



Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática

Informe de Técnicas del Análisis Variacional

Análisis No-Diferencial y Aplicaciones a la Economía

Autor:

Cristopher HERMOSILLA

Profesores:

Rafael CORREA

Héctor RAMÍREZ

17 de diciembre de 2008

Índice general

| | |
|--|----------|
| 1. Introducción | 2 |
| 2. Principales Resultados | 3 |
| 2.1. El Segundo Teorema del Bienestar para una cantidad finita de bienes | 3 |
| 2.1.1. Cono Normal de Mordukhovich | 3 |
| 2.1.2. Teorema y resultados afines | 3 |
| 2.2. El Segundo Teorema del Bienestar para un Espacio de Bienes | 5 |
| 2.3. La existencia de un costo marginal de equilibrio | 6 |
| 3. Problemas Abiertos | 7 |

Capítulo 1

Introducción

El presente informe pretende dar una descripción del curso *Nonsmooth analysis and applications in economic theory* dictado por el profesor JEAN MARC BONNISSEAU en el marco de la Escuela en Análisis Variacional realizada en el período del 6 al 19 de noviembre del presente año.

En primer lugar, se presentarán algunos de los principales resultados mostrados en el curso que fueron expuestos en la primera parte, pues la segunda fue, a grandes rasgos, una extensión y generalización de la primera. De dichos problemas, se dará una pequeña contextualización y se mencionarán las herramientas del cálculo variacional utilizadas para obtener tales resultados. Cabe mencionar, que se dará un mayor énfasis al *Segundo Teorema de la Economía del Bienestar* debido a la importancia que éste tiene dentro de la teoría económica moderna.

En una segunda parte, se presentarán dos problemas abiertos relacionados con el tema, identificados durante el estudio de dicho curso y por lo planteado por el profesor Bonnisseau. El primer problema aparece en el estudio del *Segundo Teorema de la Economía del Bienestar* y el segundo aparece en el estudio de la existencia de un costo marginal de equilibrio en una economía, y ambos son consecuencia de la búsqueda de resultados más generales para la teoría.

Capítulo 2

Principales Resultados

Los principales resultados que se expondrán serán:

- El Segundo Teorema del Bienestar para una cantidad finita de bienes
- El Segundo Teorema del Bienestar para un espacio de bienes
- La existencia de un costo marginal de equilibrio

2.1. El Segundo Teorema del Bienestar para una cantidad finita de bienes

Previo a exponer los resultados mencionados debemos definir el cono normal de Mordukhovich, que es la herramienta variacional fundamental utilizada en este resultado.

2.1.1. Cono Normal de Mordukhovich

Primero, definamos el cono vectores perpendiculares de $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ en el punto $y \in Y$, denotado por $N_Y^P(y)$ que está dado por el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : \exists \rho > 0, B(y + \rho x, \rho \|x\|)\} \cap Y = \emptyset$

Con esto podemos definir el cono normal de Mordukhovich y el de Clarke como siguen:

- Cono normal de Mordukhovich: $N_Y^L(y) = \limsup_{y' \in Y, y' \rightarrow y} N_Y^P(y')$
- Cono normal de clarke: $N_Y^C(y) = \text{Adh}(\text{Co}\{N_Y^L(y)\})$

Definamos además, el gradiente límite generalizado $\partial^L f(x)$ de f en x por:

$$\partial^L f(x) = \{\zeta \in \mathbb{R}^N : (\zeta, -1) \in N_{\text{epi}f}^L(f(x), x)\}$$

2.1.2. Teorema y resultados afines

Supongamos que existen k bienes, n firmas con producción $Y_j \subseteq \mathbb{R}^k \forall j = 1 \dots n$, m consumidores con demanda $X_i \subseteq \mathbb{R}^k \forall i = 1 \dots m$ y $e \in \mathbb{R}^k$ la dotación inicial.

Consideremos la multifunción P_i definida de X_i en X_i que describe la preferencia, es decir, si $x'_i \in P_i(x_i)$ entonces x'_i es estrictamente preferida que x_i .

Diremos que un punto $((x_i), (y_j)) \in (\mathbb{R}^k)^{n+m}$ es una distribución factible si, para cada i $x_i \in X_i$ y para cada j $y_j \in Y_j$ y además se satisface la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^m x_i = e + \sum_{j=1}^n y_j$$

Es decir, que la cantidad demandada sea igual a la cantidad ofertada más la dotación inicial.

Diremos que una distribución $((x_i^*), (y_j^*)) \in (\mathbb{R}^k)^{n+m}$ es Pareto eficiente si es factible y además no existe otra distribución factible $((x_i), (y_j)) \in (\mathbb{R}^k)^{n+m}$ tal que $x_i \in AdhP_i(x_i) \forall i = 1...m$ y $x_{i_0} \in P_{i_0}(x_{i_0}^*)$ para al menos un i_0 , es decir, que no es posible asignar distribución estrictamente preferida a un consumidor, sin necesariamente tener que asignar algo que prefiera menos a otro consumidor.

El *Segundo Teorema de Bienestar* dice que dada una distribución Pareto eficiente de recursos existen precios y dotaciones iniciales tales que esta asignación es el equilibrio competitivo¹ correspondiente.

Luego tenemos:

Teorema (Khan, 1999):

Sea una distribución $((x_i^*), (y_j^*)) \in (\mathbb{R}^k)^{n+m}$ Pareto eficiente. Supongamos que:

1. (*Local Nonsatiation*) $\forall i, x_i^* \in AdhP_i(x_i^*)$
2. (*Constraint Qualification*) $\exists i_0 \in \{1, \dots, m\}, v \in \mathbb{R}^k$ y $\delta > 0$ tales que $\forall \lambda \in (0, \delta)$:

$$\lambda v + \sum_{i=1}^m (AdhP_i(x_i^*) \cap B(x_i^*, \delta)) - \sum_{j=1}^n (AdhY_j \cap B(y_j^*, \delta)) \subseteq P_{i_0}(x_{i_0}^*) + \sum_{i \neq i_0}^m AdhP_i(x_i^*) - \sum_{j=1}^n Y_j$$

Entonces $\exists p^* \neq 0$ tal que:

1. $-p^* \in N_{AdhP_i(x_i^*)}^L(x_i^*) \forall i = 1, \dots, m$
2. $p^* \in N_{AdhY_j}^L(y_j^*) \forall j = 1, \dots, n$

Asociado a este teorema hay dos resultados importantes que fueron mencionados en el curso, uno es un teorema de Cornet de 1986 que permite encontrar condiciones suficientes para la hipótesis (2) del teorema (*Constraint Qualification*) y el otro es un teorema de Mordukhovich de 1980 que es pieza fundamental en la demostración del teorema. A continuación se enunciarán dichos resultados:

■ **Proposición 1 :** (Cornet, 1986) La condición (2) del teorema anterior es satisfecha si alguna de los siguientes condiciones se tiene:

1. $\forall i, P_i(x_i^*)$ y $\sum_{j=1}^n Y_j$ son convexos
2. $\exists v \in \mathbb{R}^k$ y $\delta > 0$ tal que $\forall \lambda \in (0, \delta), \lambda v + (AdhC \cap B(c, \delta)) \subseteq IntC$ para (C, c) igual acada uno de los $(-Y_j, -y_j^*)$ con $j = 1, \dots, n$ y $(P_i(x_i^*), x_i)$ con $i = 1, \dots, m$
3. Y_j es cerrado o convexo $\forall j$ y $\exists v \in \mathbb{R}^k$ y $\delta > 0$ tal que $\forall \lambda \in (0, \delta), \lambda v + (AdhC \cap B(c, \delta)) \subseteq IntC$ igual acada uno de los $(P_i(x_i^*), x_i)$ con $i = 1, \dots, m$

Nota: la condición (2) se tiene si es que $AdhC$ es epilipschitz en c

¹Un equilibrio competitivo es una colección de precios (uno para cada bien) tales que la cantidad ofertada de cada bien (por los productores) es igual a la cantidad demandada de cada bien (por los consumidores)

■ **Proposición 2 :** (Mordukhovich, 1980) Sea x^* una solución local del problema:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min f_0(x) \\ f_k(x) \leq 0 \\ k = 1, \dots, K \\ x \in S \subseteq \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Si las funciones f_k son lipschitz cerca de x^* y S es cerrado, entonces existe un multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}^{K+1} \setminus \{0\}$ tal que:

1. $0 \in \partial^L \left(\sum_{k=0}^K \lambda_k f_k \right)(x^*) + N_S^L(x^*)$
2. $\lambda_k \geq 0$ y $\lambda_k f_k(x^*) = 0$ para $k = 1, \dots, K$

2.2. El Segundo Teorema del Bienestar para un Espacio de Bienes

Consideremos un espacio de Banach Reticulado L , esto es, L es banach, parcialmente ordenado, reticulado². Para simplificar los resultados se considera sólo un productor. Consideremos $e \in +$ la dotación inicial y precios $p \in L^*$ elementos del dual topológico de L .

Aquí hemos reemplazado el espacio de los bienes \mathbb{R}^k por L , para así obtener un resultado más general.

Diremos que una distribución $((\bar{x}_i), \bar{y})$ es Pareto óptima débil si es factible y si no existe otra distribución factible $((x_i), y)$ tal que $x_i \in P_i(\bar{x}_i) \forall i$. Como en clase definimos el subdiferencial abstracto y sus propiedades, podemos continuar con el teorema:

Teorema:

Consideremos el subdiferencial abstracto, si $((\bar{x}_i), \bar{y})$ es un óptimo Pareto débil, asumamos:

1. $\forall i, X_i = L_+, \bar{x}_i \in \text{Adh} P_i(\bar{x}_i)$, existe $\delta_i > 0, \lambda_i > 0, \theta_i > 0$ tales que:

$$L_+ \cap ((P_i(\bar{x}_i) \cap B(\bar{x}_i, \theta_i)) + \Gamma_i) \subseteq P_i(\bar{x}_i)$$

$$\text{Donde } \Gamma_i = \bigcup_{\lambda \in (0, \lambda_i)} \lambda \left(\left(\frac{1}{m+1} \right) e + B(0, \delta_i) \right)$$

2. Y cerrado fuerte, existe $\bar{\delta} > 0, \bar{\lambda} > 0, \bar{\theta} > 0$ tales que $\forall y \in Y \cap B(\bar{y}, \bar{\theta})$

$$((y - \bar{\Gamma}) \cap \{z \in L : z^+ \leq y^+\}) \subseteq Y$$

$$\text{Donde } \bar{\Gamma} = \bigcup_{\lambda \in (0, \bar{\lambda})} \lambda \left(\left(\frac{1}{m+1} \right) e + B(0, \bar{\delta}) \right)$$

Entonces $\bar{p} \in L^*$ tal que $\bar{p}(e) > 0$ y

1. $\bar{p} \in \partial d_Y(\bar{y})$
2. $-\bar{p} \in \partial d_{\text{Adh} P_i(\bar{x}_i)}(\bar{x}_i) \forall i$

²Un espacio se dice reticulado si existe el supremo y el ínfimo para cada par de vectores.

Para probar este resultado se enunció un teorema de separación aproximada en espacios de banach, probado por J. M. Borwein y A. Jofré en 1997, el que dice lo siguiente:

Teorema:(Borwein-Jofré,1997)

Consideremos el subdiferencial abstracto. Sean $(Z_j)_{j=1}^n$ n subconjuntos cerrados de L . Sea $(\bar{z}_j) \in \prod_j Z_j$ tal que

$$\sum_j \bar{z}_j \in Fr(\sum_j Z_j)$$

Entonces, $\exists c > 0, \forall \epsilon > 0, \exists z_j \in \bar{z}_j + B(0, \epsilon) \forall j, \bar{p} \in L^*, c \leq \|\bar{p}\| \leq 1$

$$\bar{p} \in \bigcap_j (\partial d_{Z_j}(z_j) + B^*(0, \epsilon))$$

2.3. La existencia de un costo marginal de equilibrio

Considere una economía en la cual existen k bienes, n firmas con producción, m consumidores.

Suponga que cada consumidor maximiza su beneficio sujeto a sus restricciones presupuestarias y los productores maximizan sus beneficios.

Un costo marginal de equilibrio es una lista de producciones y consumos, y un vector de precios no nulo que satisface las condiciones anteriores y que además sea un mercado sin intervención.

Se busca garantizar la existencia de un costo marginal de equilibrio bajo ciertas suposiciones. El teorema como tal no fue enunciado, sin embargo, se mencionó. Se vio un ejemplo, el cual ilustraba la importancia de la convexidad del cono normal para asegurar que el equilibrio obtenido fuese eficiente. Además, se vio un ejemplo en el cual el cono normal de Mordukhovich, entregaba la existencia de un costo marginal de equilibrio que era ineficiente.

Capítulo 3

Problemas Abiertos

Uno de los primeros problemas abiertos relacionados con el tema surge del *Segundo Teorema de Bienestar*, y este es determinar si el cono normal de Mordukhovich es minimal entre todos los conos normales que satisfacen las particulares propiedades necesarias para este teorema, pues con esto se podría ver si las hipótesis necesarias son las más débiles posibles.

Otro problema abierto es ver si con el cono normal de Mordukhovich se puede o no probar la existencia de un costo marginal de equilibrio, puesto que en la demostración de esto se utiliza fuertemente la convexidad del cono normal de Clarke, y dado que el cono normal de Mordukhovich no lo es, es interesante saber si la convexidad juega un rol importante en la veracidad del teorema de existencia. Más aún, dado que el cono normal de Clarke asegura la eficiencia de un equilibrio eficiente, es interesante saber si existe algún otro cono normal que no sea convexo, tal que asegure la existencia de un costo marginal de equilibrio que sea eficiente.

Bibliografía

- [1] BONNISSEAU, JEAN-MARC & CORNET, BERNARD, *Existence of Marginal Cost Pricing Equilibria: The Nonsmooth Case*, International Economic Review, Department of Economics, University of Pennsylvania and Osaka University Institute of Social and Economic Research Association, vol. 31(3). 685-708. Agosto 1990.
- [2] BONNISSEAU, JEAN-MARC & LACHIRI, OUSSAMA , *About the second theorem of welfare economics with stock markets*, Cahier de la MSE 2006-53, Université Paris 1.
- [3] KHAN, M.A., *The Mordukhovich Normal Cone and the Foundations of Welfare Economics*, Journal of Public Economic Theory, 1. 309-338. 1999
- [4] ROCKAFELLAR, R.T. & WETS, R.J.B., *Variational Analysis*. Springer, Berlin Heidelberg New York. 1998.