valor final de la energía de deformación será el mismo que da la ecuación (b). La carga  $dP_n$ , aplicada primeramente, produce un desplazamiento infinitesimal, y el trabajo suministrado es una cantidad de segundo orden que puede despreciarse. Aplicando ahora las cargas  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , se observará que sus efectos no se modifican por la aplicación previa de la carga  $dP_n$ , y que el trabajo suministrado por dichas cargas será el mismo valor  $U$ , ecuación (a) anterior. Pero durante la aplicación de estas fuerzas la carga  $dP_n$  se habrá desplazado  $\delta_n$  en la dirección de  $P_n$  y ha realizado un trabajo  $(dP_n)\delta_n$ . Las dos expresiones del trabajo deben ser iguales; por consiguiente,

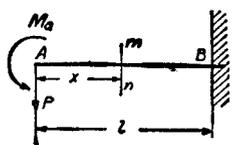


FIG. 253

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} (dP_n) = U + (dP_n)\delta_n$$

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \quad (194)$$

Como una aplicación del teorema consideraremos una ménsula cargada con una fuerza  $P$ , y un par  $M_a$  en el extremo (fig. 253). El momento flector en la sección  $mn$  es  $M = -Px - M_a$ , y la energía de deformación —ecuación (184)— será

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}$$

<sup>1</sup> Esto se deduce de las condiciones establecidas en la página 300, en virtud de las que la energía de deformación se obtuvo en forma de función homogénea de segundo grado.

Para obtener la flecha  $\delta$  en el extremo de la ménsula se tomará la derivada parcial de  $U$ , respecto a  $P$ , lo que da

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Sustituyendo el valor de  $M$  en función de  $P$  y  $M_a$ , se obtiene

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^l (Px + Ma) x dx = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{M_a l^2}{2EI}$$

Esta misma expresión puede obtenerse utilizando cualquier método de los ya explicados, tal como el de la viga conjugada.

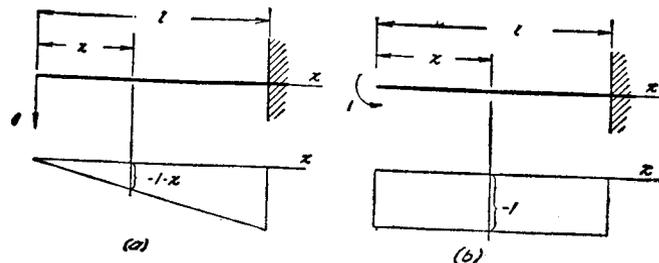


FIG. 254

Para obtener el giro en el extremo calcularemos la derivada parcial de la energía de deformación respecto al par  $M_a$ . Por consiguiente,

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_a} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (Px + M_a) dx = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{M_a l}{EI}$$

El signo positivo que hemos obtenido para  $\delta$  y  $\theta$  indica que la flecha y el giro del extremo tienen la misma dirección que señalan la fuerza y el par de la figura 253.

Debe notarse que la derivada parcial  $\frac{\partial M}{\partial P}$  indica el módulo de crecimiento del momento  $M$  con relación a la carga  $P$ , y puede materializarse por el diagrama del momento flector correspondiente a una carga unidad —véase fig. 254 (a)—. La derivada parcial  $\frac{\partial M}{\partial M_a}$  se materializa en forma análoga por el dia-

grama del momento flector en la figura 254 (b). Empleando las notaciones

$$\frac{\partial M}{\partial P} = M'_p \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = M'_m$$

pueden escribirse los resultados obtenidos en la forma siguiente:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^l M M'_p dx; \quad \theta = \frac{1}{EI} \int_0^l M M'_m dx. \quad (195)$$

Estas ecuaciones, obtenidas para el caso particular de la figura 253, son válidas para el caso general de una viga con cualquier clase de carga y sustentada de cualquier forma. También pueden emplearse en el caso de carga distribuida.

Consideremos, por ejemplo, el caso de una viga simplemente apoyada y cargada uniformemente (fig. 255) y calculemos la

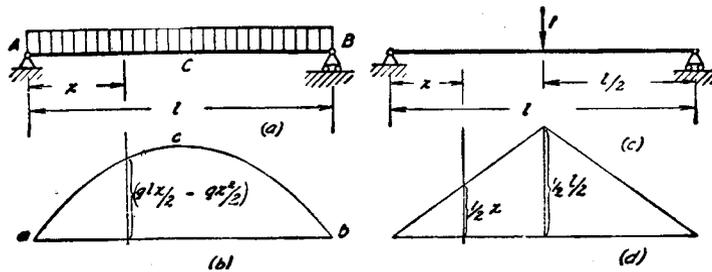


FIG. 255

flecha en el centro de esta viga mediante el teorema de Castigliano. En los casos anteriores actuaban las fuerzas y momentos concentrados y las derivadas parciales respecto a ellos daban los corrimientos y giros. En el caso de una carga uniforme no existe ninguna fuerza vertical concentrada en el centro de la viga y no podemos resolver el problema del modo expuesto anteriormente. La dificultad se obvia fácilmente suponiendo que en el centro de la viga obra una carga ficticia  $P$  de valor infinitesimal. Una fuerza tal no modifica, evidentemente, ni la flecha ni el diagrama del momento flector representado en la figura 255 (b). Al mismo tiempo, la relación del incremento del momento flector al incremento de  $P$ , es decir, la  $\frac{\partial M}{\partial P}$ , viene materializada

por la figura 255 (c) y (d). Con estos valores de  $M$  y  $\frac{\partial M}{\partial P}$  el valor de la flecha es

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

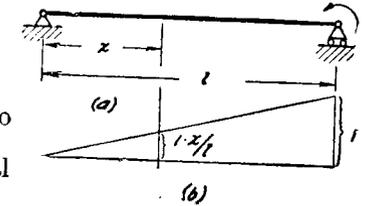


FIG. 256

Observando que tanto  $M$  como  $\frac{\partial M}{\partial P}$  son simétricos con relación al centro del vano, se obtiene

$$\delta = \frac{2}{EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{2}{EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z}.$$

Si se quiere calcular el giro en el extremo  $B$  de la viga representada en la figura 255 (a) mediante el teorema de Castigliano, basta suponer infinitamente pequeño el par  $M_b$  aplicado en  $B$ . Un par de este valor no modifica el diagrama del momento flector —fig. 255 (b)—. La

derivada parcial  $\frac{\partial M}{\partial M_b}$  se ve en la figura 256 (a) y (b). El giro pedido correspondiente al extremo  $B$  de la viga será

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx \\ &= \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{l} dx \\ &= \frac{ql^3}{24 EI_z}. \end{aligned}$$

Se ve que los resultados obtenidos mediante el teorema de Castigliano coinciden con los obtenidos anteriormente (pág. 133).

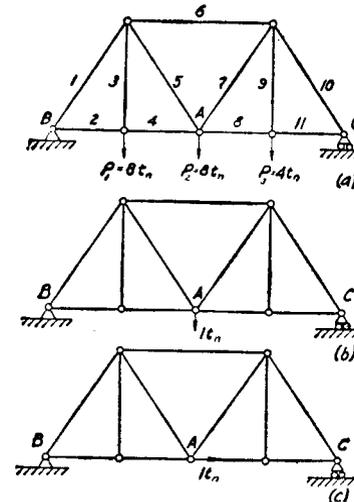


FIG. 257

El teorema de Castigliano es de gran utilidad para el cálculo de deformaciones en los entramados. Sea, por ejemplo, el sistema de la figura 257. Cada barra tiene un número y sus longi-

tudes y áreas de las secciones rectas figuran en la tabla correspondiente. La tensión  $S_i$  producida en cualquier barra  $i$  del sistema por las cargas  $P_1, P_2, P_3$ , se calcula fácilmente por las ecuaciones de la estática para el equilibrio de los nudos. Dichas fuerzas  $S_i$  figuran en la cuarta columna de la tabla indicada.

1	2	3	4	5	6	7
$i$	$l_i$ cm.	$A_i$ cm. <sup>2</sup>	$S_i$ tn.	$S'_i$	$\frac{S_i S'_i l_i}{A_i}$	$S'_i$
1	625	37,5	-13,75	-0,625	143,2	0
2	375	18,75	8,25	0,375	62	1
3	500	12,50	8,00	0	0	0
4	375	18,75	8,25	0,375	62	1
5	625	12,50	3,75	0,625	117,2	0
6	750	25	-10,50	-0,750	23,6	0
7	625	12,5	6,25	0,625	195,2	0
8	375	18,75	6,75	0,375	50,8	0
9	500	12,50	4,00	0	0	0
10	625	37,50	-11,25	-0,625	117,2	0
11	375	18,75	6,75	0,375	50,8	0

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i S'_i l_i}{A_i} = 822.$$

La energía de deformación de cualquier barra  $i$  —ecuación (168)— es  $\frac{S_i^2 l_i}{2 A_i E}$ .

La energía de deformación total del sistema será

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^2 l_i}{2 A_i E}, \quad (196)$$

donde la sumación se extenderá a todas las barras del sistema. En nuestro caso,  $m = 11$ . Las fuerzas  $S_i$  son funciones de las cargas  $P$ , y la flecha  $\delta_n$  en el punto de aplicación de una carga cualquiera  $P_n$  será (ecuación 194)

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial P_n}. \quad (197)$$

La derivada  $\frac{\partial S_i}{\partial P_n}$  es la relación de aumento de la fuerza  $S_i$  con el aumento de carga  $P_n$ . Su valor numérico es igual a la tensión producida en la barra  $i$  por una carga unidad aplicada en el lugar de  $P_n$  y esta propiedad será la que utilizaremos para calcular dicha derivada. Las derivadas de ahora en adelante las representaremos por  $S'_i$ . La ecuación para el cálculo de las flechas será, pues,

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i S'_i l_i}{A_i E}. \quad (198)$$

Consideremos, por ejemplo, la flecha  $\delta_2$  correspondiente a  $P_2$  en  $A$  —fig. 257 (a)—. Los valores  $S'_i$  recopilados en la quinta columna se obtendrán por las ecuaciones de equilibrio del entramado para las condiciones de carga de la figura 257 (b), en la que se ha prescindido de las cargas reales y se ha colocado una carga única de valor una tonelada en la articulación  $A$  y en la dirección de  $P_2$ , o sea verticalmente. Calculados los valores de la columna sexta, utilizando los datos de las columnas segunda a quinta, la suma de estos resultados dividida por el módulo  $E = 2 \times 10^3$  toneladas por cm.<sup>2</sup> da la flecha en  $A$  (ecuación 198),

$$\delta_2 = \frac{822}{2 \times 10^3} = 0,411 \text{ cm.}$$

Lo expuesto anteriormente se refiere a la determinación de corrimientos en los puntos de acción de las cargas exteriores y en el sentido de actuación de dichas cargas.

En el estudio de la deformación de un sistema elástico puede ser necesario calcular el corrimiento de un punto en el que no exista carga o el corrimiento de un punto en un sentido que no sea la dirección de la carga actuante. El método de Castigliano puede usarse también en este caso. Aplicaremos en el punto una carga imaginaria adicional  $Q$  en la dirección del corrimiento buscado y calcularemos la derivada  $\frac{\partial U}{\partial Q}$ . En esta derivada se hace cero la carga  $Q$  y se obtiene el corrimiento deseado. Vamos a calcular, por ejemplo, en el entramado de la figura 257 (a) el corrimiento horizontal del punto  $A$ . Aplicare-

mos una fuerza horizontal  $Q$  en ese punto y el corrimiento horizontal correspondiente será

$$\delta_h = \left( \frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial Q} \quad (d)$$

donde la sumación se extiende a todas las barras del entramado. Las fuerzas  $S_i$  en la ecuación (d) tienen el mismo significado que antes, puesto que la carga adicional  $Q$  es cero y las derivadas  $\frac{\partial S_i}{\partial Q} = S_i''$  se obtienen como tensiones en las barras del entramado para el estado de carga de la figura 257 (c). Sus valores figuran en la columna séptima de la tabla ya citada. Sustituyendo estos valores en la ecuación (d), encontramos que el desplazamiento horizontal de  $A$  es igual a la suma de los alargamientos de las barras 2 y 4, ó sea

$$\delta_h = \frac{1}{E} \left( \frac{S_2 l_2}{A_2} + \frac{S_4 l_4}{A_4} \right) = \frac{375}{18,75 \times 2 \times 10^3} (8,25 + 8,25) = 0,165 \text{ cm.}$$

Al analizar la deformación de entramados es necesario algunas veces conocer el cambio de distancia que acontece entre dos puntos del sistema. Este problema puede resolverse también por el método de Castigliano.

Vamos a determinar, por ejemplo, la disminución  $\delta$  de la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  de la figura 258 (a), producida por las cargas  $P_1, P_2, P_3$ . Unamos a ellas dos cargas imaginarias  $Q$  aplicadas tal como se indica en la figura con líneas de puntos. Del teorema de Castigliano se deduce que la derivada parcial  $\left( \frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0}$  da en este caso la suma de los desplazamientos de  $A$  y  $B$  en la dirección  $AB$ , producidos por las cargas  $P_1, P_2, P_3$ . Utilizando la ecuación (194), dicho desplazamiento será <sup>1</sup>

$$\delta = \left( \frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \frac{\partial S_i}{\partial Q} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} S_i'' \quad (199)$$

<sup>1</sup> Este problema fué resuelto por J. C. Maxwell (*On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames*, Phil. Mag. (4), vol. 27, página 294, 1864; *Scientific Papers*, vol. 1, pág. 598, Cambridge, 1890.

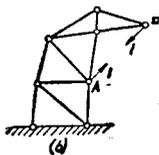
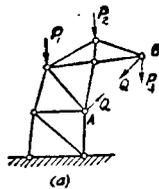


FIG. 258

donde  $S_i$  son las fuerzas producidas en las barras por el sistema real de cargas  $P_1, P_2, P_3$ ; las cantidades  $S_i'$  son las fuerzas producidas en las barras para el sistema de cargas de la figura 258 (b), donde se ha prescindido de todas las cargas reales y se han aplicado en  $A$  y  $B$  dos fuerzas unitarias iguales y opuestas;  $m$  es el número de barras.

**Problemas**

1. Determinar mediante el teorema de Castigliano la flecha y el giro en el extremo de una ménsula cargada uniformemente.

2. Determinar la flecha en el extremo  $B$  del voladizo de la viga de la figura 259.

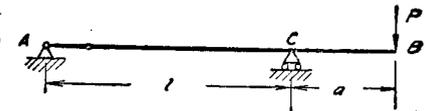


FIG. 259

3. Un sistema está formado por dos barras prismáticas de igual sección y longitud (fig. 260).

Sobre él actúa la carga  $P$ . Determinar el desplazamiento vertical de la articulación  $A$ .

*Solución:* La fuerza de extensión en la barra  $AB$  y la de compresión de la  $AC$  son iguales a  $P$ . Por consiguiente, la energía de deformación del sistema es

$$U = 2 \frac{P^2 l}{2 A E}$$

El corrimiento vertical de  $A$  será

$$\delta = \frac{dU}{dP} = \frac{2 Pl}{A E}$$

4. Determinar el corrimiento horizontal de la articulación  $A$  del problema anterior.

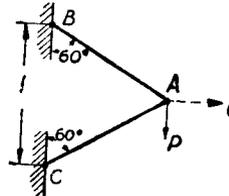


FIG. 260

*Solución:* Apliquemos una fuerza imaginaria horizontal  $Q$  tal como se indica en la figura 260 con línea de puntos. La energía potencial del sistema es

$$U = \frac{\left( P + \frac{1}{\sqrt{3}} Q \right)^2 l}{2 A E} + \frac{\left( P - \frac{1}{\sqrt{3}} Q \right)^2 l}{2 A E}$$

La derivada de esta expresión respecto a  $Q$  para  $Q = 0$  da para el desplazamiento horizontal el valor

$$\delta_h = \left( \frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \left( \frac{2 Q l}{3 A E} \right)_{Q=0} = 0$$

5. Determinar el desplazamiento angular de la barra  $AB$  producida por la carga  $P$  en la figura 261,

*Solución:* Se aplica al sistema un par imaginario tal como se indica en la figura con línea de trazos. El desplazamiento angular corres-

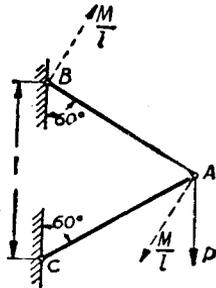


FIG. 261

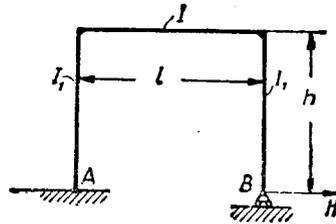


FIG. 262

pondiente a este par es el desplazamiento angular  $\phi$  de la barra AB debido a la carga P. Las fuerzas  $S_p$ , en este caso, son:

$$P + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M}{l} \text{ en la barra AB } \quad \text{y} \quad -P - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{M}{l} \text{ en la barra AC.}$$

La energía de deformación es

$$U = \frac{l}{2AE} \left[ \left( P + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M}{l} \right)^2 + \left( -P - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{M}{l} \right)^2 \right],$$

de donde

$$\phi = \left( \frac{\partial U}{\partial M} \right)_{M=0} = \left( \frac{P\sqrt{3}}{AE} + \frac{5M}{3lAE} \right)_{M=0} = \frac{P\sqrt{3}}{AE}.$$

6. ¿Qué desplazamiento horizontal produce en el apoyo B del pórtico de la figura 262 la fuerza horizontal H?

*Respuesta:*

$$\delta_h = \frac{2Hh^3}{3EI_1} + \frac{Hh^2l}{EI}$$

7. Determinar el desplazamiento vertical del punto A y el horizontal del punto C en el entramado de acero de la figura 263, si  $P = 1.000 \text{ kg}$ .

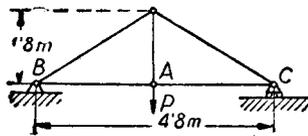


FIG. 263

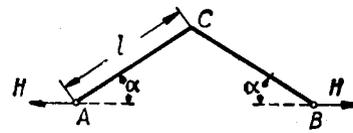


FIG. 264

el área de la sección recta de las piezas comprimidas es  $31,25 \text{ cm}^2$  y la de las otras barras  $12,5 \text{ cm}^2$ .

8. Determinar el aumento de la distancia AB producida por las fuerzas H (fig. 264) si las barras AC y BC tienen las mismas dimensiones; solamente se tiene en cuenta la energía de deformación por flexión y se supone  $\alpha$  lo suficientemente grande para que el efecto de la flecha en el valor del momento flector pueda despreciarse.

*Respuesta:*

$$\delta = \frac{2H \sin^2 \alpha l^3}{3EI}$$

9. Determinar la flecha a la distancia a del extremo izquierdo de la viga uniformemente cargada representada en la figura 255 (a).

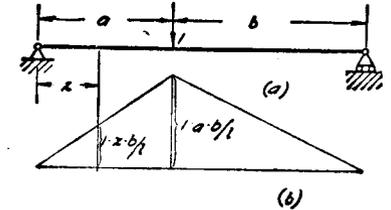


FIG. 265

*Solución:* Aplicando una carga P infinitamente pequeña a la distancia a del extremo izquierdo, la derivada  $\frac{\partial M}{\partial P}$  está materializada en la figura 265 (a) y (b). Utilizando para M el diagrama parabólico de la figura 255 (b) la flecha buscada es

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{xb}{l} dx + \frac{1}{EI} \int_b^l \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{a(l-x)}{l} dx = \frac{qab}{24EI} (a^2 + b^2 + 3ab).$$

Escribiendo x en vez de a y l-x en lugar de b, se obtiene la expresión de la elástica de acuerdo con los resultados dados en la página 133.

70. Aplicación del teorema de Castigliano a la resolución de problemas estáticamente indeterminados.—El teorema de Castigliano se utiliza frecuentemente en la resolución de problemas estáticamente indeterminados. Estudiaremos primeramente aquellos problemas en los que las cantidades hiperestáticas forman parte de las ligaduras, es decir, son elementos del sistema de reacción en los apoyos. Sean X, Y, Z... las fuerzas de reacción estáticamente indeterminadas. La energía de deformación del sistema será una función de estas fuerzas. Para apoyos fijos o apoyos cuyo movimiento sea perpendicular a la dirección de las reacciones, las derivadas parciales de la energía de deformación respecto a las fuerzas desconocidas deberán ser nulas, de acuerdo con el teorema de Castigliano. Por consiguiente,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0; \quad \dots \quad (200)$$

De este modo se tienen tantas ecuaciones como reacciones hiperestáticas.

Se observará que las ecuaciones (200) representan las condiciones de mínimo de la función  $U$ , lo que nos dice que las fuerzas de reacción hiperestáticas toman los valores necesarios para que sea mínima la energía de deformación del sistema. Esta propiedad constituye el principio del trabajo

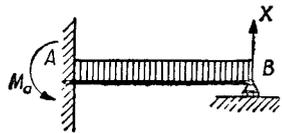


FIG. 266

mínimo tal como se aplica a la determinación de ligaduras hiperestáticas<sup>1</sup>.

Como ejemplo de aplicación de este principio, consideraremos una viga empotrada por un extremo y apoyada por el otro, sometida a la acción de una carga uniformemente repartida (fig. 266). Este problema tiene una ligadura hiperestática. Tomando la reacción en el apoyo derecho  $X$  como ligadura hiperestática, se encontrará su valor por la condición

$$\frac{dU}{dX} = 0. \quad (a)$$

La energía de deformación de la viga, ecuación (187), es

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}, \quad (b)$$

en donde

$$M = Xx - \frac{qx^2}{2}.$$

Sustituyendo en (a), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left( Xx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx \\ &= \frac{1}{EI} \left( X \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$X = \frac{3}{8} ql.$$

<sup>1</sup> El principio del trabajo mínimo fué establecido primeramente por F. Menabrea, en su artículo *Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques*, Paris, C. R., vol. 46, pág. 1056, 1858. Véase también C. R., vol. 98, pág. 714, 1884. La demostra-

En lugar de la reacción  $X$ , pudo haberse tomado como ligadura hiperestática el par  $M_a$  en el empotramiento del extremo izquierdo de la viga. En ese caso habríamos expresado la energía de deformación en función de  $M_a$ . La ecuación (b) es válida. El momento flector para cualquier sección es

$$M = \left( \frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2}.$$

Como la sección de empotramiento no gira cuando la viga se flexa, la derivada de la energía de deformación respecto a  $M_a$  deberá ser cero. Expresando analíticamente esta condición, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dM_a} &= \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dM_a} dx = -\frac{1}{EI} \int_0^l \left[ \left( \frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{l} dx \\ &= -\frac{1}{EI} \left( \frac{ql^3}{24} - \frac{M_a l}{3} \right) = 0, \end{aligned}$$

de donde el valor absoluto del momento es

$$M_a = \frac{ql^2}{8}.$$

Los problemas en que se consideren como cantidades hiperestáticas las tensiones que correspondan a las barras sobrantes de un sistema también pueden resolverse aplicando el teorema de Castigliano.

Sea, por ejemplo, el sistema representado en la figura 15, examinado anteriormente (véase pág. 19). Considerando la fuerza  $X$  en la barra vertical  $OC$  como cantidad hiperestática, las fuerzas en las barras inclinadas  $OB$  y  $OD$  son

$$\frac{P - X}{2 \cos \alpha}.$$

Representando por  $U_1$  la energía de deformación de las ba-

ción completa del principio fué dada por Castigliano, quien hizo de este principio el método fundamental de la resolución de los sistemas hiperestáticos. La aplicación en la ingeniería de los métodos de la energía de deformación fué desarrollada por O. Mohr (véase su *Abhandlungen aus dem Gebiete d. technischen Mechanik*), por H. Müller-Breslau, en su libro *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, y F. Engesser, *Über die Berechnung statisch unbestimmter Systeme* (*Zentralbl. d. Bauverwalt.*, pág. 606, 1907). Una bibliografía muy completa de este asunto figura en el artículo de M. Grüning, *Encyclopädie d. Math. Wiss.*, volumen IV, 2, II, pág. 419.

rras inclinadas —fig. 267 (a)— y por  $U_2$  la energía de deformación de la barra vertical —fig. 267 (b)—, la energía de deformación total del sistema es <sup>1</sup>

$$U = U_1 + U_2 = \frac{(P - X)^2}{2 \cos^2 \alpha} \frac{l}{AE \cos \alpha} + \frac{X^2 l}{2 AE} \quad (c)$$

Si  $\delta$  es el desplazamiento real hacia abajo del nudo  $O$  de la figura 15, la derivada con relación a  $X$  de la energía  $U$ , del sistema de la figura 267 (a) será igual a  $-\delta$ , puesto que la fuerza  $X$  del sistema tiene dirección opuesta a la del desplazamiento  $\delta$ . Al mismo tiempo, la derivada  $\frac{\partial U_2}{\partial X}$  valdrá  $\delta$ ; por consiguiente,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial U_2}{\partial X} = -\delta + \delta = 0. \quad (d)$$

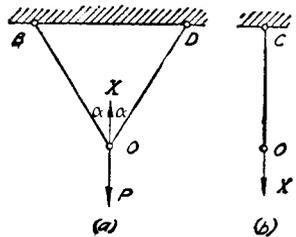


FIG. 267

Se ve que el verdadero valor de la fuerza  $X$  en la barra sobrante es el que hace mínima la energía de deformación total del sistema. Poniendo, en vez de  $U$ , su valor (c), en la ecuación (d) se obtiene

$$-\frac{(P - X)}{2 \cos^2 \alpha} \frac{l}{AE \cos \alpha} + \frac{Xl}{AE} = 0,$$

de donde

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Un razonamiento análogo se aplica al caso de sistemas estáticamente indeterminados con una barra sobrante. Para fijar las ideas, consideremos la estructura de la figura 268 (a). Las reacciones pueden determinarse por las ecuaciones de la estática, es decir, el sistema está isostáticamente apoyado; pero al ir a determinar las tensiones en las barras, vemos que existe una barra sobrante. Supongamos que esta barra sobrante sea la  $CD$ . Quitaremos dicha barra, y en sus extremos  $C$  y  $D$  aplicaremos dos fuerzas  $X$  iguales a la tensión que le correspondería y, por consiguiente, opuestas entre sí. Tenemos ahora un sistema es-

<sup>1</sup> Se supone que todas las barras tienen el mismo módulo de elasticidad  $E$  y la misma sección  $A$ .

táticamente determinado sometido a la acción de la fuerza conocida  $P$  y de las dos desconocidas  $X$ . Las tensiones correspondientes a las barras de este sistema se podrán hallar calculando: primero, las que produce la carga real  $P$  y que representaremos por  $S_i^0$ , siendo  $i$  el número de orden de la barra; segundo, las que se originan en dichas barras cuando se prescinde de la car-

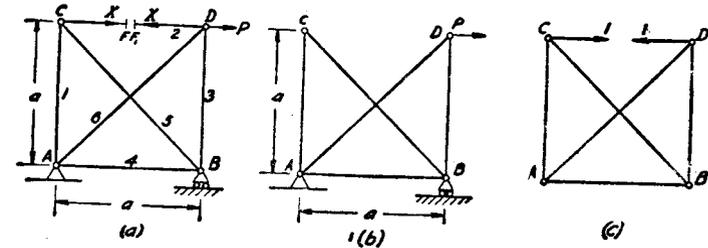


FIG. 268

ga exterior  $P$  y se pone en lugar de las fuerzas  $X$  dos fuerzas unidad —fig. 268 (c)—. Estas últimas tensiones o fuerzas interiores las representaremos por  $S_i$ . La fuerza interna correspondiente a cada barra, cuando actúan simultáneamente la fuerza  $P$  y las fuerzas  $X$ , serán

$$S_i = S_i^0 + S_i' X. \quad (e)$$

La energía de deformación total del sistema (ecuación 196), será

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^2 l_i}{2 A_i E} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i' X)^2 l_i}{2 A_i E}. \quad (f)$$

La ecuación se extiende a todas las barras del sistema, incluso a la  $CD$ , de que habíamos prescindido <sup>1</sup>. Se aplica ahora el teorema de Castigliano y la derivada de  $U$  respecto a  $X$  da el desplazamiento de los extremos  $F$  y  $F_1$ , el uno hacia el otro. En el caso actual, la barra es continua y este desplazamiento es cero. Por consiguiente,

$$\frac{dU}{dX} = 0, \quad (g)$$

es decir, la fuerza  $X$  en la barra sobrante es tal que hace mínima la energía de deformación del sistema.

<sup>1</sup> Para esta barra,  $S_i^0 = 0$  y  $S_i' = 1$ .

Mediante las ecuaciones (f) y (g), tendremos

$$\frac{d}{dX} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i'X)^2 l_i}{2 A_i E} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i'X) l_i S_i'}{A_i E} = 0,$$

de donde

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^0 S_i' l_i}{A_i E}}{\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i'^2 l_i}{A_i E}}. \tag{201}$$

Este procedimiento es también aplicable a un sistema en el que existan varias barras sobrantes.

El principio del trabajo mínimo puede aplicarse también en el caso de que las cantidades hiperestáticas sean pares. Considere-

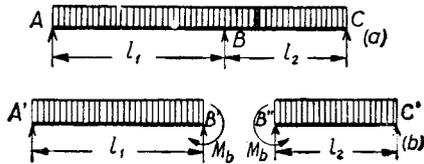


FIG. 269

remos, por ejemplo, una viga sobre tres apoyos uniformemente cargada (fig. 269). Si se toma como ligadura hiperestática el momento en el apoyo central y se corta la viga por el apoyo B, se obtendrán dos vigas apoyadas —fig. 269 (b)— cargadas con los pares desconocidos  $M_b$ , además de con la carga uniforme conocida de valor  $q$ . Al no existir rotación del extremo  $B'$  respecto al extremo  $B''$ , debido a que en nuestro caso —fig. 269 (a)— la elástica es una curva continua,

$$\frac{dU}{dM_b} = 0. \tag{202}$$

Expresión que indica que también en este caso el valor que corresponde a la cantidad hiperestática hace mínima la energía de deformación del sistema.

**Problemas**

1. La carga vertical  $P$  está sostenida por una barra vertical  $DB$  de longitud  $l$  y sección  $A$  y por dos barras igualmente inclinadas de lon-

gitud  $l$  y sección  $A_1$  (fig. 270). Determinar las tensiones en las barras y la relación  $\frac{A_1}{A}$ , para la que dichas tensiones son numéricamente iguales.

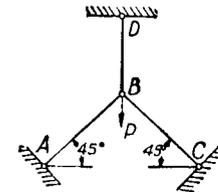


FIG. 270

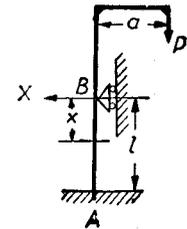


FIG. 271

*Solución:* El sistema es hiperestático. Sea  $X$  la fuerza de extensión de la barra vertical. Las fuerzas de compresión en las barras inclinadas serán  $\frac{1}{\sqrt{2}} (P - X)$  y la energía de deformación del sistema es

$$U = \frac{X^2 l}{2 A E} + \frac{(P - X)^2 l}{2 A_1 E}.$$

El principio del trabajo mínimo da:

$$\frac{dU}{dX} = \frac{Xl}{EA} - \frac{(P - X)l}{A_1 E} = 0,$$

de donde

$$X = \frac{P}{1 + \frac{A_1}{A}}.$$

Sustituyendo en la ecuación

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (P - X)$$

se obtiene

$$A_1 = \sqrt{2} A.$$

2. Determinar la reacción horizontal  $X$  en el sistema representado en la figura 271.

*Solución:* La fuerza desconocida  $X$  intervendrá solamente en la parte de energía potencial de flexión que corresponde al trozo  $AB$  de la barra. Para este trozo,  $M = Pa - Xx$ , y la ecuación del trabajo mínimo da:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= \frac{d}{dX} \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = - \frac{1}{EI} \int_0^l (Pa - Xx) x dx \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{Xl^3}{3} - \frac{Pal^2}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$X = \frac{3}{2} P \frac{a}{l}.$$

3. Determinar las relaciones horizontales  $X$  en el sistema de la figura 272. Todas las dimensiones figuran en la tabla siguiente.

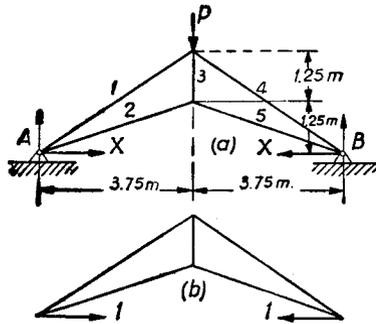


FIG. 272

*Solución:* Por el principio del trabajo mínimo, se tiene

$$\frac{dU}{dX} = \frac{d}{dX} \sum \frac{S_i^2 l_i}{2 A_i E} = \sum \frac{S_i l_i}{A_i E} \frac{dS_i}{dX} = 0.$$

Sea  $S_i^0$  la tensión producida en la barra  $i$  por la carga conocida  $P$ ,  $S_i'$  la tensión producida en la misma barra reemplazando las fuerzas  $X$  por otras unitarias. Los valores de  $S_i^0$  y  $S_i'$  se determinan por las condiciones de la estática y figuran en

las columnas 4.<sup>a</sup> y 5.<sup>a</sup> de la tabla. La tensión total en una barra cualquiera será:

$$S_i = S_i^0 + S_i' X.$$

$i$	$l_i$ cm.	$A_i$ cm. <sup>2</sup>	$S_i^0$	$S_i'$	$\frac{S_i^0 S_i' l_i}{A_i}$	$\frac{S_i'^2 l_i}{A_i}$
1	450,75	31,25	-1,803 P	1,202	-51,24 P	20,8
2	395,25	18,75	1,581 P	-2,108	-70,28 P	93,6
3	125,0	12,50	1,000 P	-1,333	-13,32 P	17,8
4	450,75	31,25	-1,803 P	1,202	-31,24 P	20,8
5	395,25	18,75	1,581 P	-2,108	-70,28 P	93,6

$$\Sigma = -216,36 P; \quad \Sigma = 246,6$$

Sustituyendo su valor en la ecuación anterior, queda

$$\sum_{i=1}^5 \frac{(S_i^0 + S_i' X) l_i}{A_i E} S_i = 0,$$

de donde

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^5 \frac{S_i^0 S_i' l_i}{A_i}}{\sum_{i=1}^5 \frac{S_i'^2 l_i}{A_i}} \quad (f)$$

Los elementos de estas sumaciones figuran en las columnas 6.<sup>a</sup> y 7.<sup>a</sup> de la tabla. Sustituyendo los valores en la ecuación (f), se obtiene

$$X = 0,877 P.$$

4. Determinar la tensión en la barra horizontal sobrante del sistema de la figura 273, suponiendo que la longitud de esta barra es 750 cm. y el área de su sección recta  $A_0$ . Las barras restantes tienen las mismas dimensiones que en el problema 3.

*Solución:* La tensión de la barra horizontal se calcula por la ecuación (201). Esta ecuación es análoga a la ecuación (f) del problema 3, pero en el sistema de la figura 273 existe además la barra horizontal. La tensión producida en esta barra por la fuerza  $P$  actuando sola ( $X = 0$ ) es cero, es decir,  $S_0^0 = 0$ . La tensión producida por las dos fuerzas iguales a la unidad —fig. 273 (b)— es  $S_0' = 1$ . El término adicional en el numerador de la ecuación (f) es

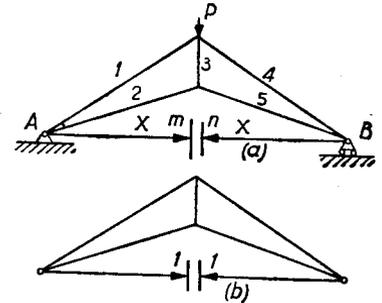


FIG. 273

$$\frac{S_0^0 S_0' l_0}{A_0} = 0.$$

El término adicional del denominador es:

$$\frac{S_0'^2 l_0}{A_0} = \frac{1 \cdot l_0}{A_0} = \frac{750}{A_0}.$$

Por consiguiente, empleando los datos del problema 3,

$$X = \frac{216,36 P}{\frac{750}{A_0} + 246,6}.$$

Tomando, por ejemplo,  $A_0 = 62,5\text{ cm.}^2$ ,

$$X = \frac{216,36 P}{12 + 246,6} = 0,836 P.$$

Que es solamente el 4,7 por 100 menor que el valor obtenido en el problema 3, para apoyos fijos<sup>1</sup>.

Suponiendo  $A_0 = 6,25\text{ cm.}^2$ ,

$$X = \frac{216,36}{120 + 246,5} = 0,590 P.$$

Se observará que en un sistema hiperestático las tensiones en las barras dependen de sus secciones rectas.

5. Determinar las tensiones en las barras del sistema de la figura 20 utilizando el principio del trabajo mínimo.

6. Determinar las tensiones en las barras del sistema represen-

<sup>1</sup> Tomando  $A_0 = \infty$  se obtiene la misma condición que para apoyos fijos.

tado en la figura 274, suponiendo que todas las barras son de las mismas dimensiones y materiales.

*Solución:* Prescindiendo de una barra, los esfuerzos en las demás pueden determinarse por las condiciones de la estática; por consiguiente, el sistema tiene una barra hiperestática solamente, sea esta barra la 1 y  $X$  la tensión correspondiente. Todas las barras que son lados del hexágono tendrán las mismas tensiones  $X$ ; las barras 8, 9, 11 y 12 sufren compresiones  $X$  y las tensiones en las barras 7 y 10 valen  $P - X$ .

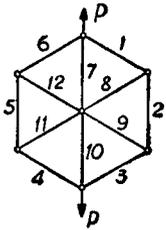


FIG. 274

La energía de deformación del sistema es:

$$U = 10 \frac{X^2 l}{2 AE} + 2 \frac{(P - X)^2 l}{2 AE}.$$

Estableciendo que  $\frac{dU}{dX} = 0$ , se obtiene

$$X = \frac{P}{6}.$$

7. Determinar las tensiones en el sistema de la figura 268, suponiendo que todas las barras tienen la misma sección recta y tomando como hiperestática la tensión en la diagonal  $AD$ .

*Solución:* Sustituyendo los datos dados por la tabla siguiente, en la ecuación (201), se tiene:

$$X = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} P.$$

$i$	$l_i$	$S_i^0$	$S_i'$	$S_i^0 S_i' l_i$	$S_i'^2 l_i$
1	$a$	$P$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	$a$	$P$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aP}{\sqrt{a}}$	$\frac{a}{2}$
3	$a$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{a}{2}$
4	$a$	$P$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	+1	$-2aP$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	0	+1	0	$a\sqrt{2}$

$$\Sigma = -\frac{(3 + 2\sqrt{2})aP}{\sqrt{2}}; \quad \Sigma = 2a(1 + \sqrt{2}).$$

8. Un cuadro de sección uniforme (fig. 275) se somete a la acción de una carga uniformemente repartida de intensidad  $q$ . Determinar el momento flector en los ángulos.

*Respuesta:*

$$M = \frac{(a^3 + b^3)q}{12(a + b)}.$$

9. Una carga  $P$  está sostenida por dos vigas de igual sección que se cruzan en ángulo recto (fig. 276). Determinar la presión  $X$  entre las vigas.

*Respuesta:*

$$X = \frac{Pl^3}{l^3 + l_1^3}.$$

10. Encontrar el valor de la hiperestática  $H$  en el pórtico representado en la figura 167, utilizando el principio del trabajo mínimo.

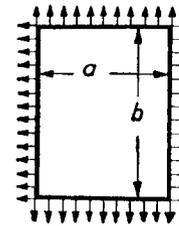


FIG. 275

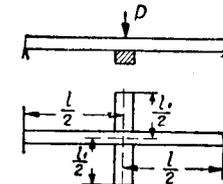


FIG. 276

*Solución:* La energía de deformación por flexión del pórtico es

$$U = 2 \int_0^h \frac{H^2 x^2 dx}{2 EI_1} + \int_0^l \frac{(M_0 - Hh)^2 dx}{2 EI}, \quad (g)$$

donde  $M_0$  representa el momento flector para las secciones del dintel calculado como viga apoyada en sus extremos. Sustituyendo en la ecuación

$$\frac{dU}{dH} = 0, \quad (h)$$

se encuentra

$$\frac{2Hh^3}{EI_1} + \frac{Hh^2 l}{EI} = \frac{h}{EI} \int_0^l M_0 dx. \quad (k)$$

La integral del segundo miembro es el área del diagrama triangular de momentos flectores para una viga con carga concentrada  $P$ . Por consiguiente,

$$\int_0^l M_0 dx = \frac{1}{2} Pc(l - c).$$

Sustituyendo en (k), se obtiene para  $H$  la expresión ya conocida (ecuación 114, pág. 192).

11. Encontrar las incógnitas hiperestáticas en las estructuras representadas por las figuras 166, 169 y 171, utilizando el principio de trabajo mínimo.

12. Hallar el momento flector en la figura 269, suponiendo  $l_1 = 2l_2$ .

71. **El teorema de la reciprocidad de los trabajos.**—Comenzaremos considerando la viga simplemente apoyada de la figura 277 (a), y calcularemos la flecha en el punto  $D$ , cuando la carga  $P$  actúa en  $C$ . Esta flecha se obtiene haciendo  $x = d$  en la ecuación (86), y será

$$(y)_{x=d} = \frac{Pbd}{6l} (l^2 - b^2 - d^2). \quad (a)$$

Se ve que la flecha (a) no varía si se cambia  $d$  por  $b$  y  $b$  por  $d$ , lo que indica que en el caso de la figura 277 (b), la flecha en  $D_1$  es

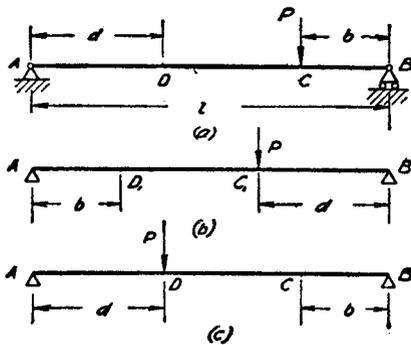


FIG. 277

la misma que la flecha en el punto  $D$  de la figura 277 (a). De la figura 277 (b), se obtiene la figura 277 (c), girando la viga  $180^\circ$ , lo que origina que el punto  $C_1$  coincida con el punto  $D$ , y el punto  $D_1$  con el punto  $C$ . Por consiguiente, la flecha en  $C$ , en la figura 277 (c), es igual a la flecha en  $D$ , en la figura 277 (a). Este es un caso

particular del teorema de la reciprocidad en el trabajo.

Para establecer el teorema en forma general<sup>1</sup>, consideraremos un cuerpo elástico. Sea el cuerpo representado en la figura 278 y supongamos que está apoyado de tal manera que le sea imposible todo movimiento como cuerpo rígido. El primer estado de fatigas lo ocasiona el sistema de fuerzas exteriores

<sup>1</sup> Un caso particular de este teorema fué obtenido por J. C. Maxwell, loc. cit., pág. 310. El teorema se debe a E. Betti, *Il nuovo cimento* (serie 2), vols. 7 y 8, 1872. En una forma más general, el teorema fué dado por lord Rayleigh, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 4, 1873, o *Scientific Papers*, vol. 1, pág. 179. Diversas aplicaciones a la solución de problemas de ingeniería han sido hechas por O. Mohr, loc. cit., página 315, y H. Müller-Breslau, loc. cit., pág. 315.

$P_1$  y  $P_2$ . El segundo lo origina el sistema  $P_3$  y  $P_4$ . El corrimiento de los puntos de aplicación en las direcciones de las fuerzas son  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  y  $\delta_4$ , en el primer estado, y  $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4$ , en el segundo estado. El teorema de la reciprocidad dice: El trabajo correspondiente a las fuerzas del primer estado para los corrimientos del segundo estado es igual al trabajo correspondiente a las fuerzas del segundo estado para los corrimientos del primero. Es decir,

$$P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2 = P_3\delta_3 + P_4\delta_4. \quad (203)$$

Para demostrar este teorema, consideraremos la energía de deformación del cuerpo cuando actúan simultáneamente todas las fuerzas  $P_1 \dots P_4$  y haremos uso de la propiedad

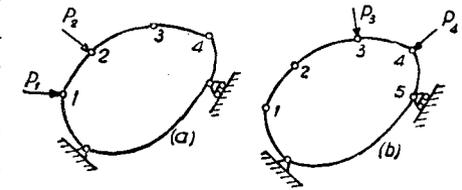


FIG. 278

de que el valor de la energía de deformación no depende del orden en que se aplican las fuerzas, sino de los valores finales que estas fuerzas alcanzan. Supongamos que primeramente se aplican las cargas  $P_1$  y  $P_2$  y después las fuerzas  $P_3$  y  $P_4$ . La energía de deformación almacenada durante la aplicación de  $P_1$  y  $P_2$  es

$$\frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2} \quad (a)$$

Aplicando ahora  $P_3$  y  $P_4$ , el trabajo suministrado por estas fuerzas es

$$\frac{P_3\delta'_3}{2} + \frac{P_4\delta'_4}{2} \quad (b)$$

Ahora bien, durante la aplicación de las fuerzas  $P_3$  y  $P_4$ , los puntos de aplicación de las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$  se habrán desplazado  $\delta'_1$  y  $\delta'_2$ . Por consiguiente,  $P_1$  y  $P_2$  realizan un trabajo

$$P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2. \quad (c)$$

<sup>1</sup> Estas expresiones no se dividen por 2 porque las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$  permanecen constantes durante el tiempo en el que sus puntos de aplicación experimentan los desplazamientos  $\delta'_1$  y  $\delta'_2$ .

La energía de deformación que en total ha almacenado el cuerpo se obtendrá sumando (a), (b) y (c); es decir,

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_3 \delta_3'}{2} + \frac{P_4 \delta_4'}{2} + P_1 \delta_1' + P_2 \delta_2'. \quad (d)$$

Si ahora suponemos que primeramente se carga el cuerpo con las fuerzas  $P_3$  y  $P_4$  y después con las  $P_1$  y  $P_2$  y repetimos el razonamiento expuesto, obtendremos

$$U = \frac{P_3 \delta_3'}{2} + \frac{P_4 \delta_4'}{2} + \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + P_3 \delta_3 + P_4 \delta_4. \quad (e)$$

Escribiendo que (d) y (e) son iguales, se obtiene la ecuación (203). Este teorema puede demostrarse cualquiera que sea el número de fuerzas y también para pares o para fuerzas y pares. En el caso de un par, el corrimiento que se considera es el ángulo de rotación correspondiente.

Para el caso particular de que en el primer estado de fatiga actúe una sola fuerza  $P_1$  y de que en el segundo estado exista únicamente la fuerza  $P_2$ , la ecuación (203) da <sup>1</sup>

$$P_1 \delta_1' = P_2 \delta_2. \quad (204)$$

Si  $P_1 = P_2$ , se deduce que  $\delta_1' = \delta_2$ , es decir, el corrimiento del punto de aplicación de la fuerza  $P_2$  en la dirección de la fuerza  $P_2$  producido por la fuerza  $P_1$  es igual al corrimiento del punto de aplicación de la fuerza  $P_1$  en la dirección de  $P_1$ , producido por la fuerza  $P_2$ . Una comprobación de esta propiedad, para un caso particular, se vió para la viga de la figura 277.

Como otro ejemplo, consideraremos la flexión de una viga apoyada. En el primer estado la supondremos flexada por la acción de una carga concentrada  $P$  aplicada en su centro; en el segundo estado, actúa sobre la viga un par flector  $M$  en su extremo. La carga  $P$  produce un giro en el extremo  $\theta = \frac{Pl^2}{16 EI}$ . El par  $M$  aplicado en el extremo produce en el centro una flecha

$$\frac{Ml^2}{16 EI}.$$

<sup>1</sup> El primero que probó esta propiedad fué J. C. Maxwell, y frecuentemente se denomina «teorema de Maxwell».

La ecuación (204) dice

$$P \frac{Ml^2}{16 EI} = M \frac{Pl^2}{16 EI}.$$

El teorema de la reciprocidad de los trabajos se emplea mucho para estudiar las líneas de influencia en los sistemas hiperestáticos. Sea, por ejemplo, una viga empotrada por un extremo y apoyada por el otro (fig. 279), sometida a la acción de una carga concentrada  $P$ . Se trata de encontrar cómo varía la reacción  $X$  cuando la carga  $P$  se mueve sobre la viga y, por consiguiente, varía la cantidad  $x$ . Consideremos el estado real de la viga —figura 279 (a)— como primer estado de fatigas. El segundo estado (ficticio) será el de la figura 279 (b). Se ha prescindido de la carga exterior y de la cantidad hiperestática  $X$  y se ha cargado la viga con una fuerza unitaria en la dirección de  $X$ . Este segundo estado es estáticamente determinado y la elástica correspondiente (véase ecuación 97, página 142) será la de la figura.

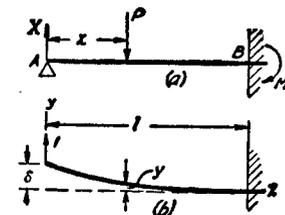


FIG. 279

Si los ejes coordenados se toman como indica la figura 279 (b), se tendrá

$$y = \frac{1}{6 EI} (l-x)^2 (2l+x). \quad (f)$$

Representemos con  $\delta$  la flecha en el extremo y con  $y$  la flecha a la distancia  $x$  del apoyo izquierdo. Aplicando el teorema de reciprocidad de los trabajos, se tiene: El trabajo de las fuerzas del primer estado para los corrimientos del segundo es

$$X\delta - Py.$$

El trabajo de las fuerzas del segundo estado para los corrimientos del primero será nulo, puesto que el punto de aplicación  $A$  de la fuerza unitaria tiene corrimiento nulo en el primer estado <sup>1</sup>. Por consiguiente,

$$X\delta - Py = 0,$$

<sup>1</sup> Las reacciones en el extremo empotrado no se consideran en ambos casos a causa de ser nulo el desplazamiento correspondiente.

de donde

$$X = P \frac{y}{\delta} \tag{g}$$

Se ve, pues, que a medida que la carga  $P$  cambia de posición, la reacción  $X$  es proporcional a los valores correspondientes de  $y$  en la figura 279 (b). Por consiguiente, la elástica del segundo estado (ecuación f) representa gráficamente el modo de variar  $X$  con  $x$ . Esta curva será la línea de influencia de la reacción  $X$ <sup>1</sup>.

Si actúan varias cargas simultáneamente, empleando el método de superposición y aplicando la ecuación (g), se tendrá

$$X = \frac{1}{\delta} \sum P_n y_n$$

donde  $y_n$  es la flecha correspondiente a la carga  $P_n$  y la suma- ción se extiende a todas las cargas.

**Problemas**

1. Construir las líneas de influencia para las reacciones en los apoyos de una viga continua sobre tres apoyos (fig. 280).

*Solución:* Para encontrar la línea de influencia de la reacción en el apoyo intermedio consideraremos como primer estado de fatiga el de la figura 280 (a). El segundo estado es el de la figura 280 (b), en el que se prescinde de la carga  $P$  y de la reacción  $X$ , y en el lugar de esta última se hace actuar una carga unitaria hacia arriba. Este segundo estado es estáticamente determinado y su elástica conocida: —ecuaciones (86) y (87), página 136—; por consiguiente, las flechas  $\delta$  e  $y$  se pueden

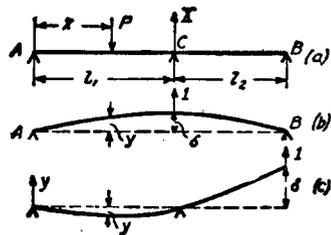


FIG. 280

calcular. El trabajo correspondiente a las fuerzas del primer estado para los corrimientos del segundo es

$$X\delta - Py.$$

El trabajo correspondiente a la fuerza unitaria del segundo estado para los corrimientos del primero (flecha cero en C) es cero; por consiguiente,

$$X\delta - Py = 0; \quad X = P \frac{y}{\delta}$$

<sup>1</sup> El empleo de modelos para la determinación de líneas de influencia ha sido desarrollado por G. E. Beggs, *Journal of Franklin Institute*, 1927.

Es decir, la elástica del segundo estado es la línea de influencia de la reacción  $X$ . Para obtener la línea de influencia de la reacción en  $B$ , el segundo estado de fatiga será el que representa la figura 280 (c).

2. Utilizando la línea de influencia del problema anterior, determinar la reacción en  $B$  si la carga  $P$  está en el centro del primer tramo ( $x = \frac{l_1}{2}$ ) —fig. 280 (a).

*Respuesta:* La reacción estará dirigida hacia abajo y valdrá

$$\frac{3P}{16} \frac{l_1^3}{l_2^3 + l_2 l_1}$$

3. Encontrar la línea de influencia correspondiente al momento flector en el apoyo central  $C$  de la viga continua sobre tres apoyos de la figura 281. Utilizar la línea hallada para averiguar el valor del momento flector  $M_c$ , cuando la carga  $P$  está en el centro del segundo tramo.

*Solución:* El primer estado de fatiga es el que origina la carga real —figura 281 (a)— con el momento flector  $M_c$  aplicado en la sección  $C$ . Para el segundo estado se quita la carga  $P$ , se corta la viga en  $C$  y se aplican dos pares unitarios en lugar de  $M_c$  —fig. 281 (b)—. Este último caso es estáticamente determinado. Los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  vienen dados por la ecuación (104), y la flecha  $y$  por la ecuación (105). La suma de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  representa el corrimiento en el segundo estado correspondiente al momento flector  $M_c$  que obra en el primer estado. El trabajo correspondiente a las fuerzas del primer estado para los corrimientos del segundo es <sup>1</sup>:

$$M_c(\theta_1 + \theta_2) - Py.$$

El trabajo correspondiente a las fuerzas del segundo estado para los corrimientos del primero es cero, puesto que en la figura 281 (a) la viga no está cortada. Por consiguiente,

$$M_c(\theta_1 + \theta_2) - Py = 0;$$

o sea

$$M_c = P \frac{y}{\theta_1 + \theta_2} \tag{h}$$

Se ve que cuando la carga  $P$  cambia de posición, el momento flector  $M_c$  varía proporcionalmente a la flecha  $y$ . Por consiguiente, la

<sup>1</sup> Se supone que el momento flector  $M_c$  produce una elástica cóncava por abajo.

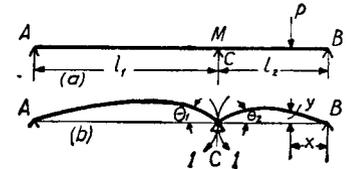


FIG. 281

elástica en el segundo estado representa la línea de influencia de  $M_c$ . Recordando que

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{l_1 + l_2}{3EI}$$

y que la flecha en el centro del segundo tramo es

$$(y)_{x=\frac{l_2}{2}} = \frac{1 \cdot l_2^3}{16EI}$$

el momento flector, cuando la carga  $P$  está en el centro del segundo tramo —ecuación (h)—, será

$$M_c = \frac{3}{16} \frac{Pl_2^2}{l_1 + l_2}$$

4. Encontrar la línea de influencia correspondiente al momento flector en el extremo empotrado de la viga  $AB$  (fig. 279) y calcular este momento cuando la carga está situada a  $x = \frac{l}{3}$  del apoyo izquierdo.

Respuesta:

$$M_b = \frac{4}{27} lP.$$

5. Construir la línea de influencia correspondiente a las reacciones horizontales  $H$  del pórtico de la figura 167 (a) cuando la carga  $P$  se mueve a lo largo de la barra  $AB$ .

Respuesta: La línea de influencia tiene la misma forma que la elástica de la barra  $AB$  para las condiciones de carga de la figura 166 (c).

6. Hallar la línea de influencia correspondiente a la tensión  $X$  en la barra horizontal  $CD$ —fig. 282 (a)— cuando la carga  $P$  se mueve a lo largo de la viga  $AB$ . Calcular  $X$  cuando la carga está en el centro de la viga. Los corrimientos debidos al alargamiento o contracción de las barras se despreciarán y sólo se considerará el corrimiento debido a la flexión de la viga  $AB$ .

Solución: El estado de carga de la figura 282 (a) se tomará como primer estado de fatiga. En el segundo estado se prescinde de la carga  $P$  y de las fuerzas  $X$ , y en el lugar de estas últimas se colocan dos fuerzas unitarias—fig. 282 (b)—. Debido a estas fuerzas, se transmitirán a la viga  $AB$  en los puntos  $F$  y  $H$  unas presiones verticales dirigidas hacia arriba de valor  $\frac{1 \cdot h}{c}$  y la viga flexará tal como se indica con líneas de trazos.

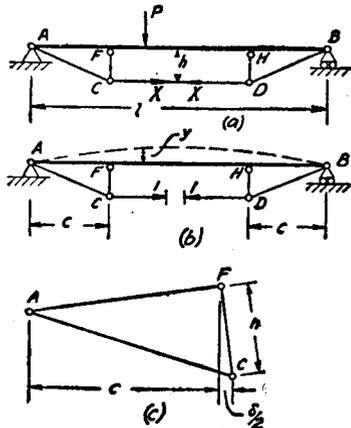


Fig. 282

Fig. 282 (a) Diagram of a portal frame with a horizontal beam  $AB$  of length  $l$  and height  $h$ . A load  $P$  is applied at point  $C$  on the beam. The horizontal reaction at the base is  $H$ . (b) Diagram showing the beam  $AB$  with two unit loads applied at points  $F$  and  $H$ , which are vertically above  $C$  and  $D$  respectively. The deflection curve is shown with dashed lines. (c) Diagram showing the beam  $AB$  with a unit load applied at point  $F$ , and the deflection curve is shown with dashed lines.

Si la flecha de la viga en el punto correspondiente a la carga  $P$  la representamos con  $y$  y  $\delta$  es el corrimiento de los puntos  $C$  y  $D$ , uno hacia el otro, en el segundo estado de fatiga, el teorema de la reciprocidad de los trabajos da

$$X\delta - Py = 0 \quad \text{o sea} \quad X = P \frac{y}{\delta} \quad (i)$$

Por consiguiente, la elástica de la viga  $AB$ , en el segundo estado, es la línea de influencia pedida. La flexión de una viga por la acción de dos cargas situadas simétricamente se analizó en el problema 1, pá. de dos cargas situadas simétricamente se analizó en el problema 1, página 151. Poniendo  $\frac{1 \cdot h}{c}$  en lugar de  $P$  en las fórmulas que obtuvimos, las flechas de la viga en  $F$  y a la mitad de la luz serán

$$(y)_{x=c} = \frac{ch}{6EI} (3l - 4c) \quad \text{y} \quad (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{h}{24EI} (3l^2 - 4c^2),$$

respectivamente.

Examinando la rotación del triángulo  $AFC$ —fig. 282 (c)— como un cuerpo rígido, se ve que el corrimiento horizontal del punto  $C$  es igual al corrimiento vertical del punto  $F$  multiplicado por  $\frac{h}{c}$ ; por consiguiente,

$$\delta = 2 \frac{h}{c} (y)_{x=c} = \frac{h^2}{3EI} (3l - 4c).$$

Sustituyendo este valor y el de la flecha a la mitad de la luz en la ecuación (i), se obtiene

$$X = \frac{P}{8h} \frac{3l^2 - 4c^2}{3l - 4c}.$$

7. Encontrar la línea de influencia correspondiente a la tensión en la barra  $CD$  del sistema representado en la figura 283, despreciando

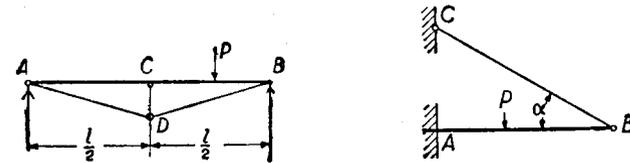


Fig. 283

Fig. 284

los corrimientos debidos a los acortamientos y alargamientos de las barras y considerando solamente la flexión de la viga  $AB$ .

Respuesta: La línea tendrá la misma forma que la correspondiente a la reacción en el apoyo central de la viga sobre tres apoyos (véase problema 1, pág. 328).

8. Construir la línea de influencia para la barra  $BC$  que atiranta a la viga  $AB$ . Hallar la tensión en  $BC$  cuando  $P$  está a la mitad de  $AB$  (fig. 284).

*Respuesta:* Despreciando los corrimientos debidos al alargamiento del tirante  $BC$  y a la contracción de la viga  $AB$ , la fuerza en  $BC$  es

$$\frac{5}{16} \frac{P}{\text{sen } \alpha}$$

72. **Casos de excepción.**—Al deducir el teorema de Castigliano y el de reciprocidad de los trabajos, se ha supuesto que los corrimientos debidos a la deformación son proporcionales a las

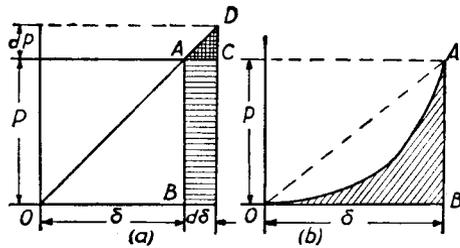


FIG. 285

cargas que obran sobre el sistema elástico. Existen casos para los que dichos corrimientos no son proporcionales a las cargas aun cuando el material de que está formado el cuerpo siga la ley de Hooke. Estos casos se presentan siempre que los corrimientos debidos a la deformación influyen en la acción de las cargas exteriores. En dichos casos, la energía de deformación no es ya una función de segundo grado y el teorema de Castigliano no es válido. Para aclarar esta limitación, vamos a considerar el caso sencillo de que solamente una carga  $P$  actúe sobre el sistema elástico. Supongamos primeramente que el corrimiento  $\delta$  es proporcional a la fuerza correspondiente  $P$ , tal como indica la línea recta  $OA$  de la figura 285 (a). El área  $OAB$  representa la energía de deformación almacenada por el sistema durante la aplicación de la carga  $P$ . Para un aumento infinitesimal  $d\delta$  en el corrimiento, la energía de deformación aumenta en la cantidad que representa el área rayada en la figura y se obtiene

$$dU = Pd\delta. \tag{a}$$

Si la ley de variación es lineal, el triángulo infinitesimal  $ADC$  es semejante al triángulo  $OAB$ ; por consiguiente,

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta}{P} \quad \text{ó} \quad d\delta = \frac{\delta dP}{P}. \tag{b}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (a),

$$dU = P \frac{\delta dP}{P},$$

de donde se deduce el teorema de Castigliano:

$$\frac{dU}{dP} = \delta. \tag{c}$$

Un caso para el que no puede aplicarse el teorema de Castigliano es el representado en la figura 286. Dos barras horizontales e iguales  $AC$  y  $BC$ , articuladas en  $A$ ,  $B$  y  $C$ , están sometidas a la acción de la fuerza vertical  $P$  aplicada en  $C$ . Sea  $C_1$  la posición de  $C$  después de la deformación y  $\alpha$  el ángulo de inclinación de cada barra en la posición deformada. El alargamiento unitario de las barras deducido de la figura 286 (a) es

$$\epsilon = \left( \frac{l}{\cos \alpha} - l \right) : l. \tag{d}$$

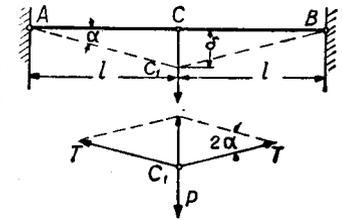


FIG. 286

Si solamente se consideran corrimientos pequeños,  $\alpha$  es pequeño y  $\frac{1}{\cos \alpha}$  vale, aproximadamente,  $1 + \frac{\alpha^2}{2}$ . Sustituyendo en (d), se tiene

$$\epsilon = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Las tensiones en las barras son

$$T = AE\epsilon = \frac{AE\alpha^2}{2}. \tag{e}$$

Por la condición de equilibrio del punto  $C_1$ —fig. 286 (b)—,

$$P = 2\alpha T, \tag{f}$$

y con el valor de  $T$ , dado por la ecuación (e),

$$P = AE\alpha^3,$$

de donde

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \tag{g}$$

y

$$\delta = l\alpha = l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}. \tag{205}$$

En este caso, el corrimiento no es proporcional a la carga  $P$ , a pesar de que el material de la barra sigue la ley de Hooke. La relación entre  $\delta$  y  $P$  está representada en la figura 285 (b) por la curva  $OA$ . El área rayada  $OAB$  en dicha figura representa la energía de deformación almacenada por el sistema. El valor de la energía de deformación es

$$U = \int_0^{\delta} Pd\delta \quad (h)$$

Sustituyendo el valor de

$$P = AE \frac{\delta^3}{l^3}, \quad (i)$$

despejado de la ecuación (205), se obtiene

$$U = \frac{AE}{l^3} \int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{AE\delta^4}{4l^3} = \frac{P\delta}{4} = \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}. \quad (l)$$

Lo que demuestra que la energía de deformación no es una función de segundo grado en la fuerza  $P$ . Tampoco vale dicha energía la mitad del producto  $P\delta$  (véase artículo 68), si no solamente su cuarta parte. El teorema de Castigliano no será válido:

$$\frac{dU}{dP} = \frac{d}{dP} \left( \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \right) = \frac{1}{3} l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} = \frac{1}{3} \delta.$$

Resultados análogos se obtienen en todos los casos en que los corrimientos no son proporcionales a las cargas.

## APÉNDICE

### MOMENTOS DE INERCIA DE LAS ÁREAS PLANAS

#### I. El momento de inercia de un área plana con relación a un eje de su plano

Al estudiar la flexión de vigas, se encontraron integrales de este tipo:

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad (1)$$

en las que cada elemento de área  $dA$  está multiplicado por el cuadrado de su distancia al eje  $z$  y la integración extendida al área  $A$  de la sección recta de la viga (fig. 1). Una integral de

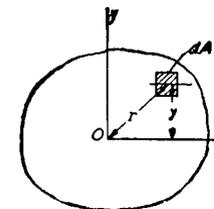


FIG. 1

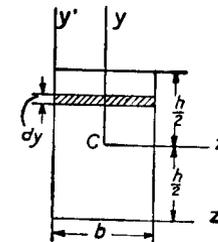


FIG. 2

esta naturaleza se denomina momento de inercia del área  $A$  con relación al eje  $z$ . En casos sencillos, los momentos de inercia se calculan analíticamente con facilidad. Sea, por ejemplo, un rectángulo (fig. 2). Para calcular el momento de inercia de este rectángulo con relación al eje horizontal de simetría  $z$ , se puede

dividir el rectángulo en elementos infinitesimales tales como el representado en la figura por el área rayada. De este modo,

$$I_z = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12} \quad (2)$$

De la misma manera, el momento de inercia del rectángulo con relación al eje  $y$  es

$$I_y = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} z^2 h dz = \frac{hb^3}{12}$$

La ecuación (2) sirve también para el cálculo de  $I_z$  en el paralelogramo representado en la figura 3, puesto que este paralelogramo puede deducirse del rectángulo representado con líneas

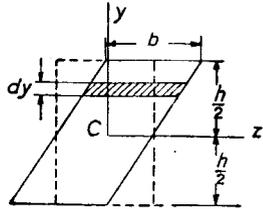


FIG. 3

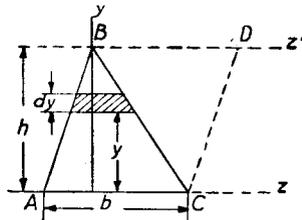


FIG. 4

de trazos por un desplazamiento paralelo al eje  $z$  de elementos tales como el rayado en la figura. Las áreas de los elementos y sus distancias al eje  $z$  permanecen invariables en el desplazamiento y, por consiguiente,  $I_z$  es igual al  $I_z$  del rectángulo.

Para calcular el momento de inercia de un triángulo con relación a su base (figura 4), tomaremos como área elemental la rayada en la figura, cuyo valor es

$$dA = b \frac{h-y}{h} dy$$

La ecuación (1) da

$$I_z = \int_0^h b \frac{h-y}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

El método de cálculo expuesto se utiliza de modo general.

El momento de inercia se obtiene dividiendo la figura en fajas infinitesimales paralelas al eje  $y$  y después integrando la ecuación (1).

El cálculo puede muchas veces simplificarse dividiendo la figura en partes cuyo momento de inercia con relación al eje se conoce. En este caso, el momento de inercia total es la suma de los momentos de inercia de las diversas partes.

El momento de inercia de un área con relación a un eje tiene las dimensiones de una longitud a la cuarta potencia, según se deduce de su definición —ecuación (1)—; por consiguiente, dividiendo el momento de inercia con relación a un cierto eje por el área de la sección y extrayendo la raíz cuadrada, se obtiene una longitud. Esta longitud se denomina radio de giro con relación a dicho eje. Para los ejes  $y$  y  $z$ , los radios de giros son

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (3)$$

Problemas

1. Encontrar el momento de inercia del rectángulo de la figura 2 con relación a su base.

Respuesta:

$$I_z = \frac{bh^3}{3}$$

2. Encontrar el momento de inercia del triángulo  $ABC$  con relación al eje  $z'$  (fig. 4).

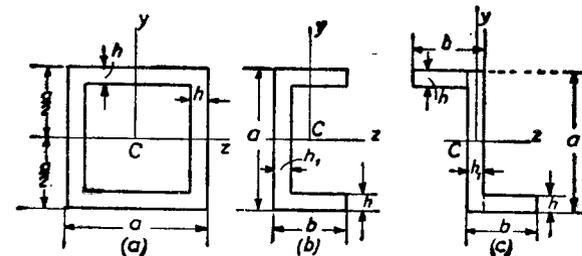


FIG. 5

Solución: Este momento es la diferencia entre el momento de inercia del paralelogramo  $ABDC$  y el del triángulo  $BDC$ . Por consiguiente,

$$I_{z'} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{4}$$

3. Encontrar  $I_z$  para las secciones de la figura 5.

Respuesta:

$$I_{z'} = \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2h)^4}{12}; \quad I_z = \frac{ba^3}{12} - \frac{(b-h_1)(a-2h)^3}{12}$$

4. Encontrar el momento de inercia de un cuadrado de lado  $a$  con relación a una diagonal.

Respuesta:

$$I = \frac{a^4}{12}.$$

5. Hallar  $k_y$  y  $k_z$  para el rectángulo representado en la figura 2.

Respuesta:

$$k_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}; \quad k_z = \frac{h}{2\sqrt{3}}.$$

6. Hallar  $k_z$  para las secciones 5 (a) y 5 (b).

## II. Momento polar de inercia de un área plana

El momento de inercia de un área plana con relación a un eje perpendicular al plano de la figura se denomina momento polar de inercia con relación al punto en que el eje corta al plano (punto  $O$  en la figura 1). Analíticamente, se define por la integral

$$I_p = \int_A r^2 dA, \quad (4)$$

según se ve, cada elemento de área  $dA$  se multiplica por el cuadrado de su distancia al eje y la integración se extiende a toda el área de la figura.

Con referencia a la figura 1,  $r^2 = y^2 + z^2$ , y por la ecuación (4),

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z. \quad (5)$$

Es decir, que el momento polar de inercia con relación a un punto  $O$  es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes rectangulares  $y$  y  $z$  que pasan por dicho punto.

Consideremos una sección circular. El momento polar de inercia de un círculo con relación a su centro se utiliza al analizar la torsión de un eje circular (véase artículo 58). Si se divide el área del círculo en anillos elementales, tal como indica la figura 6, se tiene  $dA = 2\pi r dr$ , y por la ecuación (4),

$$I_p = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (6)$$

Se ve que en este caso, en virtud de la simetría  $I_z = I_y$ ; por consiguiente, de las ecuaciones (5) y (6) se deduce

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (7)$$

El momento de inercia en la elipse, con relación al eje  $z$  (figura 7), puede obtenerse comparando la elipse con el círculo representado en la figura con línea de trazos.

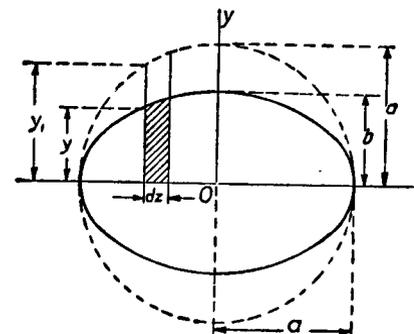


FIG. 7

La altura  $y$  de un elemento cualquiera de la elipse, tal como el rayado de la figura, puede obtenerse reduciendo la altura  $y$  del elemento correspondiente del círculo en la relación  $\frac{b}{a}$ . Según se deduce de la ecuación (2), los momentos de inercia de estos dos elementos con relación al eje  $z$  están en la relación  $\frac{b^3}{a^3}$ . Los momentos de inercia de la elipse y del círculo estarán en la misma relación; por consiguiente, el momento de inercia de la elipse es

$$I_z = \frac{\pi (2a)^4}{64} \cdot \frac{b^3}{a^3} = \frac{\pi ab^3}{4}. \quad (8)$$

Del mismo modo, para el eje vertical

$$I_y = \frac{\pi ba^3}{4};$$

el momento polar de inercia de una elipse será (ecuación 5)

$$I_p = I_y + I_z = \frac{\pi ab^3}{4} + \frac{\pi ba^3}{4}. \quad (9)$$

## Problemas

1. Hallar el momento polar de un rectángulo con relación al centro de gravedad (fig. 2).

*Respuesta:*

$$I_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}.$$

2. Hallar los momentos polares de inercia con relación a sus centros de gravedad de las áreas representadas en la figura 5.

## III. Cambio de ejes

Si se conoce el momento de inercia de un área (fig. 8) con relación a un eje  $z$  que pasa por su centro de gravedad, el momento de inercia respecto a otro eje  $z'$  paralelo al primero puede calcularse por la ecuación

$$I_{z'} = I_z + Ad^2, \quad (10)$$

donde  $A$  es el área de la figura y  $d$  la distancia entre los ejes. En efecto, por la ecuación (1),

$$I_{z'} = \int_A (y + d)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2 \int_A y d dA + \int_A d^2 dA.$$

La primera integral del segundo miembro vale  $I_z$ , la tercera integral es igual a  $Ad^2$  y la segunda integral es cero, debido a que el eje  $z$  pasa por el centro de gravedad, con lo que queda probada la ecuación (10). La ecuación (10) es muy útil para el cálculo de los momentos de inercia correspondientes a secciones de vigas compuestas (fig. 9). Las posiciones de los centros de gravedad de los angulares y los momentos de inercia de sus secciones con relación a ejes que pasan por sus centros de gravedad vienen dados en los catálogos. El cálculo de los momentos de inercia de los angulares con relación al nuevo eje  $z$  pueden hacerse fácilmente empleando la ecuación (10).

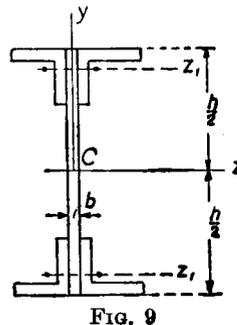


FIG. 9

## Problemas

1. Empleando la fórmula del cambio de ejes, hallar el momento de inercia de un triángulo (fig. 4) con relación al eje que pasa por el centro de gravedad y es paralelo a la base.

*Respuesta:*

$$I = \frac{bh^3}{36}.$$

2. Hallar el momento de inercia  $I_z$  de la sección representada en la figura 9 si  $h = 50$  cm.,  $b = 1,25$  cm. y los angulares son de  $10 \times 10$  cm.  $\times$  1,25 cm.

*Solución:*

$$I_z = 59453 \text{ cm.}^4.$$

3. Hallar el momento de inercia con relación a la línea neutra de la sección en  $\square$  de la figura 85.

## IV. Producto de inercia. Ejes principales

La integral

$$I_{yz} = \int_A yz dA, \quad (11)$$

en la que cada elemento de área  $dA$  se multiplica por sus coordenadas y la integración se extiende al área de una figura plana, se denomina producto de inercia de la figura. Si una figura tiene un eje de simetría y se toma como eje  $y$  o eje  $z$  (fig. 10), el producto de inercia es igual a cero. Esta propiedad se deduce de que en este caso por cada elemento  $dA$  cuya  $z$  es positiva, existe otro elemento  $dA'$  igual y simétricamente colocado, cuya  $z$  es negativa y cuya  $y$  vale lo mismo. Los productos elementales correspondientes  $yzdA$  se anulan entre sí; por consiguiente, la integral (11) se anula.

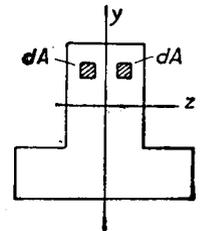


FIG. 10

En el caso general, para un punto cualquiera de una figura plana, se pueden hallar siempre dos direcciones perpendiculares para las que el producto de inercia se anule. Sean, por ejemplo, los ejes  $y$  y  $z$  (fig. 11). Si giramos los ejes  $90^\circ$  alrededor de  $O$ , en el sentido de las agujas del reloj, las nuevas posiciones de los ejes son las  $y'$  y  $z'$  de la figu-

ra. Las relaciones entre las nuevas coordenadas y las antiguas de un elemento  $dA$  son

$$y' = z; \quad z' = -y.$$

Por consiguiente, el producto de inercia para los ejes nuevos es

$$I_{y'z'} = \int_A y'z'dA = - \int_A yz dA = - I_{yz};$$

es decir, en virtud de la rotación, el producto de inercia conserva su valor, pero cambia signo. Como el producto de inercia varía de modo continuo con el ángulo de rotación, tiene que

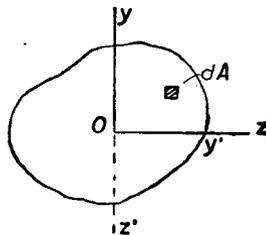


FIG. 11

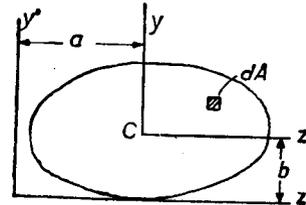


FIG. 12

existir una cierta posición comprendida entre las estudiadas, para la cual se haya anulado. Las direcciones correspondientes se denominan ejes principales. Cuando el origen de coordenadas es el centro de gravedad, las direcciones principales se denominan ejes centrales principales. Si una figura tiene un eje de simetría, este eje y el perpendicular a él son los ejes principales de la figura, puesto que el producto de inercia con relación a ellos es nulo, como hemos dicho anteriormente.

Si se conoce el producto de inercia de una figura para un par de ejes  $y$  y  $z$  (fig. 12), que pasan por su centro de gravedad, el producto de inercia para los ejes paralelos a ellos  $y'$  y  $z'$  se halla por la ecuación

$$I_{y'z'} = I_{yz} + Aab; \tag{12}$$

En efecto, las coordenadas de un elemento  $dA$ , en relación a los ejes nuevos, son

$$y' = y + b; \quad z' = z + a$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} I_{y'z'} &= \int_A y'z'dA = \int_A (y + b)(z + a)dA \\ &= \int_A yz dA + \int_A abdA + \int_A yadA + \int_A bzdA. \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales son nulas, puesto que  $C$  es el centro de gravedad de la figura y la ecuación se reduce a la expresión (12).

**Problemas**

1. Hallar  $I_{y'z'}$  para el rectángulo de la figura 2.

Respuesta:

$$I_{y'z'} = \frac{b^2h^2}{4}.$$

2. Hallar el producto de inercia del ángulo de la figura 13 con relación a los ejes  $y$  y  $z$ . Resolver la misma cuestión para los  $y_1$  y  $z_1$ .

Solución: Dividiendo la figura en dos rectángulos y empleando la ecuación (12) para cada uno de ellos, se encuentra

$$I_{yz} = \frac{a^2h^2}{4} + \frac{h^2(a^2 - h^2)}{4}.$$

Por simetría,  $I_{y_1z_1} = 0$ .

3. Determinar los productos de inercia de las secciones de la figura 5 si  $C$  es el centro de gravedad.

Solución: Para la figura 5 (a) y (b)  $I_{yz} = 0$  por la simetría. En el caso de la figura 5 (c), dividiendo la figura en tres rectángulos y aplicando la ecuación (12), se tiene

$$I_{yz} = -2(b - h_1)h \frac{a - hb}{2} \frac{b}{2}.$$

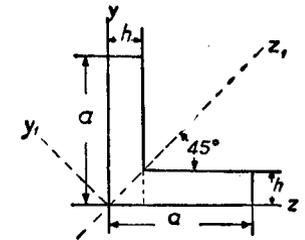


FIG. 13

**V. Cambio de dirección de los ejes. Determinación de los ejes principales**

Supongamos que los momentos de inercia

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA \tag{a}$$

y el producto de inercia

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (b)$$

son conocidos para dos ejes  $y$  y  $z$  rectangulares (fig. 14) y que se quieren hallar las mismas cantidades para los ejes nuevos  $y_1$

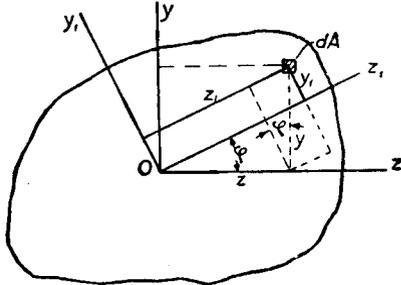


FIG. 14

y  $z_1$ . Considerando un área elemental  $dA$ , las nuevas coordenadas en función de las antiguas son

$$z_1 = z \cos \varphi + y \sin \varphi; \quad y_1 = y \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad (c)$$

siendo  $\varphi$  el ángulo que forman los ejes  $z$  y  $z_1$ .

De este modo,

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \varphi - z \sin \varphi)^2 dA = \int_A y^2 \cos^2 \varphi dA + \int_A z^2 \sin^2 \varphi dA - \int_A 2yz \sin \varphi \cos \varphi dA,$$

o, empleando (a) y (b),

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - I_{yz} \sin 2\varphi \quad (13)$$

Del mismo modo,

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi + I_{yz} \sin 2\varphi. \quad (13')$$

Sumando y restando las ecuaciones (13) y (13'), se obtiene

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y, \quad (14)$$

$$I_{z_1} - I_{y_1} = (I_z - I_y) \cos 2\varphi - 2I_{yz} \sin 2\varphi \quad (15)$$

Estas ecuaciones sirven para el cálculo de  $I_{z_1}$  e  $I_{y_1}$ . Para calcular  $I_{y_1 z_1}$ , tendremos

$$I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y \cos \varphi - z \sin \varphi)(z \cos \varphi + y \sin \varphi) dA = \int_A y^2 \sin \varphi \cos \varphi dA - \int_A z^2 \sin \varphi \cos \varphi dA + \int_A yz(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) dA,$$

o, empleando las ecuaciones (a) y (b),

$$I_{y_1 z_1} = (I_z - I_y) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi. \quad (16)$$

Los ejes principales de inercia son aquellos para los que el producto de inercia sea nulo. Por consiguiente,  $y_1$  y  $z_1$  serán los ejes principales si el segundo miembro de la ecuación (16) se anula, es decir, si

$$(I_z - I_y) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi = 0;$$

lo que da

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \quad (17)$$

Como ejemplo, determinaremos las direcciones de los ejes principales de un rectángulo referentes a uno de sus vértices (figura 2). En este caso,

$$I_x = \frac{bh^3}{3}; \quad I_y = \frac{hb^3}{3}; \quad I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{4};$$

por consiguiente,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b^2 h^2}{2\left(\frac{hb^3}{3} - \frac{bh^3}{3}\right)} = \frac{3bh}{2(b^2 - h^2)}. \quad (d)$$

Al deducir la ecuación (17), el ángulo  $\varphi$  se tomó como positivo en el sentido de las agujas del reloj (fig. 14), de modo que  $\varphi$

deberá tomarse en ese sentido, cuando al calcularle sea positivo. La ecuación (4) da dos valores diferentes para  $\varphi$ , que difieren en  $90^\circ$ . Son las dos direcciones perpendiculares de los ejes principales. Conociendo las direcciones de los ejes principales, los momentos de inercia correspondientes pueden hallarse por las ecuaciones (14) y (15). Los radios de giro correspondientes a los ejes principales se denominan radios de giro principales.

Si  $y_1$  y  $z_1$  son los ejes principales de inercia (fig. 15) y  $k_{y_1}$  y  $k_{z_1}$  los radios de giro principales, la elipse que tiene por semiejes  $k_{y_1}$

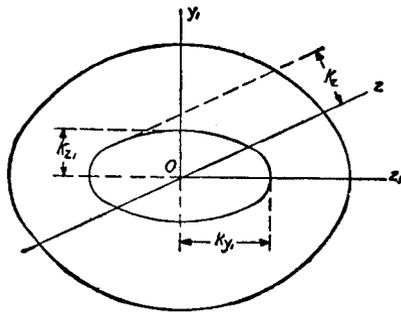


FIG. 15

y  $k_{z_1}$  se denomina elipse de inercia (fig. 15). Trazada esta elipse, el radio de giro  $k_z$  para un eje cualquiera  $z$  puede obtenerse gráficamente trazando una tangente a la elipse paralela a  $z$ . La distancia desde el origen  $O$  a esta tangente es la longitud de  $k_z$ . La elipse de inercia da idea clara de cómo varía el momento de inercia cuando el eje  $z$  gira en el plano de la figura alrededor del punto  $O$ , y muestra que los momentos de inercia máximo y mínimo acontecen para los ejes principales y se denominan momentos principales de inercia.

#### Problemas

1. Determinar las direcciones de los ejes principales para la sección en  $Z$  —fig. 5 (c)—, si  $h = h_1 = 2,5$  cm.,  $b = 12,5$  cm.,  $a = 25$  cm.
2. Hallar la dirección de los ejes centrales principales y el valor de los momentos principales de inercia correspondientes para un angular de sección  $12,5$  cm.  $\times$   $6,25$  cm.  $\times$   $1,25$  cm.

*Respuesta:*

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 0,547; \quad I_{\text{máx}} = 365,6 \text{ cm.}^4; \quad I_{\text{mín}} = 38,7 \text{ cm.}^4.$$

3. Determinar los semiejes de la elipse de inercia para una sección elíptica (fig. 7).

*Respuesta:*

$$k_z = \frac{b}{2}; \quad k_y = \frac{a}{2}.$$

4. ¿En qué condiciones la elipse de inercia se transforma en un círculo?

*Respuesta:* Cuando los momentos de inercia con relación a los ejes principales son iguales.

## ÍNDICE DE AUTORES

- Andrée, W. L.: 184.  
Andrews, E. S.: 303.  
Arnold, R. N.: 297.  
Arnovlevic, I.: 126.
- Bach, C.: 57.  
Beggs, G. E.: 328.  
Bertot: 194.  
Betti, E.: 324.  
Boussinesq, I.: 283.
- Castigliano, A.: 203, 303, 315.  
Clapeyron: 194, 300.  
Cox, H.: 282, 296.
- Davidenkoff, N. N.: 281.  
Dreyer, G.: 231.
- Engesser, F.: 232, 315.  
Esling, F. K.: 232.  
Euler, L.: 131, 243.
- Filon, L. N. G.: 111, 167.  
Finniecome, J. R.: 265.  
Föppl, A.: 59.  
Fuller, C. E.: 253.
- Green, C. E.: 138.  
Gross, S.: 203.  
Grueneisen: 7.  
Grüning, M.: 315.
- Hackstroh: 282.  
Henkel, O.: 232.  
Hooke, R.: 3.
- Johnston, W. A.: 253.  
Jouravski: 105.
- Karman, Th.: 167.  
Keck, Z.: 231.  
Kidwell, E.: 123.  
Kleinlogel: 186.
- Lamé: 300.  
Land, R.: 232.  
Landau, D.: 203.  
Lehr, E.: 203.  
Love, A. E. H.: 113.
- Marié, G.: 203.  
Maxwell, C.: 310, 324, 326.  
Menabrea, F.: 314.  
Michell, J. H.: 111.  
Mohr, O.: 37, 138, 315, 324.  
Moore, H. F.: 126.  
Müller-Breslau, H.: 315, 324.
- Navier: 93, 283.  
Nisida, M.: 297.
- Ostenfeld, A.: 253.
- Parr, P. H.: 203.  
Perry, J.: 242.  
Phillips, E.: 203.  
Pohl, K.: 232.  
Poisson: 49.
- Ramsauer, C.: 283.  
Rayleigh, lord: 324.

Roever, V.: 265.

Roš, M.: 297.

Saint Venant: 93, 105, 113, 262,  
283, 297.

Salmon, E. H.: 252.

Sears, J. E.: 283.

Southwell, R. V.: 243.

Todhunter and Pearson: 105, 203,  
252, 262, 282.

Tschetsche: 297.

Tuzi, Z.: 297.

Voigt, W.: 111.

Wagner, I.: 120.

Wahl, A. M.: 265.

Wahstaff, J. E. P.: 283.

Welter: 281.

Westergaard, H. M.: 59.

Weyrauch, T.: 301.

Young, D. H.: 249.

Zimmermann, H.: 282.