

MA55F

Informe de la Escuela de Análisis Variacional del curso dictado
por el profesor Boris Mordukhovic

Sebastián Donoso Fuentes
Profesores: Rafael Correa y Héctor Ramírez C.

16 de diciembre de 2008

Índice

1. Introducción	2
2. Introducción al trabajo	3
3. Definiciones introductorias	3
4. Extensión de principios variacionales a multiaplicaciones	4
5. Algunos elementos básicos de diferenciación generalizada	5
6. Condiciones de existencia	7
7. Aplicaciones	7
7.1. Condiciones de optimalidad	7
8. Problemas Abiertos	8
9. Bibliografía	9

1. Introducción

Este informe es realizado para el curso MA55F Técnicas de Análisis Variacional , dictado por los profesores Rafael Correa y Héctor Ramírez C. En él se presentan los principales resultados del curso expuesto por el profesor Boris Mordukhovich , en la escuela de Análisis Variacional realizada durante el 6 y el 19 de Noviembre del 2008.

En el curso , Técnicas de Análisis Variacional vimos algunos resultados (principio variacional de Ekeland, Regla de Fermat) para una función a valores en $\mathbb{R} \cup \infty$ s.c.i e inf acotada. Lo expuesto por el profesor Mordukhovich resulta ser una continuación natural del curso, extendiendo los resultados más importantes a multiaplicaciones. Lo mostrado en el curso se basa en el paper Relative Pareto minimizers for multiobjective problems:existence and optimality conditions *Truong Q. Bao and Boris Mordukhovich*.

2. Introducción al trabajo

EL objetivo del trabajo expuesto, es estudiar la existencia de minimizadores (se especifica luego en qué sentido) y generalizar condiciones de optimalidad para problemas de optimización donde se trabaja ya no sólo con una función, sino que con una multiaplicación. Para ello, primero se introducen algunas definiciones básicas para poder enunciar teoremas y principios esenciales para lograr lo requerido.

3. Definiciones introductorias

Sea Z Banach y $\Theta \subset Z$ un cono convexo cerrado. En Z consideramos el orden parcial inducido por Θ , este es:

$$z_1 \leq z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Theta \quad (1)$$

Definición 1 Sea $\Xi \subset Z$. Decimos que el punto $\bar{z} \in \Xi$ es un mínimo de Pareto para Ξ si

$$(\bar{z} - \Theta) \cap \Xi = \bar{z} \quad (2)$$

Si Θ es un cono puntiagudo ($\Theta \cap (-\Theta) = \{0\}$) la definición anterior equivale a

$$(\bar{z} - \Theta) \cap \Xi \subset \bar{z} + \Theta \quad (3)$$

Definición 2 Si $\text{int}\Theta \neq \emptyset$. Decimos que el punto $\bar{z} \in \Xi$ es un mínimo débil de Pareto para Ξ si

$$(\bar{z} - \text{int}\Theta) \cap \Xi = \emptyset \quad (4)$$

La condición $\text{int}\Theta \neq \emptyset$ es muy restrictiva desde el punto de vista de los problemas de optimización, puesto que muchos de estos pueden ser escritos como problemas con órdenes inducidos por conos convexos con interior vacío (esto tanto en dimensión finita como en dimensión infinita). Por esta razón aparece con importancia el concepto de interior relativo. El interior relativo de Θ , denotado $ri\Theta$, es el interior de Θ , relativo a $\overline{\text{cono}}(\Theta)$ (la envoltura convexa cerrada de Θ). Se tiene que en dimensión finita, $ri\Theta \neq \emptyset$. Aun con esta definición se tiene por ejemplo que en los espacios L_p y l_p $1 \leq p < \infty$ hay conos con interior relativo \emptyset . Por ello, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 3 (*interior quasi relativo*)

$$q_{ri}\Theta = \{z \in Z / \overline{\text{cono}}(\Theta - z) \text{ es un subespacio lineal}\} \quad (5)$$

Donde $\overline{\text{cono}}(\Theta - z)$ es la envoltura cónica cerrada de $\Theta - z$.

Se prueba que $q_{ri}\Theta \neq \emptyset$ para todo conjunto convexo y cerrado $\Theta \neq \emptyset$ en un espacio de Banach separable.

Definición 4 (*interior relativo intrínseco*) Definimos el interior intrínseco relativo como:

$$iri\Theta = \{z \in Z / \text{cono}(\Theta - z) \text{ es un subespacio lineal}\} \quad (6)$$

Se tienen las inclusiones

$$ri\Theta \subset iri\Theta \subset gri\Theta \quad (7)$$

Definición 5 Definimos cuando $\{0\} \neq \Theta \subset Z$.

$\bar{z} \in \Xi$ es un minimo relativo de Ξ si

$$(\bar{z} - ri\Theta) \cap \Xi = \phi, \quad ri\Theta \neq \phi \quad (8)$$

$\bar{z} \in \Xi$ es un minimo intrínstico relativo de Ξ si

$$(\bar{z} - iri\Theta) \cap \Xi = \phi, \quad iri\Theta \neq \phi \quad (9)$$

$\bar{z} \in \Xi$ es un minimo quasi relativo de Ξ si

$$(\bar{z} - gri\Theta) \cap \Xi = \phi, \quad gri\Theta \neq \phi \quad (10)$$

Queremos estudiar soluciones para problemas de optimización de multiaplicaciones (definiremos ahora cuál es el sentido de minimalidad).

Sea $F : \rightrightarrows Z$ una multiaplicación con $dom F := \{x \in X | F(x) \neq \phi\} \neq \phi$, sea $\Theta \subset Z$ que ordena Z y definamos $Min\Xi$ como el conjunto de todos los mínimos de Pareto de Ξ . Equivalentemente

$$Min\Xi = \{\bar{z} \in \Xi | \bar{z} - z \notin \Theta \text{ cuando } z \in \Xi, z \neq \bar{z}\} \quad (11)$$

4. Extensión de principios variacionales a multiaplicaciones

En esta sección introduciremos algunos elementos necesarios para enunciar el principio variacional de Ekeland (que se vio en el curso de Técnicas de Analisis Variacional para una función s.c.i, inf acotada a valores en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) para multiaplicaciones.

Definición 6 Decimos que.

- Θ tiene la propiedad de normalidad si el conjunto $(B + \Theta) \cap (B - \Theta)$ es acotado en Z (B es la bola unitaria cerrada).
- F es epicerrado si su epigrafo, $epiF := \{(x, z) \in X \times Z | z \in F(x) + \Theta\}$ es cerrado en $X \times Z$
- F es nivel-cerrado si sus z -conjuntos de nivel

$$L(z) := \{x \in X | \exists v \in F(x) \text{ t.q. } v \leq z\} = \{x \in X | F(x) \cap (z - \Theta) \neq \phi\}$$

son cerrados en X para todo $z \in Z$

- F es quasi acotado por abajo si $\exists M \subset Z$, con M acotado tal que $F(X) \subset M + \Theta$.
- F tiene la propiedad de dominación en $\bar{x} \in dom F$ si $F(x) \subset MinF(x) + \Theta$ i.e $\forall z \in F(\bar{x}) \exists v \in MinF(x)$ tal que $v \leq z$.
- Decimos que F satisface la condición de monotonía en el límite en \bar{x} si para cada secuencia de pares $\{(x_k, z_k)\} \subset grafo F$ con $x_k \rightarrow \bar{x}$ cuando $k \rightarrow \infty$ se tiene la implicancia:

$$[z_{k+1} \leq z_k \forall k \in \mathbb{N}] \rightarrow [\exists \bar{z} \in MinF(\bar{x}) \text{ tal que } \bar{z} \leq z_k] \quad (12)$$

Proposición 1 (condición suficiente para monotonía en el límite) Para F se cumple la monotonía en el límite en \bar{x} en cualquiera de los siguientes casos:

- a) F tiene la propiedad de dominación en \bar{x} y el conjunto $\text{Min}F(\bar{x})$ es compacto
- b) F es quasi acotado por abajo, $\text{Min}F(\bar{x})$ es cerrado y el cono Θ tiene un base compacta.

Definición 7 (minimos aproximados). Sea $F : X \rightrightarrows Z$, Z Banach ordenado por un cono Θ . Luego:

(i) Decimos que el par $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{grafo}F$ es un minimizador para F si \bar{z} es un minimo del conjunto imagen $F(X) := \bigcup_{x \in X} F(x)$ i.e.,

$$(\bar{z} - \Theta) \cap F(X) = \{\bar{z}\} \quad (13)$$

(ii) Dado $\epsilon > 0$ y $\xi \in \Theta \setminus \{0\}$ decimos que $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{grafo}F$ es un aproximado $\epsilon\xi$ -minimizador para F si:

$$z + \epsilon\xi \not\leq \bar{z} \forall z \in F(x) \text{ con } x \neq \bar{x}$$

(iii) Dado $\epsilon > 0$ y $\xi \in \Theta \setminus \{0\}$ decimos que $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{grafo}F$ es un aproximado $\epsilon\xi$ -minimizador estricto para F si existe $0 < \tilde{\epsilon} < \epsilon$ tal que (\bar{x}, \bar{z}) es un $\epsilon\xi$ -minimizador.

Con los requerimientos ya escritos enunciamos el teorema:

Teorema 1 (versión del principio variacional de Ekeland para multiaplicaciones). Sea $F : X \rightrightarrows Z$ una multiaplicación con X y Z Banach. Z parcialmente ordenado por un cono propio cerrado y convexo $\Theta \subset Z$, que cumple $\Theta \setminus (-\Theta) \neq \emptyset$ (esto dice que Θ no es un subespacio lineal de Z). Supongamos que F es quasi acotado por abajo, de nivel-cerrado, y satisface la condición de monotonía en el límite en $\text{dom}F$. Luego, para cualquier $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$, $\xi \in \Theta \setminus (-\Theta)$ y $(x_0, z_0) \in \text{grafo}F$ existe $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{grafo}F$ satisfaciendo:

$$\bar{z} - z_0 + \frac{\epsilon}{\lambda} \|\bar{x} - x_0\| \xi \leq 0, \bar{z} \in \text{Min}F(\bar{x}) \text{ y} \quad (14)$$

$$z - \bar{z} + \frac{\epsilon}{\lambda} \|\bar{x} - x_0\| \xi \not\leq 0 \forall (x, z) \in \text{grafo}F \text{ t.q } (x, z) \neq (\bar{x}, \bar{z}) \quad (15)$$

Si además, (x_0, y_0) es un $\epsilon\xi$ -minimizador para F , entonces \bar{x} puede ser elegido tal que

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \lambda.$$

5. Algunos elementos básicos de diferenciación generalizada

Es necesario generalizar los conceptos básicos de diferenciabilidad, para funciones (y multiaplicaciones) que no son suaves. Estas herramientas serán clave al momento de enunciar teoremas de existencia (de mínimos) y de condiciones de optimalidad.

Definición 8 Decimos que Z Banach es un espacio de Asplund si cada subespacio separable tiene un dual separable.

Se tiene que un espacio con dual separable es Asplund y si es Frechet diferenciable (con alguna norma equivalente) en $x \neq 0$ también es Asplund.

Dado $\Omega \subset X$ cerrado y $\bar{x} \in \Omega$, definimos el cono normal de Frechet en \bar{x} como:

$$\widehat{N}(\bar{x}, \Omega) := \{x^* \in X^* \mid \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leq 0\} \quad (16)$$

El límite superior de Painlevé-Kuratowsky para una multiaplicación del espacio en su dual viene dado por:

$$\text{Limsup}_{x \rightarrow \bar{x}} F(x) := \{x^* \in X^* \mid \text{existen secuencias } x_k \rightarrow x \text{ y } x_k^* \rightarrow x^* \text{ con } x_k^* \in F(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}\} \quad (17)$$

Así definimos el cono normal a $\bar{x} \in \Omega$ como

$$N(\bar{x}, \Omega) := \text{Limsup}_{x \rightarrow \bar{x}} \widehat{N}(x, \Omega) \quad (18)$$

Definición 9 . Sean Ω_1 y Ω_2 dos conjuntos cerrados en X Asplund. Decimos que $\bar{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ es localmente extremo para el sistema $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ si existe V vecindad \bar{x} tal que $\forall \epsilon > 0$ existe $\|a\| < \epsilon$ con

$$\Omega_1 \cap (\Omega_2 + a) \cap V = \emptyset \quad (19)$$

Proposición 2 (El principio extremal). Sea \bar{x} un punto extremal del sistema $\{\Omega_1, \Omega_2\}$, con Ω_1 y Ω_2 cerrados. Luego para cada $\epsilon > 0$ existen

$$x_i \in \Omega_i \cap (\bar{x} + \epsilon B) \text{ y } x_i^* \in \widehat{N}(x_i, \Omega_i) \quad i = 1, 2.$$

satisfaciendo las relaciones

$$1 - \epsilon \leq \|x_1^*\| + \|x_2^*\| \leq 1 + \epsilon, \quad \|x_1^* + x_2^*\| \leq \epsilon$$

Para lo que sigue introduzcamos las siguientes definiciones:

Definición 10 (epigrafo) $\text{epi}(F) := \{(x, z) \in X \times Z \mid z \in F(x) + \Theta\}$
(multiaplicación epigráfica de F) $\varepsilon_F(x) := \{z \in Z \mid z \in F(x) + \Theta\}$. Se tiene $\text{grafo} \varepsilon_F = \text{epi} F$.

Definición 11 Consideramos $F : X \rightrightarrows Z$ (Z no necesariamente ordenado). Definimos la coderivada normal de F en $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{grafo} F$ como

$$D^*F(\bar{x}, \bar{z})(z^*) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -z^*) \in N((\bar{x}, \bar{z}), \text{grafo} F)\} \quad (20)$$

y la coderivada de Frechet en $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{grafo} F$ como

$$\widehat{D}^*F(\bar{x}, \bar{z})(z^*) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -z^*) \in \widehat{N}((\bar{x}, \bar{z}), \text{grafo} F)\}. \quad (21)$$

Ahora para Z ordenado por Θ , definimos el subdiferencial de Frechet de F en (\bar{x}, \bar{z}) y el subdiferencial normal de F en (\bar{x}, \bar{z}) como:

$$\widehat{\partial}F(\bar{x}, \bar{z}) := \{x^* \in X^* \mid x^* \in \widehat{D}^*\varepsilon_F(\bar{x}, \bar{z})(z^*), \quad -z^* \in N(0; \Theta), \quad \|z^*\| = 1\} \quad (22)$$

$$\partial F(\bar{x}, \bar{z}) := \{x^* \in X^* \mid x^* \in D^*\varepsilon_F(\bar{x}, \bar{z})(z^*), \quad -z^* \in N(0; \Theta), \quad \|z^*\| = 1\} \quad (23)$$

Culminamos enunciando el principio variacional en su forma subdiferencial.

Teorema 2 (principio variacional subdiferencial). Sea $F : X \rightrightarrows Z$ (ordenado por Θ), y Z Asplund. Luego, para cada $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ $\xi \in \Theta \setminus (-\Theta)$, $\|\xi\| = 1$ y $(x_0, z_0) \in \text{grafo} F$ ϵ -minimizador para F , existe $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{grafo} F$ tal que

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \lambda \quad \text{y} \quad \widehat{\partial}F(\bar{x}, \bar{z}) \cap \frac{\epsilon}{\lambda} B^* \neq \emptyset \quad (24)$$

6. Condiciones de existencia

En esta parte enunciamos algunas propiedades que aseguran la existencia de minimizadores.

Definición 12 $F : X \rightrightarrows Z$ (ordenado por Θ) satisface la condición P-S ssi $\forall \{x_k\} \subset \text{dom} F$ satisfaciendo

$$\exists z_k \in F(x_k), \quad x_k^* \in \partial F(x_k, z_k), \quad \|x_k^*\| \rightarrow 0 \quad (25)$$

se tiene que contiene una subsucesión convergente siempre que $\{z_k\} \subset Z$ sea quasicotada por abajo.

La condición refinada de P-S es análoga, considerando $x_k^* \in \partial \widehat{F}(x_k, z_k)$.

Teorema 3 (Existencia de minimizadores intrínsecos). Sea $F : X \rightrightarrows Z$ con X y Z Asplund. Sea Θ que ordena Z , tal que $\Theta \setminus (-\Theta) \neq \emptyset$. Supongamos que F tiene la condición refinada de P-S, la monotonía en el límite, es epicerrada y quasicotada por abajo. Luego, F admite minimizadores intrínsecos relativos, siempre que $\text{iri}\Theta \neq \emptyset$.

7. Aplicaciones

7.1. Condiciones de optimalidad

Notemos que si tenemos el problema

$$\min_{\Theta} F(x) \quad \text{s.a } x \in \Omega \subset X \quad (26)$$

lo podemos reescribir como

$$\min_{\Theta} \widetilde{F}(x) \quad (27)$$

con $\widetilde{F}(x) = F(x) + \chi(x, \Omega)$ con

$$\chi(x, \Omega) = \begin{cases} \{0\} & x \in \Omega \\ \phi & x \notin \Omega \end{cases}$$

Así podemos trabar s.p.g con un problema del tipo ().

Así, tenemos el problema $\min F(x)$ con $F : X \rightrightarrows Z$. Una condición de optimalidad global es $(z - \Theta) \cap F(X) = \emptyset$. Una condición de optimalidad local es $(z - \Theta) \cap F(U) = \emptyset$ con U una vecindad de x tal que $(x, z) \in \text{gr} F$. Cuando es un mínimo de Pareto la condición es $\bar{z}\Theta \cap F(U) = \{\overline{\text{linez}}\} \Leftrightarrow (\bar{z} - \tilde{\Theta}) \cap F(U) = \emptyset$ con $\tilde{\Theta} = \Theta \setminus \{0\}$.

Definición 13 (SNC). Decimos que Ω es secuencialmente compacto en $\bar{x} \in \Omega$ si

$$[x_k \rightarrow \bar{x}, \quad x_k^* \in \widehat{N}(x_k, \Omega), \quad x_k^* \rightarrow 0] \Rightarrow \|x_k^*\| \rightarrow 0 \quad (28)$$

Definición 14 (PSNC). Sea $F : X \rightrightarrows Z$, $\text{gr} F \subset X \times Z$ es parcialmente SNC ssi

$$[(x_k, z_k) \rightarrow (\bar{x}, \bar{z}), \quad x_k \rightarrow *0, \quad \|z_k^*\| \rightarrow 0, \quad (x_k^*, z_k^*) \in \widehat{N}((x_k, z_k); \text{gr} F)] \Rightarrow \|x_k^*\| \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty \quad (29)$$

Ahora culminamos todo lo anterior mostrando una versión de la regla de Fermat ($f' = 0$) generalizada para multiaplicaciones.

Teorema 4 (*regla generalizada de Fermat*). Sea $F : X \rightrightarrows Z$ con Z ordenado por Θ . Supongamos que X y Z son Asplund y $\text{Grafo} F$ es cerrado. Si (\bar{x}, \bar{z}) es un minimizador local, se tiene

$$0 \in D^*F(\bar{x}, \bar{z})(z^*) \text{ con algún } -z^* \in N(0; \Theta) \text{ y } \|z^*\| = 1 \quad (30)$$

es necesaria para la optimalidad local de $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{grafo} F$ para F en los siguientes casos:

- (\bar{x}, \bar{z}) es un minimizador de Pareto, siempre que $\Theta \setminus (-\Theta) \neq \emptyset$ y que Θ es SNC en el origen o F^{-1} es PSNC en (\bar{z}, \bar{x}) .
- (\bar{x}, \bar{z}) es un minimizador quasi relativo, siempre que Θ es SNC en el origen o F^{-1} es PSNC en (\bar{z}, \bar{x}) .
- (\bar{x}, \bar{z}) es un minimizador intrínseco relativo, siempre que Θ es SNC en el origen o F^{-1} es PSNC en (\bar{z}, \bar{x}) .
- (\bar{x}, \bar{z}) es un mínimo primario relativo, siempre que la clausura afín de Θ sea de codimensión finita en Z o F^{-1} es PSNC en (\bar{z}, \bar{x}) .
- (\bar{x}, \bar{z}) es un mínimo local débil de Pareto. Mas aún, en este caso se tiene la condición de optimalidad necesaria

$$0 \in \partial F(\bar{x}, \bar{z}) \quad (31)$$

8. Problemas Abiertos

A lo largo del paper desarrollado por Boris Mordukhovich, se presentan una serie de teoremas para existencia de minimizadores débiles, primarios relativos e intrínsecos relativos. El problema de existencia de minimizadores quasi relativos es hoy un problema abierto.

9. Bibliografía

[1]T.Q Bao, B.S. Mordukhovich, Relative Pareto Minimizers for multiobjective problems: existence and optimality condition.

[2]T.Q Bao, P.Gupta and B.S. Mordukhovich, Necessary conditions in multiobjective optimization with equilibrium constraint,*J.Optim. Theory Appl* 135(2007), 179-203.

[3]T.Q Bao, B.S. Mordukhovich, Variational principles for set-valued mappings with applications to multiobjective optimization, *Control and Cybernetics*. 36(2007), 531-562

[4]B.S Mordukhovich , *Variational Analysis and Generalized Differentiation I:Basic Theory*, Grundlehren Series(Fundamental Principles of Mathematical Sciences) 331,Springer, Berlín 2006.

[5]B.S Mordukhovich , *Variational Analysis and Generalized. Differentiation II:Aplications*, Grundlehren Series(Fundamental Principles of Mathematical Sciences) 331,Springer, Berlín 2006.

[6]J.M Borwein and Q.J. Zhu, *Techniques of Variational Analysis*, CMS Books in Mathematics 20, Springer, New York, 2005.