MA57C Control Óptimo. Semestre 2007-2
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Jorge Lemus, Oscar Peredo.

Clase Auxiliar #6

13 de Septiembre del 2007

1. Filtro de Kalman

Tomemos el sistema siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fn(t) \quad (1)\\ y(t) &= Cx(t) + Gn(t) \quad (2)\end{aligned}$$

donde $n(t)$ es una variable aleatoria gaussiana de media 0 y varianza 1 para t fijo, es decir,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(n(t)) &= 0 \quad (3)\\ \mathbb{E}(n(t)n(s)^T) &= \delta(t-s)I \quad (4)\end{aligned}$$

Esta variable aleatoria se llama *ruido blanco*, y representa distorsiones en el input del sistema. El objetivo es construir un estimador del estado en presencia de ruido. Para ello, se utilizara el método del **Filtro de Kalman, que consiste en un proceso predictor-corrector donde se calcula la matríz L que minimiza la varianza del error $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ y además $e(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.**
Recordemos que si $v(t)$ es una v.a. vectorial, entonces su covarianza y varianza son:

$$\begin{aligned}\Lambda(t,s) &= \mathbb{E}\left[(v(t) - \mathbb{E}v(t))(v(s) - \mathbb{E}v(s))^T\right] \quad (5)\\ \Lambda(t,t) &= \mathbb{E}\left[(v(t) - \mathbb{E}v(t))(v(t) - \mathbb{E}v(t))^T\right] \quad (6)\end{aligned}$$

1.1. Cálculo de la Varianza del Estado

Si suponemos que inicialmente, $x(0) = x_0$ tiene distribuicón normal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x_0 &\sim N(\overline{x}_0, \Lambda_0) \quad (7)\\ \overline{x}_0 &= \mathbb{E}x_0 \quad (8)\\ \Lambda_0 &= \Lambda(0,0) \quad (9)\\ &= \mathbb{E}\left[(x_0 - \overline{x}_0)(x_0 - \overline{x}_0)^T\right] \quad (10)\end{aligned}$$

Calculemos la esperanza en términos de (1)-(2):

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(Bu(s)+Fn(s))ds && (11)\\
\mathbb{E}x(t) &= e^{At}\overline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(B\mathbb{E}u(s)+F\mathbb{E}n(s))ds && (12)\\
&= e^{At}\overline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds && (13)\\
x(t)-\overline{x}(t) &= e^{At}(x_0-\overline{x}_0) + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Fn(\sigma)d\sigma && (14)
\end{aligned}$$

Usando lo anterior, calculemos la covarianza en términos de (1)-(2):

$$\begin{aligned}
\Lambda(t,s) &= \mathbb{E}\left[(x(t)-\overline{x}(t))(x(s)-\overline{x}(s))^T\right] && (15)\\
&= \mathbb{E}\left[\left(e^{At}(x_0-\overline{x}_0)+\int_0^t e^{A(t-\sigma)}Fn(\sigma)d\sigma\right)\left(e^{As}(x_0-\overline{x}_0)+\int_0^s e^{A(s-\sigma)}Fn(\sigma)d\sigma\right)^T\right] && (16)\\
&= e^{At}(\mathbb{E}(x_0-\overline{x}_0)(x_0-\overline{x}_0)^T)e^{A^Ts} + \int_0^t\int_0^s e^{A(t-\sigma)}F\underbrace{\mathbb{E}(n(\sigma)n(\tau)^T)}_{\delta(\sigma-\tau)}F^Te^{A^T(t-\tau)}d\sigma d\tau && (17)\\
&+e^{At}\int_0^s \underbrace{\mathbb{E}((x_0-\overline{x}_0)n(\sigma)^TF^T)}_{=0 \quad (*)}e^{A^T(t-\sigma)}d\sigma + \int_0^s e^{A(t-\sigma)}\underbrace{\mathbb{E}(Fn(\sigma)(x_0-\overline{x}_0)^T)}_{=0 \quad (*)}d\sigma e^{A^Tt} && (18)
\end{aligned}$$

Los últimos términos son iguales a cero (ver (∗)) pues se asume que no existe correlación entre el ruido asociado al estado y la condición inicial. De esta forma, la covarianza es de la forma:

$$\Lambda(t,s) = e^{At}(\mathbb{E}(x_0-\overline{x}_0)(x_0-\overline{x}_0)^T)e^{A^Ts} + \int_0^{\min(t,s)} e^{A(t-\sigma)}FF^Te^{A^T(t-\sigma)}d\sigma \qquad (19)$$

Y la varianza:

$$\Lambda(t,t) = e^{At}(\mathbb{E}(x_0-\overline{x}_0)(x_0-\overline{x}_0)^T)e^{A^Tt} + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}FF^Te^{A^T(t-\sigma)}d\sigma \qquad (20)$$

1.2. Cálculo de la Varianza del Error

Si se desea construir un estimador (observador) sin ruido, se tiene el siguiente sistema:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t)+Bu(t)+L(y(t)-C\hat{x}(t)) \qquad (21)$$

Reemplazando (1),(2) en (21):

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t)+(\dot{x}(t)-Ax(t)-Fn(t))+L(Cx(t)+Gn(t))-LC\hat{x}(t) && (22)\\
\dot{\hat{x}}(t)-\dot{x}(t) &= (A-LC)\hat{x}(t)-(A-LC)x(t)+(LG-F)n(t) && (23)\\
\dot{e}(t) &= (A-LC)e(t)+(F-LG)n(t) && (24)
\end{aligned}$$

Es decir, el sistema con ruido para el error con condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= (A-LC)e(t)+(F-LG)n(t) && (25)\\
e(0) &= x_0-\hat{x}_0 && (26)
\end{aligned}$$

Realizando calculos análogos a los anteriores, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
e(t) &= e^{(A-LC)t}(x_0 - \hat{x}_0) + \int_0^t e^{(A-LC)(t-\sigma)}(F - LG)n(\sigma)d\sigma & (27)\\
\mathbb{E}e(t) &= e^{(A-LC)t}(\overline{x}_0 - \hat{x}_0) & (28)\\
&= \overline{e}(t) & (29)\\
e(t) - \overline{e}(t) &= e^{(A-LC)t}(x_0 - \overline{x}_0) + \int_0^t e^{(A-LC)(t-\sigma)}(F - LG)n(\sigma)d\sigma & (30)\\
& & (31)
\end{aligned}
$$

La varianza del error, usando (14) y (20), está dada por:

$$
\begin{aligned}
\Lambda(t,t) &= e^{(A-LC)t}(\mathbb{E}(x_0 - \overline{x}_0)(x_0 - \overline{x}_0)^T)e^{(A-LC)^T t} & (32)\\
&+ \int_0^t e^{(A-LC)(t-\sigma)}(F - LG)(F - LG)^T e^{(A-LC)^T(t-\sigma)}d\sigma & (33)
\end{aligned}
$$

1.3. Cálculo de la matríz L óptima

Denotemos por $W(t, L) = \Lambda(t, t, L)$. Si tomamos $t \to \infty$ en (33) y suponemos (A, C)-observabilidad, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
W(L) &\triangleq W(\infty, L) & (34)\\
&= \int_0^\infty e^{(A-LC)\sigma}(F - LG)(F - LG)^T e^{(A-LC)^T\sigma}d\sigma & (35)
\end{aligned}
$$

Como hay (A, C)-observabilidad, la matríz L se puede escoger de manera tal que $A - LC$ sea estable, por lo tanto, usando la caracterización de Lyapunov, la matríz $W(L)$ es solución de la ecuación:

$$
(A - LC)W(L) + W(L)(A - LC)^T + (F - LG)(F - LG)^T = 0 \qquad (36)
$$

Derivemos en el sentido matricial la ecuación (36) con respecto a L:

$$
\begin{aligned}
(A - LC)\delta W(L) - \delta LCW(L) & & (37)\\
+\delta W(L)(A - LC)^T - W(L)C^T(\delta L)^T & & (38)\\
-\delta LGG^T L^T + LGG^T(\delta L)^T - \delta LGF^T - FG^T(\delta L)^T &= 0 & (39)\\
(A - LC)\delta W(L) + \delta W(L)(A - LC)^T + resto &= 0 & (40)
\end{aligned}
$$

donde $resto = -\delta LCW(L) - W(L)C^T(\delta L)^T - \delta LGG^T L^T + LGG^T(\delta L)^T - \delta LGF^T - FG^T(\delta L)^T$. Usando Lyapunov, se tiene que:

$$
\delta W(L) = \int_0^\infty e^{(A-LC)\sigma}(resto)e^{(A-LC)^T\sigma}d\sigma \qquad (41)
$$

Supongamos que se satisface la siguiente igualdad (optimalidad) para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$
< \delta W(L)x, x > = 0 \qquad (42)
$$

Es decir:

$$
2\int_0^\infty ((LGG^T - FG^T - W(L)C^T)(\delta L)^T e^{(A-LC)^T\sigma}x, e^{(A-LC)^T\sigma}x)d\sigma = 0 \qquad (43)
$$

Si tomamos $\delta L = LGG^T - FG^T - W(L)C^T$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|(LGG^T - FG^T - W(L)C^T)^T e^{(A-LC)^T\sigma} x\|^2 d\sigma &= 0 & (44)\\
LGG^T - FG^T - W(L)C^T &= 0 & (45)\\
L &= (W(L)C^T + FG^T)(GG^T)^{-1} & (46)
\end{aligned}$$

Llamando $R = GG^T, S = FG^T, Q = FF^T$, se tiene:

$$\hat{L} = (W(L)C^T + S)R^{-1} \tag{47}$$

Y la ecuación de Lyapunov para $\hat{W} \triangleq W(L)$ queda como una ecuación de Ricatti no homogénea llamada *Algebraic Ricatti Equation* (ARE):

$$(A - SR^{-1}C)\hat{W} + \hat{W}(A - SR^{-1}C)^T - \hat{W}C^T R^{-1}C\hat{W} + Q - SR^{-1}S = 0 \tag{48}$$

1.4. Resultado Principal

El teorema principal es el siguiente:

Teorema 1.1. *Si el sistema*

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fn(t)\\
y(t) &= Cx(t) + Gn(t)
\end{aligned}$$

es (A, C)-observable y (A, F)-controlable, entonces el estimador

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

construido con $L = (WC^T + S)R^{-1}$, donde $S = FG^T$, $R = GG^T$ (invertible) y $W \succeq 0$ solución de la ecuación algebraica de Ricatti (ARE) (suponiendo que existe tal solución):

$$(A - SR^{-1}C)W + W(A - SR^{-1}C)^T - WC^T R^{-1}CW + Q - SR^{-1}S = 0$$

con $Q = FF^T$, es tal que la esperanza del error $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ se va a cero cuando $t \to \infty$.

Demostración 1 (Considerando $S = 0$)**.** *Usando la ecuación (36), apliquemos $< \cdot x, x >$, con $(\overline{\lambda}, x)$ par propio de $(A - LC)^T$:*

$$\begin{aligned}
< (A - LC)Wx, x > + < W(A - LC)^T x, x > + < (F - LG)(F - LG)^T x, x > &= 0\\
< Wx, (A - LC)^T x > + < (A - LC)^T x, Wx > &= -\|(F - LG)^T x\|^2\\
< Wx, \overline{\lambda}x > + < \overline{\lambda}x, Wx > &= -\|(F - LG)^T x\|^2\\
\lambda < Wx, x > + \overline{\lambda} < x, Wx > &= -\|(F - LG)^T x\|^2\\
2Re(\lambda)\underbrace{< Wx, x >}_{\geq 0} &= -\|(F - LG)^T x\|^2
\end{aligned}$$

Si $< Wx, x >> 0$, entonces $Re(\lambda) < 0$ y $A - LC$ es estable, con lo cual $\overline{e}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.
Si $< Wx, x >= 0$, equivale a $\|(F - LG)^T x\|^2 = 0$, es decir:

$$\begin{aligned}
\|(F - LG)^T x\|^2 &= 0\\
\|F^T x\|^2 + \|G^T L^T x\|^2 &= 0\\
\|F^T x\|^2 = 0 \quad &\wedge \quad \|G^T L^T x\|^2 = 0
\end{aligned}$$

Tenemos que $L = WC^TR^{-1}$*, luego*

$$\begin{aligned} G^TR^{-1}CWx &= 0 \\ GG^TR^{-1}CWx &= 0 \\ CWx &= 0 \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que si $(\overline{\lambda}, x)$ *es par propio de* $(A - LC)^T$*, se tiene:*

$$\begin{aligned} (A - LC)^Tx &= \overline{\lambda}x \\ A^Tx - C^TL^Tx &= \overline{\lambda}x \\ A^Tx - C^TR^{-1}CWx &= \overline{\lambda}x \\ A^Tx &= \overline{\lambda}x \end{aligned}$$

es decir, $(\overline{\lambda}, x)$ *tambien es par propio de* A^T*. Ahora, usando* $F^Tx = 0$*:*

$$\begin{aligned} F^Tx &= 0 \\ F^T\overline{\lambda}x &= 0 \\ F^TA^Tx &= 0 \\ F^TA^T\overline{\lambda}x &= 0 \\ F^T(A^T)^2x &= 0 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ F^T(A^T)^{n-1}x &= 0 \end{aligned}$$

Es decir,

$$Ker\left(\begin{bmatrix} F^T \\ F^TA^T \\ \vdots \\ F^T(A^T)^{n-1} \end{bmatrix}\right) \neq \{0\}$$

Esto contradice la (A, F)*-controlabilidad del enunciado, con lo cual* $Re(\lambda) < 0.\square$