

ANÁLISIS NO-DIFERENCIABLE Y APLICACIONES A LA ECONOMÍA

Profesor: Rafael Correa & Hector Ramirez.
Nombre: Emilio Vilches G.
Curso: Técnicas del análisis variacional.

Fecha: Miércoles 17 de Diciembre de 2008

Resumen

El presente informe tiene como objetivo mostrar una aplicación del análisis no-diferenciable a la teoría económica, vista en el curso “Nonsmooth analysis and applications in economic theory”, dictado por el profesor Jean Marc Bonisseau, en la Escuela de Análisis Variacional del Centro de Modelamiento Matemático.

Se estudiará un modelo de equilibrio competitivo involucrando economías no convexas con un espacio de bienes de dimension finita. En particular se darán las definiciones de óptimo de Pareto y se mostrará el “Segundo Teorema del Bienestar”, visto como un resultado del análisis no diferenciable.

Índice

1. Introducción	1
2. Elementos	2
3. Principales resultados.	3
3.1. Una economía de Arrow-Debreu	3
3.1.1. Modelo e hipótesis básicas	3
3.1.2. Espacio de bienes: Retículo de Banach	5
4. Resultados técnicos	7
5. Problemas Abiertos	8
5.1. Problema 1.	8
5.2. Problema 2.	8

1. Introducción

El clásico modelo económico Walrasiano de economía del bienestar y sus generalizaciones han sido reconocidas como una parte importante de la teoría económica. Se ha comprendido bien que el concepto de “óptimo de Pareto” y sus variaciones juegan un rol crucial para el estudio del equilibrio y toma de decisiones para economías competitivas. Un enfoque clásico para estudiar la optimalidad de Pareto, en modelos económicos con datos diferenciables, consiste en reducir éste a un problema de programación matemática y usar condiciones necesarias de primer orden con multiplicadores de Lagrange.

En 1951 Arrow y Debreu hicieron el paso crucial en la teoría del bienestar considerando modelos económicos con datos posiblemente no diferenciables, pero convexos. Usando los teoremas de separación para conjuntos convexos, desarrollaron una interesante teoría que en particular contiene condiciones necesarias y suficientes para una asignación óptima de Pareto. Por otra parte, la relevancia de las hipótesis de convexidad es dudosa para muchas aplicaciones importantes ¹, aquí es donde el análisis no diferenciable aparece como herramienta natural ² y permite generalizar el caso convexo, encontrando así resultados importantes en teoría económica.

Una aplicación fundamental es una economía de Arrow-Debreu, la cual constituye un modelo simple de una economía no convexa, pero que entrega una idea de lo que son las técnicas variacionales.

En el presente informe se estudiará dicha aplicación y se darán algunos problemas abiertos en esta interesante teoría³.

¹Es bien conocido que el caso convexo no se tiene en presencia de retornos crecientes a escala en la producción.

²La aproximación por funciones diferenciables no es posible, puesto que la suavidad no es robusta a través de la agregación. Un ejemplo de pérdida de suavidad por agregación se puede encontrar en [1, pp. 9].

³Lo que sigue a continuación formó parte de la primera parte del curso de J.M Bonisseau, “Nonsmooth analysis and applications in economic theory”, la segunda parte se ha omitido por simplicidad.

2. Elementos

En esta sección se darán las definiciones de los distintos conos utilizados en el análisis no-diferenciables, los que permiten formalizar la existencia de precios marginales de equilibrio.

Definición 2.1

Sea X un subconjunto de \mathbb{R}^n y x un elemento de X .

1. El cono de vectores perpendiculares, o cono normal proximal a X en x , denotado por $N_X^P(x)$, está definido por:

$$N_X^P(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists \alpha > 0, B(\bar{x} + \alpha y, \alpha \|y\|) \cap X = \emptyset\}$$

2. El cono normal limitante a X en x , denotado por $N_X^L(x)$, está definido por:

$$N_X^L(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists (x^\nu, y^\nu) \subset X \times \mathbb{R}^n, (x^\nu, y^\nu) \rightarrow (x, y), y^\nu \in N_X^P(x^\nu), \forall \nu \in \mathbb{N}\}$$

3. El cono normal de Clarke⁴ a X en x , está definido por:

$$N_X^C(x) = \text{adh } \text{co}N_X^L(x)$$

⁴Dado que este cono es convexo es utilizado para resolver el problema de existencia de precios marginales de equilibrio.

3. Principales resultados.

3.1. Una economía de Arrow-Debreu

En esta subsección, se presentará el modelo económico asociado a una economía de Arrow-Debreu en el cual los datos son no necesariamente diferenciables y convexos. Se darán las definiciones de asignación factible y la de óptimo de Pareto. Entonces se verá “El segundo teorema del bienestar”, para finalizar con un comentario acerca de la condición de calificación de Cornet.

3.1.1. Modelo e hipótesis básicas

Consideremos la siguiente economía \mathcal{E} :

- ℓ bienes, $h = 1, \dots, \ell$.
- n firmas, $j = 1, \dots, n$, con $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ la producción de la j -ésima firma.
- m consumidores, $i = 1, \dots, m$, con $X_i \subseteq \mathbb{R}^\ell$ el consumo del i -ésimo consumidor y $P_i: X_i \rightrightarrows X_i$, describiendo las preferencias del i -ésimo consumidor, esto es $x'_i \in P_i(x_i)$ significa que x'_i es estrictamente preferido a x_i .
- $e \in \mathbb{R}^\ell$, el vector de dotación inicial total.

Definición 3.1 (asignación factible) Sea $x = (x_i)$, y sea $y = (y_j)$. Diremos que el par $(x, y) \in (\mathbb{R}^\ell)^{m+n}$ es una asignación factible de \mathcal{E} si, para todo i , $x_i \in X_i$, para todo j , $y_j \in Y_j$

$$\sum_{i=1}^m x_i = e + \sum_{j=1}^n y_j \quad (1)$$

Observación 3.1 Cuando la información es incompleta, esto es cuando la dotación inicial no es conocida, la condición (1) se considera como

$$\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j \in W$$

donde $W \subset \mathbb{R}^\ell$, es el conjunto de restricciones de demanda, que en el caso general refleja la incertidumbre de la dotación inicial en el modelo económico en consideración.

Definición 3.2 (Óptimo de Pareto) Una asignación (\bar{x}, \bar{y}) es óptimo de Pareto si es factible y no existe otra asignación factible $((x_i), (y_j))$ tal que $x_i \in \text{adh}P_i(\bar{x}_i)$ para todo i y $x_{i_0} \in P_{i_0}(\bar{x}_{i_0})$ para al menos un i_0 .

Definición 3.3 (condición de calificación de Cornet) Una asignación $((x_i), (y_j))$ satisface la condición de calificación de Cornet si $\exists i_0 \in \{1, \dots, m\}$, $v \in \mathbb{R}^\ell$ y $\delta > 0$, tal que para todo $\lambda \in (0, \delta)$,

$$\lambda v + \sum_{i=1}^m (\text{adh}P_i(\bar{x}_i) \cap B(\bar{x}_i, \delta)) - \sum_{j=1}^n (\text{adh}Y_j \cap B(\bar{y}_j, \delta)) \subset P_{i_0}(\bar{x}_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \text{adh}P_i(\bar{x}_i) - \sum_{j=1}^n Y_j \quad (2)$$

El siguiente teorema entrega una condición necesaria para una asignación óptima de Pareto.

Teorema 3.1 (Segundo teorema del bienestar) ^{5 6} Sea $((x_i), (y_j))$ un óptimo de Pareto. Supongamos que

1. Para todo i , $\bar{x}_i \in \text{adh}P_i(\bar{x}_i)$.
2. $((x_i), (y_j))$ satisface la condición de calificación de Cornet.

Entonces, existe $\bar{p} \neq 0$ tal que

1. $-\bar{p} \in N_{\text{adh}P_i(\bar{x}_i)}^L(\bar{x}_i)$ para todo $i = 1, \dots, m$.

⁵La demostración de este teorema se puede encontrar en [1, pp. 30–33] y se basa en la siguiente observación: “Si una asignación es óptima de Pareto, entonces es solución de un problema extremal cuyas derivadas de primer orden pueden ser expresadas directamente a través de multiplicadores de lagrange indeterminados, que pueden ser eliminados”. Esta observación está inspirada en el enfoque clásico, usado por Walras.

⁶Una generalización de éste teorema a ciertos espacios de Banach, se puede encontrar en [3, pp. 20–21].

2. $\bar{p} \in N_{adhY_j}^L(\bar{y}_j)$ para todo $j = 1, \dots, n$.

La siguiente proposición entrega algunas condiciones necesarias para el cumplimiento de la condición de calificación de Cornet.

Proposición 3.1 (Cornet 1986) ⁷ *Se satisface la condición de calificación Cornet si una de las siguientes condiciones es cierta:*

1. Para todo i , $P_i(\bar{x}_i)$ es convexo y $\sum_{j=1}^n Y_j$ es convexo.

2. Existe $v \in \mathbb{R}^\ell$ y $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \delta)$,

$$\lambda v + (adhC \cap B(c, \delta)) \subset intC$$

para (C, c) igual a alguno de los $(-Y_j, -\bar{y}_j)$, $j = 1, \dots, n$ y $(P_i(\bar{x}_i), \bar{x}_i)$, $i = 1, \dots, m$.

3. Y_j es cerrado o convexo para todo $j = 1, \dots, n$ y existe $v \in \mathbb{R}^\ell$ y $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \delta)$,

$$\lambda v + (adhC \cap B(c, \delta)) \subset intC$$

para (C, c) igual a algún de los $(P_i(\bar{x}_i), \bar{x}_i)$, $i = 1, \dots, m$.

3.1.2. Espacio de bienes: Retículo de Banach

Ahora se considerará una economía de Arrow-Debreu con espacio de bienes L en vez de \mathbb{R}^ℓ , donde L es un retículo de Banach⁸. Se supondrá además:

1. Hay sólo un productor.
2. La dotación e es no negativa, $e \in L_+$.
3. Los precios $p \in L^+$, dual topológico de L .

⁷La demostración de esta proposición se pueden encontrar en [6].

⁸ L es un Retículo de Banach, si L es un espacio de Banach, parcialmente ordenado, reticulado, esto es, existe el supremo y el ínfimo de todo par de puntos, con respecto a este orden.

Definición 3.4 (Pareto débil) Una asignación $((\bar{x}_i), (\bar{y}))$ es óptimo de Pareto débil si es factible y no existe otra asignación factible $((x_i), (y))$ tal que $x_i \in P_i(\bar{x}_i)$ para todo i .

Teorema 3.2 ⁹ Supongamos que $x \mapsto \partial f(x)$ tiene grafo cerrado¹⁰, para el producto de la topología de la norma sobre L y la topología $\sigma(L^*, L)$ sobre L^* si f es una función distancia. Sea $((\bar{x}_i), \bar{y})$ una asignación óptima de Pareto débil satisfaciendo las siguientes hipótesis

1. Para todo i , $X_i = L_+$, $\bar{x}_i \in \text{adh}P_i(\bar{x}_i)$, existe $\delta_i > 0$, $\lambda_i > 0$, $\theta_i > 0$ tal que:

$$L_+ \cap ((P_i(\bar{x}_i)) + \Gamma_i) \subset P_i(\bar{x}_i)$$

$$\text{donde } \Gamma_i = \bigcup_{\lambda \in (0, \lambda_i]} \lambda((1/(m+1)e + B(0, \delta_i)).$$

2. Y norma cerrada, existe $\bar{\delta} > 0$, $\bar{\lambda} > 0$, $\bar{\theta} > 0$ tal que para todo $y \in Y \cap B(\bar{y}, \bar{\theta})$,

$$((y - \bar{\Gamma}) \cap \{z \in L | z^+ \leq y^+\}) \subset Y$$

$$\text{donde } \bar{\Gamma} = \bigcup_{\lambda \in (0, \bar{\lambda}]} \lambda((1/(m+1)e + B(0, \bar{\delta}))$$

Entonces, $\exists \bar{p} \in L^*$ tal que $\bar{p}(e) > 0$ y

1. $\bar{p} \in \partial d_Y(\bar{y})$.
2. $-\bar{p} \in \partial d_{\text{adh}P_i(\bar{x}_i)}$ para todo i .

⁹La demostración de este teorema se puede encontrar en [1] y es una aplicación del teorema 4.1.

¹⁰ ∂ subdiferencial abstracto.

4. Resultados técnicos

En esta sección se presentan algunos resultados técnicos usados en la obtención de los teoremas (3.1) y (3.2).

Proposición 4.1 (Mordukhovich) *Consideremos el problema*

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \text{Min } f_0(x) \\ f_\kappa(x) \leq 0, \kappa = 1, \dots, k \\ x \in S \subset \mathbb{R}^\ell \end{cases}$$

Sea $\partial^L f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^\ell \mid (\xi, -1) \in N_{\text{epif}}^L(f(x), x)\}$.

Sea \bar{x} una solución local de el problem (\mathcal{P}) . Si las funciones f_κ son Lipschitz cerca de \bar{x} y S es cerrado, entonces existe un multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$, tal que

1. $0 \in \partial^L \left(\sum_{\kappa=0}^k \lambda_\kappa f_\kappa \right)(\bar{x}) + N_S^L(\bar{x})$.
2. $\lambda_\kappa \geq 0$ y $(\lambda_\kappa f_\kappa)(\bar{x}) = 0$ para $\kappa = 1, \dots, k$.

A continuación enunciamos el teorema de separación aproximada(no convexa) en espacios de Banach, que es utilizado en demostración del teorema (3.2) y que generaliza la técnica usada en 1951 por Arrow-Debreu.

Teorema 4.1 (Borwein-Jofré) Sean $(Z_j)_{j=1}^n$ n subconjuntos cerrados de L . $(\bar{z}_j) \in \prod_j Z_j$ tal que

$$\sum_{j=1}^n \bar{z}_j \in \text{fr} \left(\sum_{j=1}^n Z_j \right)$$

Entonces, $\exists c > 0, \forall \epsilon > 0, \exists z_j \in \bar{z}_j + B(0, \epsilon)$ para todo j , $\bar{p} \in L^*$, $c \leq \|p^*\| \leq 1$

$$\bar{p} \in \bigcap_j (\partial d_{Z_j}(z_j) + B^*(0, \epsilon))$$

5. Problemas Abiertos

A continuación se dará una lista de problemas abiertos.

5.1. Problema 1.

El primer teorema del bienestar establece que cualquier asignación de equilibrio es un óptimo de Pareto (condición suficiente de optimalidad de Pareto). La validez de este primer teorema del bienestar depende fuertemente de la convexidad. No existen modelos análogos para el caso no convexo, así se obtiene el primer problema abierto:

“Extender el primer teorema del bienestar al caso no convexo”.

5.2. Problema 2.

Además de hipótesis de convexidad, el modelo de Arrow-Debreu requiere que ciertos conjuntos tengan interior no vacío, todo esto debido a la aplicación de teoremas de separación para espacios de dimension infinita. En el caso de espacios topológicos ordenados, la condición de interioridad se reduce a la no vacuidad del interior del cono positivo en el espacio de bienes en cuestión, que no es satisfecho en varios modelos importantes para la economía. Mas-Colell propuso una propiedad para economías convexas cuyos espacios de bienes son espacios topológicos reticulados con posiblemente interiores vacíos. No existe aún una condición que permita evadir las condiciones de interioridad en espacios topológicos lineales¹¹, así se obtiene el segundo problema abierto.

“Encontrar alguna condición que permita eliminar el requerimiento de interioridad.”.

¹¹Naniewicz en [8] desarrolló un nuevo enfoque para modelo de Arrow-Debreu con la convexidad usual pero sin condiciones de no interioridad en espacios de bienes reflexivos.

Referencias

- [1] J. M. Bonnisseau, *Nonsmooth Analysis and Applications in Economic Theory*, Workshop on Variational Analysis, CMM, Universidad de Chile, 2008.
- [2] J. M. Bonnisseau, Oussama Lachiri *About the Second Theorem of Welfare, Economics with Stock Markets* , CNRS, 2008.
- [3] Boris. S. Mordukovich, *The extremal principle and it applications to optimization and economics*, Wayne State University.
- [4] Pedro Uribe, *Oligopolio, rendimientos crecientes y regulación.*, XII Jornadas anuales de economía, Banco central de Uruguay, Montevideo.
- [5] M. Ali Khan, *The mordukhovich normal cone and the foundations of welfare economics*, Journal of Public Economic Theory, 1999, pp. 309-338.
- [6] B. Cornet, *The Second welfare theorem in nonconvex economies*, CORE discussion paper no. 8630.
- [7] Boris. S. Mordukovich, *Variational analysis and generalized differentiation*, Springer 2006.
- [8] Z. Naniewicz *Pseudo-monotone approach to economic equilibrium problem in reflexive Banach spaces*, 2005.