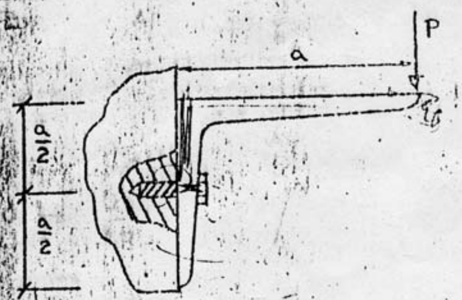
ME – 460 – Resistencia de Materiales I.

Método de energía.

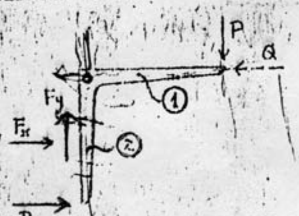
Se desea calcular el movimiento del punto extremo en la viga de ángulo mostrada en la figura, que se encuentra apernada en una muralla. Calcule por el método de la energía.

Suponer E, I, A, constantes y conocidos, al igual que P y a.



Desarrollo:

Ponemos una carga ficticia en el extremo, con el objeto de determinar la deflexión horizontal. Sea Q esa carga:



Por estática:

① ~ $F_y = P$

② ~ $F_x + R = Q \Rightarrow [F_x = Q - R]$

③ ~ $R\frac{a}{2} + Q\frac{a}{2} = Pa$ (en el perno) $\Rightarrow R = 2P - Q$

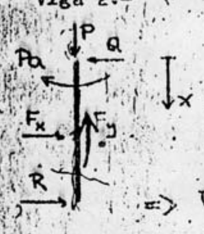
$\frac{1}{2EI}\int R\,dt$

Viga 1.-

$$M_1 = -Px \quad , \quad N_1 = -Q$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{1}{2EI}\int_0^a P^2x^2\,dx + \frac{Q^2 a}{2AE}$$

Viga 2.-



$$M_1 = Pa - Qx$$

$$M_2 = Pa - Qx + F_x(x - a/2)$$

$$N_1 = F_y = P$$

$$\Rightarrow U_2 = \frac{P^2(a/2)}{2AE} + \frac{1}{2EI}\int_0^{a/2}(Pa - Qx)^2\,dx + \frac{1}{2EI}\int_{a/2}^{a}\left(Pa - Qx + F_x(x - a/2)\right)^2dx$$

$$U_T = U_1 + U_2$$

Deflexión horizontal.

$$\delta_Q = \frac{\partial U_T}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial Q} = \frac{Qa}{AE} + \frac{1}{EI}\int_0^{a/2} (Pa - Qx)\cdot(-x)\,dx \; +$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_{a/2}^{a} \left\{Pa - Qx + F_x\,(x - a/2)\right\}\cdot\left\{(-x) + \left(x - \frac{a}{2}\right)\frac{\partial F_x}{\partial Q}\right\} dx$$

$$\delta_Q = \frac{Qa}{AE} - \frac{Pax^2}{2EI}\Big|_0^{a/2} + \frac{Qx^3}{3EI}\Big|_0^{a/2} +$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_{a/2}^{a} \underbrace{\underbrace{\left\{Pa - Qx + (2Q - 2P)\left(x - \frac{a}{2}\right)\right\}(-x + 2x - a)}_{\left\{(2P-Q)a + (Q-2P)x\right\}(x - a)}}_{(2P-Q)ax + (Q-2P)x^2 - (2P-Q)a^2 - (Q-2P)xa}\,dx \qquad (Q-2P)(x-a)^2$$

$$\delta_Q = \frac{Qa}{AE} - \frac{Pa}{2EI}\,\frac{a^2}{4} + \frac{Q}{3EI}\,\frac{a^3}{8} + \frac{1}{EI}(2P-Q)\frac{ax^2}{2}\Big|_{a/2}^{a} +$$

$$+ \frac{1}{EI}(Q-2P)\frac{x^3}{3}\Big|_{a/2}^{a} - \frac{1}{EI}(2P-Q)\,a^2x\Big|_{a/2}^{a} - \frac{1}{EI}(Q-2P)\,a\frac{x^2}{2}\Big|_{a/2}^{a}$$

$$\delta_Q = \frac{Qa}{AE} - \frac{Pa^3}{8EI} + \frac{Qa^3}{24EI} + \frac{3}{8EI}(2P-Q)a^3 + \frac{7}{24EI}(Q-2P)a^3 +$$

$$- \frac{1}{2EI}(2P-Q)a^3 - \frac{3}{8EI}(Q-2P)a^3$$

$$\delta_H = \delta_Q\Big|_{Q=0} = -\frac{Pa^3}{8EI} + \frac{6Pa^3}{8EI} - \frac{14Pa^3}{24EI} - \frac{Pa^3}{EI} + \frac{6Pa^3}{8EI}$$

$$\delta_H = \frac{Pa^3}{EI}\left[\frac{12}{8} - \frac{1}{8} - \frac{14}{24} - \frac{24}{24}\right]$$

$$\boxed{\delta_H = -\frac{5}{24}\,\frac{Pa^3}{EI}}$$

Deflexión vertical: $\theta = 0$ $\quad R = 2P$

$F_y = P \quad F_x = 2P$

$$\delta_P = \frac{\partial U_T}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^a Px^2\,dx + \frac{Pa}{2AE} + \frac{1}{EI}\int_0^{a/2} Pa^2\,dx +$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_{a/2}^{a} \underbrace{\left(Pa - 2P\left(x - \tfrac{a}{2}\right)\right)\cdot\left(a - 2\left(x - \tfrac{a}{2}\right)\right)}_{(2Pa - 2Px)\cdot(2a - 2x)}\,dx$$

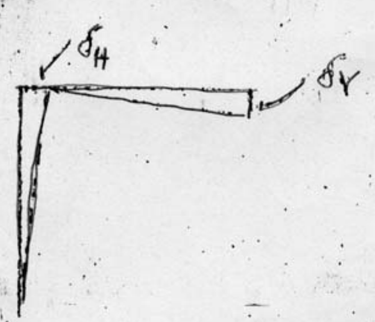
$$\delta_P = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa}{2AE} + \frac{Pa^3}{2EI} + \frac{1}{EI}\int_{a/2}^{a} 4Pa^2\,dx - \frac{1}{EI}\int_{a/2}^{a} 4Pax\,dx +$$

$$- \frac{1}{EI}\int_{a/2}^{a} 4Pax\,dx + \frac{1}{EI}\int_{a/2}^{a} 4Px^2\,dx$$

$$\delta_P = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa}{2AE} + \frac{Pa^3}{2EI} + \frac{2Pa^3}{EI} - \frac{3Pa^3}{2EI} - \frac{3Pa^3}{2EI} + \frac{7Pa^3}{6EI}$$

$$\delta_P = \frac{Pa^3}{EI}\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{7}{6}\right\} + \frac{Pa}{2AE}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_H = \frac{Pa^3}{EI} + \frac{Pa}{2AE}}$$



PREGUNTA 2

Una barra horizontal en forma de L está conectada por un alambre tenso a una viga en voladizo como se muestra en la figura 2. Si se aplica una fuerza de P=250[N] hacia abajo en el extremo del voladizo, entonces:

a) Suponiendo que la fuerza neta ejercida en el extremo libre de una viga empotrada es F, demuestre por el método de la integral que la deformación total en el extremo de la barra es:

$$\delta = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Siendo L el largo de la barra.

b) Calculando en primer lugar el valor de R, determine el descenso vertical de ambos extremos (viga superior e inferior)

HINT: Considere la deformación del alambre.

Todas las dimensiones de la figura están en milímetros. El diámetro de ambas barras es de 20 mm y el área de la sección transversal del alambre es de 0.4 mm^2. Además, el sistema está fabricado de acero con E=200[GPa] y G=80[GPa].

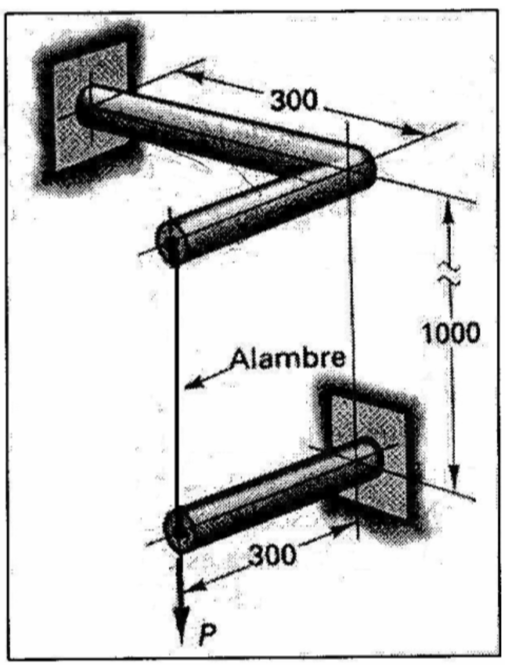


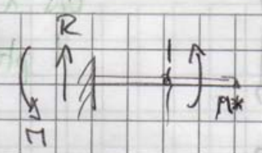
Figura 2

Pauta pregunta 2

5

$\circ R = P$

$\circ \boxed{M = PL}$



$$\left[y = \frac{1}{EI} \int\int -M(x)\,dx \right]$$

$$M^* + M - R\cdot x = 0$$

$$M^* = Rx - PL$$

$$\boxed{M^* = P(x-L)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M}{EI} \qquad \int\int P(L-x)\,dx \quad 0{,}3$$

0,3

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{-P(L-x)^2}{2} + C_1\right] = \frac{dy}{dx} \quad (1^\circ \text{ integración})$$

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{P(L-x)^3}{6} + C_1 x + C_2\right] = y(x) \quad (2^\circ \text{ integración})$$

$$y(0) = 0 \quad 0{,}15 \qquad \frac{dy}{dx}(x=0) = 0 \quad 0{,}15 \qquad (\text{condiciones})$$

$$\Rightarrow \frac{PL^3}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{PL^3}{6} \quad 0{,}3 \qquad (y(0)=0)$$

$$-\frac{P}{2}(L-\overset{0}{x})^2 + C_1 = 0 \qquad \left(\frac{dy}{dx}(0) = 0\right)$$

$$C_1 = \frac{P}{2}L^2 \quad 0{,}3$$

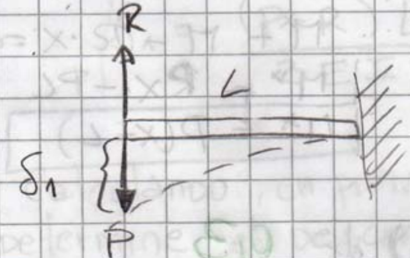
$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{P(L-x)^3}{6} + \frac{PL^2}{2}x - \frac{PL^3}{6}\right]$$

$$y(L) = \frac{1}{EI}\left[\frac{PL^3}{2} - \frac{PL^3}{6}\right] = \frac{PL^3}{3EI} \quad 0{,}3$$

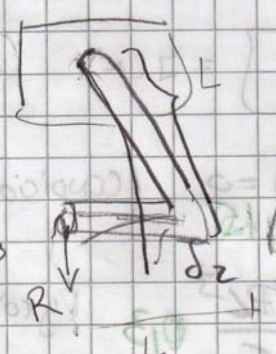
1,0

$$\boxed{\delta = \frac{PL^3}{3EI}}$$

0,5 x cada δ buena x 5
1 pto relación geométrica



$$\boxed{\delta_1 = \frac{(P-R)L^3}{3E\underset{\text{inercia}}{I}}} \Rightarrow \text{Elasticidad}$$

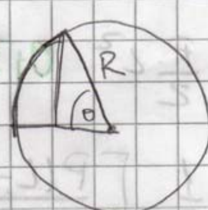


$$\boxed{\delta_2 = \frac{RL^3}{3EI}} \ *$$

$$\boxed{\delta_3 = \frac{RL^3}{3EI}} \ *$$

$$\theta = \frac{M \cdot a}{G \cdot I_P} = \frac{R \cdot L \cdot L}{G\, I_P} = \frac{RL^2}{G J_P}$$

$$\boxed{\delta_{Torsion} = L \times \frac{RL^2}{GJ}} \ *$$



$\delta = R \operatorname{sen} \theta$
$\theta \approx 0$
$\Rightarrow \delta_T = R\theta$

R

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

R

$$\boxed{\delta_{alambre} = \frac{RL_{alambre}}{AE}} \; *$$

$$\delta_1 = \delta_2 + \delta_3 + \delta_{torsion} + \delta_{alambre} \quad (1)$$

$$\frac{(P-R)L^3}{3EI} = \frac{2RL^3}{3EI} + \frac{RL^3}{GJ} + \frac{RL_{alambre}}{AE}$$

$$\frac{PL^3}{3EI} = R\left[\frac{\cancel{3}L^3}{\cancel{3}EI} + \frac{L^3}{GJ} + \frac{L_{alambre}}{AE}\right]$$

Reemplazando valores:

$$\frac{250\times 0{,}3^3}{3\times 200\times 10^9\times \frac{\pi\times 0{,}01^4}{4}} = R\left[\frac{0{,}3^3}{200\times 10^9\times \frac{\pi\times 0{,}01^4}{4}} + \frac{0{,}3^3}{80\times 10^9\times \frac{2\times\pi\times 0{,}01^4}{4}} + \frac{1}{0{,}4\times 10^{-6}\times 200\times 10^9}\right]$$

$$1{,}432\times 10^{-3} = R\left[1{,}7\times 10^{-5} + 2{,}1\times 10^{-5} + 1{,}3\times 10^{-5}\right]$$

$$\boxed{R = 28{,}078\ [N]} \quad 0{,}35$$

inferior

$$\delta_1 = \frac{(250-28{,}078)\times 0{,}3^3}{3\times 200\times 10^9\times \frac{\pi\times 0{,}01^4}{4}} = 1{,}2717\ [mm]$$

0,35

sup.

$$\delta_2 = 0{,}925\ (mm)$$