
Técnicas de Análisis Variacional
Profesores: Rafael Correa - Héctor Ramirez
Curso Corto en Equilibrio en Redes
Expositor: Roberto Comminetti

Claudio Pareja
17 de diciembre de 2008

1. Introducción.

El equilibrio en redes ha sido de particular interés en diversas áreas de la ingeniería, en especial desde la expansión del tráfico terrestre y de la creación de Internet. Primero, y quizás lo más importante del estudio de equilibrios, es definir que significa *equilibrio*, en el contexto del tráfico terrestre no es directo que significaría tal cosa, por ejemplo, dos equilibrios esencialmente distintos serían: *en cada calle hay siempre el mismo número de autos* o *los conductores no tienen incentivos para elegir una u otra ruta*. Segundo viene el estudio propiamente tal: es necesario analizar si el equilibrio definido existe y bajo cuales condiciones es posible llegar a él. Finalmente es de interés estudiar cualitativa y cuantitativamente estos equilibrios en redes reales, donde la herramientas computacionales son imprescindibles.

En cada una de las partes anteriores, el análisis variacional, sin subvalorar otras herramientas, presenta una ayuda de gran tamaño ya que entrega: una definición clara de lo que significa el equilibrio que estamos estudiando, un marco teórico donde analizar la existencia es natural e incluso presenta esquemas que se pueden traducir en algoritmos numéricos o en pruebas de que dichos algoritmos realmente funcionan.

El informe presenta una pequeña revisión sobre la definición más conocida de equilibrio (estacionario), el equilibrio de Wardrop [1] y algunas extensiones, además presenta un enfoque nuevo basado en un estudio dinámico del equilibrio; enfocándose principalmente en la primera definición, es decir, en el estudio del equilibrio de Wardrop. Dentro de esta pequeña revisión también se incluyen algunos resultados acerca de métodos numéricos que permiten aplicar la teoría a redes reales.

Cabe destacar que el énfasis de este trabajo difiere del presentado en el curso, esto, con fines de resumir lo expuesto en la Escuela y destacar lo que al autor llamó más la atención.

2. Principales Resultados.

2.1. Equilibrio (de Wardrop) en Redes

Se considera una red como un grafo planar $G = (N, A)$, con N denotando los nodos y A los arcos, de la cual se sabe $t_a = s_a(w_a)$ el tiempo de viaje en el arco a cuando la carga sobre ese arco es w_a , la función s_a explicita la relación entre los tiempos de viaje y la carga del arco. Además sabemos las demandas desde el nodo i al d , g_i^d , y el conjunto de rutas posibles desde dichos arcos, R_i^d . Notamos O y D los conjuntos de orígenes y destinos, respectivamente. El objetivo es estudiar como el flujo agregado se distribuye en cada arco, notar que al trabajar así se asumen todos los individuos iguales excepto por su llegada y partida.

Definición 1. Si las únicas rutas con carga positiva son las rutas óptimas entonces se dirá que se ha alcanzado un equilibrio de Wardrop.

La interpretación es directa: sólo se ocupan las rutas que son óptimas, en particular si consideramos un modelo con 2 nodos, el de llegada y el de partida, con 2 arcos, el primero con tiempo menor que el segundo entonces, es natural pensar que sólo se ocupará el primer arco dado que *nadie* quiere demorarse más de lo necesario.

Con lo anterior se puede escribir la formulación variacional del problema [2] y con esto, el problema se convierte en uno de programación convexa.

Caracterización 2.1.1. *Caracterización Variacional.*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{w,v} & \sum_a \int_0^{w_a} s_a(x) dx \\ \text{s.a.} & \\ w_a & = \sum_{d \in D} v_a^d \\ g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d & = \sum_{a \in A_i^+} v_a^d \\ v_a^d & \geq 0 \end{array} \right.$$

Aquí se han agregado variables auxiliares v_a^d que representan la cantidad de individuos que van al destino d a través del arco a , luego es natural la primera y tercera restricción. La segunda es la conservación de flujo que debe existir en cada nodo para que la demanda sea servida.

Del estudio de este funcional es posible demostrar que existe un único equilibrio, ie, una única solución w^* de este problema (aunque podría ser el caso que existan varios v). La existencia debido a la compacidad del conjunto donde se minimiza y la unicidad por la estricta convexidad del funcional.

De aquí sigue la formulación dual del problema [3], lo que permitir convertir el problema en el de minimizar una función real.

Caracterización 2.1.2. *Caracterización Dual.*

$$\min_t \sum_a \int_0^{t_a} s_a^{-1}(x) dx - \sum_{i,d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

Con τ_i^d solución del problema de tiempo/costo mínimo, se puede obtener como la solución de la ecuaciones de Bellman:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau_d^d & = 0 \\ \tau_i^d & = \min_{(i_a, j_a) \in A_i^+} [t_a + \tau_{j_a}^d] \end{array} \right.$$

2.1.1. Resolución numérica

Con todo lo anterior en mente se propone el Método de Promedios Sucesivos (MSA, por su nombre en inglés) como posible forma de resolución, en este contexto consistiría en:

1. Calcular $t_a^k = t_a(w_a^k)$.
2. Se asiga g_i^d a las rutas más cortas.

3. Calcular los flujos v_a^d .
4. Se agregan los flujos $\tilde{w}_a^k = \sum_d v_a^d$.
5. Se actualiza $w^{k+1} = (1 - \lambda_k)w^k + \lambda_k \tilde{w}^k$.

En general, se ocupa $\lambda_k = 1/k$. Si reescribimos la actualización como $w^{k+1} = (1 - \lambda_k)w^k + \lambda_k \phi(w^k)$, existe extensa literatura cuando ϕ no es expansivo, pero cuando lo es no es posible asegurar convergencia; en el contexto de este trabajo, ϕ sí es expansivo pero, a pesar de eso, en la práctica, el método sí converge ¿por qué?.

Teorema 1. *Si $\{\lambda_k\}_k$ es tal que $\sum \lambda_k = \infty$ y $\sum \lambda_k^2 < \infty$ entonces MSA converge al equilibrio w^* .*

Lo interesante de este teorema es su demostración en la cual se reescribe el MSA como uno de subgradiente, más precisamente se considera los siguiente:

$$\frac{w^{k+1} - w^k}{\lambda_k} \in -\text{diag}(s'_a(w_a^k))^{-1} \partial \psi(w^k)$$

Con $\psi(w) = \phi(\{s_a(w_a)\}_{a \in A})$, o sea ψ es la función que a cada w ($w \in \mathbb{R}^{|A|}$) le asocia los flujos que serían óptimos si las cargas fueran w (recuerde que es un algoritmo de punto fijo). Se puede demostrar que el equilibrio w^* minimiza ψ y así sigue el resultado.

2.2. Usuarios Estocásticos

2.2.1. Equilibrio Tradicional

Ahora los usuarios no son homogéneos, siguen una *distribución*, lo que se ve reflejada en los tiempo de espera $\tilde{t}_a = t_a + \epsilon_a$ donde ϵ_a es una variable aleatoria, lo que hace \tilde{t}_a también una variable aleatoria. Así el modelo, el equilibrio es tal que distribuye los flujos según la probabilidad de que cada ruta sea óptima:

$$x_r = g_i^d \mathbb{P}(\tilde{T}_r = \tilde{\tau}_i^d)$$

Con \tilde{T}_r y x_r , el tiempo de viaje y el flujo de la ruta r ; y como antes, g_i^d y $\tilde{\tau}_i^d$ la demanda y el tiempo óptimo de viaje desde el nodo i hasta el nodo d . Notar que implícitamente esta definición, al igual que antes, supone que el usuario esta optimizando entre todas las rutas al comenzar su viaje.

La mayor dificultad con este método es que resultados *prácticos* son difíciles de obtener en redes de tamaño regular o mayor, además dada la componente estocástica incluso en redes pequeñas sólo se posible obtener simulaciones y no resultados completos. En particular el uso de distribuciones a soporte compacto, que harían que no todas las rutas se usaran, hacen prácticamente imposible obtener resultados. Incluso la formulación dual de este problema no entrega luces, excepto en el caso de redes pequeñas.

2.2.2. Equilibrio Markoviano [4]

Es natural pensar que los usuarios de la vida real no eligen la ruta óptima desde el conjunto de posible rutas que comienzan en su hogar y terminan donde ellos quieren llegar, esto es humanamente imposible, en particular, probablemente cambien de parecer en mitad del camino. Con esto en mente, se mantiene el modelo del punto anterior, 2.2.1, pero ahora el usuario en vez de optimizar entre todas

las rutas al comenzar su viaje, lo hace en cada nodo: si él esta en el nodo i optimiza entre todas las rutas que lo llevan desde ese nodo hasta su destino, se mueve un arco y repite. Lo anterior, para un viaje desde o hasta d se puede formular como:

- $i = o, r = []$
- while $i \neq d$
 - $\hat{a} = \operatorname{argmin}_{a \in A_i^+} \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_{j_a}^d$
 - $i = j_{\hat{a}}$
 - $r = [r; \hat{a}]$.

Así, r termina siendo la rutina óptima para el usuario. Luego sigue que el flujo que entra a i y que llegará a d queda dado, como antes, por:

$$x_i^d = g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d$$

Y sale del nodo i por cada arco $a \in A_i^+$ según:

$$v_a^d = x_i^d \mathbb{P} \left(a = \operatorname{argmin}_{b \in A_i^+} \tilde{t}_b + \tilde{\tau}_{j_b}^d \right)$$

Para el resultado siguiente, es necesario redefinir τ_i^d , haciendolo la solución de la ecuaciones estocásticas de Bellman:

$$\tau_i^d = \mathbb{E} \left(\min_{a \in A_i^+} [t_a + \tau_{j_a}^d + \epsilon_a^d] \right)$$

Caracterización 2.2.1. *Caracterización Dual.*

$$\min_t \sum_a \int_0^{t_a} s_a^{-1}(x) dx - \sum_{i,d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

Idéntica a 2.1.2 del caso inicial, así este caso se reduce a ese considerando la distribución de los usuarios como un delta de Dirac, resultado muy interesante que permite ver desde otra perspectiva, ahora *Markoviana*, la definición de equilibrio original. Además sigue que el método de promedio sucesivos, ahora estocástico, converge; haciendo este problema posible de resolver sin complicaciones.

3. Problemas Abiertos. Aprendizaje en redes.

Hasta ahora en el análisis existen 2 puntos en común: los usuarios son tratados de manera agregada, ie, no se estudia el comportamiento individual de *un* usuario; los resultados son estáticos, en el sentido que se estudia el equilibrio y no como se llega a él. El nuevo enfoque que se enunciará en esta sección difiere de lo anterior en estos dos puntos, primero estudia el comportamiendo de cada uno de los usuarios y segundo, estudia como evoluciona el sistema en el tiempo.

De la sección anterior, mantenemos la red como un grafo planar $G = (N, A)$, con N denotando los nodos y A los arcos, con t^r el tiempo de viaje asociado a la ruta r . Además de las demandas desde el nodo i al d , g_i^d , y el conjunto de rutas posibles desde dichos arcos, R_i^d , sabemos a donde y desde donde cada uno de los N conductores quiere ir.

Otra gran diferencia en espíritu con lo tratado antes es: ahora cada día el usuario no sabe todos los tiempos, sabe sólo acerca de lo que experimentó, denotamos x_n^{ir} la percepción del tiempo de viaje que el conductor i tiene acerca de la ruta r durante el día n . Y a diferencia de en 2.2.2, la parte estocástica esta en la existencia de una probabilidad, π_n^{ir} de que el conductor i elija cierta ruta r ; esto es, el conductor ya no decide sólo según cuál es el óptimo, ahora, se puede equivocar en ver cuál era el óptimo para él. Con esto el nombre de estocástico queda mucho claro que antes.

Existe, además, un proceso de aprendizaje, un proceso de actualización de sus percepciones, esto reflejado en el cambio de las probabilidades π_n^{ir} según que es lo que le ha ocurrido a lo largo del tiempo. En este sentido, el proceso en estudio se puede ver como un juego repetido una y otra vez en el cual los jugadores se pueden adaptar.

Así las cosas, el proceso de aprendizaje (en tiempo discreto) queda como¹:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n-1}^{ir} & \rightsquigarrow & \pi_n^{ir} & \rightsquigarrow & r_n^i & \rightsquigarrow & u_n^r \\ \text{estado} & & \text{pbb} & & \text{rutas} & & \text{flujos} \\ & & & & & & \rightsquigarrow t_n^r \\ & & & & & & \text{tiempos} \\ & & & & & & \rightsquigarrow x_n^{ir} \\ & & & & & & \text{actualización} \end{array}$$

Este último paso se hace como sigue:

$$x_n^{ir} = \begin{cases} (1 - \lambda_n)x_{n-1}^{ir} + \lambda_n t_n^r, & r = r_n^i \\ x_{n-1}^{ir}, & r \neq r_n^i \end{cases}$$

Lo anterior es la formalización de las siguientes ideas:

- El conductor cada día elige una ruta basado en que le pasó ayer y esto hará que lo que le pase hoy sea distinto de lo que ya le pasó.
- La elección la hace al azar privilegiando ciertas rutas según su conocimiento previo (puede verse también como una mano temblorosa).
- Este conocimiento previo es una mezcla de la experiencia y cierto conocimiento *común*.
- Todo este proceso se repite cada día.

Desde aquí se puede pasar a un escenario continuo, considerando que el aprendizaje se hace en cada $t \in \mathbb{R}_+$ en vez de en $n \in \mathbb{N}$, algunos resultados existen en este contexto [6] que relacionan los puntos de equilibrio de la dinámica con los puntos de equilibrio de cierta ecuación diferencial. En paralelo a lo anterior es posible escribir el aprendizaje como cierto juego cuyos equilibrios de Nash corresponden a los equilibrios buscados inicialmente.

Estas dos ideas permiten estudiar si hay o no puntos de equilibrio y cuántos de ellos habrían. A pesar de esto, el análisis no se puede seguir para redes complejas y los teoremas no son mínimos, en el sentido de que a pesar que no se cumplan las condiciones, los resultados sí se tienen [5] y he aquí donde estan abiertos los problemas, se buscan nuevos enfoques o simplificaciones que permitan resolver de manera práctica, quizás nuevas herramientas dentro y fuera del análisis variacional (que es de donde gran parte de los resultados han salido).

¹El índice n indica que la variable toma distintos valores con las repeticiones y que se esta hablando de la variable el día n

Referencias

- [1] Wardrop, J.G.: Some theoretical aspects of road traffic research.
Proceedings of the Institute of Civil Engineers Part II, pp. 325-378 (1952).
- [2] Beckman, M., McGuire, C., Winsten, C.: Studies in Economics of Transportation.
Yale University Press, New Haven (1956).
- [3] Fukushima, M.: On the dual approach to the traffic assignment problem.
Transport. Res. B 18(3), 235–245 (1984).
- [4] Baillon, J. B., Cominetti, R. : Markovian traffic equilibrium.
Mathematical Programming: Series A and B, Volume 111, Issue 1, pp. 33-56 (2007).
- [5] Cominetti, R., Melo, E., Sorinz, S.: Payoff-based learning procedure and its application to traffic games.
- [6] Benaïm, M., Hirsch, M.W.: Mixed equilibria and dynamical systems arising from fictitious play in perturbed games.
Games Econom. Behav. 29, 36-72,(1999).