

UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA  
MA55F - TÉCNICAS DE ANÁLISIS VARIACIONAL

# Informe

## Escuela en Análisis Variacional

<b>Profesores</b>	:	Rafael Correa Hector Ramirez
<b>Alumno</b>	:	Omar Larré V.
<b>Curso asistido</b>	:	Variational analysis in multiobjective optimization and equilibria.
<b>Curso dictado por</b>	:	Boris Mordukhovich
<b>Fecha</b>	:	17/12/2008

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Principales resultados</b>	<b>3</b>
2.1. Principios Variacionales mejorados para multiaplicaciones . . . . .	3
2.2. Existencia de Pareto minimizadores relativos . . . . .	6
<b>3. Problemas abiertos</b>	<b>7</b>

# 1. Introducción

Este informe está basado en el curso “Variational analysis in multiobjective optimization and equilibria”, dictado por el profesor Boris Mordukhovich, en el marco de la **Escuela en Análisis Variacional**, celebrada entre el 6 al 19 de Noviembre de 2008, en el CMM y el DIM de la Universidad de Chile.

Uno de los resultados más emblemáticos del análisis variacional es el principio variacional de Ekeland, el cual es la base de varias demostraciones de existencia de mínimos de funciones univaluadas (en [1] se pueden ver distintas aplicaciones de este principio para demostrar existencia de mínimos). En el informe actual se verá un análogo a lo anterior, pero en el caso de mínimos de multiaplicaciones (para lo cual se tendrá que definir primero cual es el sentido de orden y optimalidad), de hecho, el primer resultado de importancia será una generalización o mejora del principio variacional de Ekeland, y el segundo será la existencia de *mínimos* de una multiaplicación (bajo ciertos supuestos), en un sentido de mínimo que se definirá posteriormente.

Para referirnos a problemas de optimización en multiaplicaciones se hablará de problemas de optimización multiobjetivo. Existen varias nociones de este tipo de problemas, sin embargo en este curso se estudió la noción de *Pareto mínimo* o *Pareto eficiente*, y versiones más débiles de esta misma idea. Para fijar el contexto, sea  $Z$  un espacio vectorial normado. Se define el orden parcial  $\leq$  sobre  $\Xi \subseteq Z$  según un cono convexo cerrado  $\Theta$  como

$$z_1 \leq z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \Theta$$

Un elemento  $\bar{z} \in \Xi$  es un punto Pareto mínimo/eficiente si

$$(\bar{z} - \Theta) \cap \Xi = \{\bar{z}\}$$

En el caso de que el cono  $\Theta$  sea puntiagudo (es decir  $\Theta \cap (-\Theta) = \{0\}$ ) lo anterior es equivalente a que

$$(\bar{z} - \Theta) \cap \Xi \subset \bar{z} + \Theta$$

Si  $\text{int}\Theta \neq \emptyset$ , un punto  $\bar{z}$  Pareto débil eficiente de  $\Xi$  se define por

$$(\bar{z} - \text{int}\Theta) \cap \Xi = \emptyset$$

El mayor problema de la definición anterior es suponer que  $\text{int}\Theta \neq \emptyset$ , hipótesis que en una gran cantidad de los problemas de optimización no se cumple, tanto en dimensión no-finita como en dimensión finita. En el caso de dimensión finita, el interior relativo (denotado  $\text{ri}$ ) de un conjunto convexo  $\Theta$  no vacío es siempre no vacío, por lo que podría ser útil cambiar en la definición de débil Pareto mínimo  $\text{int}\Theta$  por  $\text{ri}\Theta$ . El problema de lo anterior es que en espacios de dimensión no-finita el interior relativo de un conjunto convexo no vacío puede ser vacío. De lo anterior nace la necesidad de una extensión de interior relativo, como el *cuasi interior relativo* de  $\Theta$ , denotado  $\text{qri}$  y definido por

$$\text{qri}\Theta = \{z \in Z : \overline{\text{cone}(\Theta - z)} \text{ es un subespacio lineal}\}$$

Se tiene que  $\text{qri}\Theta \neq \emptyset$  para todo cono convexo cerrado si  $Z$  es separable. Otra extensión del interior relativo es el *interior relativo intrínseco* denotado por  $\text{iri}$  y definido por

$$\text{iri}\Theta = \{z \in Z : \text{cone}(\Theta - z) \text{ es un subespacio lineal}\}$$

De las definiciones se tiene directamente que

$$\text{ri}\Theta \subseteq \text{iri}\Theta \subseteq \text{qri}\Theta$$

Dado  $\Xi \subseteq Z$  parcialmente ordenado por  $\Theta$ , se dice que  $\bar{z} \in \Xi$  es un punto mínimo relativo de  $\Xi$  si

$$(\bar{z} - ri\Theta) \cap \Xi = \emptyset,$$

se definirá como mínimo relativo intrínseco si

$$(\bar{z} - iri\Theta) \cap \Xi = \emptyset$$

y se definirá como quasi mínimo relativo si

$$(\bar{z} - qri\Theta) \cap \Xi = \emptyset$$

El problema principal es estudiar las soluciones de problemas de optimización multiobjetivo con restricciones

$$\text{minimizar } F(x) \text{ sujeto a } x \in \Omega$$

con algún sentido de mínimo que se detallará más adelante, y donde  $F : X \rightrightarrows Z$ , y  $\Omega \subseteq X$  es cerrado.

## 2. Principales resultados

Consideraremos en adelante  $F : X \rightrightarrows Z$  con  $Z$  parcialmente ordenado por  $\Theta$  cono propio, convexo y cerrado, y  $\text{dom}F \neq \emptyset$ , con  $\text{dom}F$  definido por

$$\text{dom}F = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

Se denotará por  $\text{Min } \Xi$  al conjunto de todos los puntos Pareto mínimo de  $\Xi \subseteq Z$  con respecto al orden establecido por  $\Theta$ , que se puede escribir de forma equivalente

$$\text{Min } \Xi := \{\bar{z} \in \Xi : \bar{z} - z \notin \Theta \text{ si } z \in \Xi, z \neq \bar{z}\}$$

### 2.1. Principios Variacionales mejorados para multiaplicaciones

Con el fin de poder enunciar el principio variacional de Ekeland mejorado para el caso de multiaplicaciones, se verán algunas definiciones.

Denotando  $\mathbb{B}$  la bola unitaria en  $Z$ , se dirá que

- $\Theta$  tiene la *propiedad de la normalidad* si el conjunto  $(\mathbb{B} + \Theta) \cap (\mathbb{B} - \Theta)$  es acotado en  $Z$ .
- $F$  es *epicerrado* si el epígrafo de  $F$  definido por  $\text{epi } F := \{(x, z) \in X \times Z : z \in F(x) + \Theta\}$  es cerrado en  $X \times Z$ .
- $F$  es de *nivel-cerrada* si sus  $z$ -conjuntos de nivel

$$\mathcal{L}(z) := \{x \in X : \exists v \in F(x) \text{ con } v \leq z\}$$

son cerrados en  $X$  para todo  $z \in Z$ .

- $F$  es *quasiacotada por abajo* y existe un conjunto  $M \subset Z$  acotado tal que  $F(X) \subset M + \Theta$ . Un conjunto  $\Omega \subset Z$  se dirá *quasiacotado por abajo* si la multiaplicación constante  $F(x) \equiv \Omega$  satisface esta propiedad.

- $F$  tiene la *propiedad de la dominación* en  $\bar{x} \in \text{dom} F$  si  $F(\bar{x}) \subset \text{Min } F(\bar{x}) + \Theta$ .

**Definición (condición de monotonía límite)** Dado  $F : X \rightrightarrows Z$  y  $\bar{x} \in \text{dom} F$ , se dice que  $F$  satisface la condición de monotonía límite en  $\bar{x}$  si para cualquier secuencia de pares  $(x_k, z_k) \in \text{gr} F$  con  $x_k \rightarrow \bar{x}$  cuando  $k \rightarrow \infty$  se tiene que

$$[z_{k+1} \leq z_k, \forall k \in \mathbb{N}] \Rightarrow [\exists \bar{z} \in \text{Min } F(\bar{x}) \text{ con } \bar{z} \leq z_k, k \in \mathbb{N}]$$

en que

$$\text{gr} F := \{(x, z) \in X \times Z : z \in F(x)\}$$

**Nota:** La *condición de monotonía límite* implica la *propiedad de la dominación*. Además, toda función nivel-cerrada y univaluada satisface la *condición de monotonía límite*. Las condiciones de suficiencia para que se tenga la condición de monotonía límite se pueden revisar en [2].

**Definición (minimizadores y minimizadores aproximados para multiaplicaciones)** Dado  $F : X \rightrightarrows Z$ ,  $Z$  Banach parcialmente ordenado por un cono propio  $\Theta \subset Z$ .

- Decimos que el par  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{gr} F$  es un MINIMIZADOR de  $F$  si  $\bar{z}$  es un punto mínimo del conjunto  $F(X) := \bigcup_{x \in X} F(x)$ , es decir

$$(\bar{z} - \Theta) \cup F(X) = \bar{z}$$

- Dado  $\varepsilon > 0$  y  $\xi \in \Theta \setminus \{0\}$ , decimos que el par  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{gr} F$  es un  $\varepsilon\xi$ -MINIMIZADOR APROXIMADO para  $F$  si

$$z + \varepsilon\xi \not\leq \bar{z}, \forall z \in F(x), \text{ con } x \neq \bar{x}$$

- Dado  $\varepsilon > 0$  y  $\xi \in \Theta \setminus \{0\}$ , decimos que el par  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{gr} F$  es un  $\varepsilon\xi$ -MINIMIZADOR APROXIMADO Estricto para  $F$  si existe un número  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$  tal que  $(\bar{x}, \bar{z})$  es un  $\tilde{\varepsilon}\xi$ -minimizador aproximado.

**Teorema 1 (versión mejorada del principio variacional de Ekeland)** Sea  $F : X \rightrightarrows Z$ ,  $Z$  Banach parcialmente ordenado por un cono propio, cerrado y convexo  $\Theta \subset Z$ , tal que  $\Theta \cap (-\Theta) \neq \emptyset$ , es decir  $\Theta$  no es un subespacio. Asumamos que  $F$  es quasicotada por abajo, nivel-cerrada, y satisface la condición de monotonía límite en  $\text{dom} F$ . Luego, para todo  $\varepsilon > 0, \lambda > 0, \xi \in \Theta \cap (-\Theta)$  y  $(x_0, z_0) \in \text{gr} F$  existe  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{gr} F$  que satisface

$$\bar{z} - z_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|\bar{x} - x_0\| \xi \leq 0, \quad \bar{z} \in \text{Min } F(\bar{x})$$

y

$$z - \bar{z} + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - \bar{x}\| \xi \not\leq 0, \forall (x, z) \in \text{gr} F, \text{ con } (x, z) \neq (\bar{x}, \bar{z})$$

Si además  $(x_0, z_0)$  es un  $\varepsilon\xi$ -minimizador aproximado para  $F$ , entonces  $\bar{x}$  puede ser elegido tal que

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \lambda$$

**Dem.** La demostración se puede ver en [2]. ■

Cabe destacar que la demostración de este teorema tiene rasgos similares a la demostración presentada en [1] del principio variacional de Ekeland para el caso univaluado.

Otro principio variacional visto en el curso fue el *principio variacional subdiferencial mejorado para multiaplicaciones*. Antes de enunciarlo, veamos unas definiciones:

- El *límite secuencial exterior de Painlevé-Kuratowski* de una multiaplicación  $F : X \rightrightarrows X^*$  es

$$\text{Limsup}_{x \rightarrow \bar{x}} F(x) := \left\{ x^* \in X^* : \exists \text{ secuencia } x_k \rightarrow \bar{x} \text{ y } x_k^* \xrightarrow{w*} x^* \text{ con } x_k^* \in F(x_k), \forall k \in N \right\}$$

donde  $w*$  denota la convergencia  $*$ -débil.

- Dado  $\Omega \subset X$  cerrado,  $\bar{x} \in \Omega$ , el cono *prenormal* en  $\bar{x}$  es

$$\hat{N}(\bar{x}; \Omega) := \left\{ x^* \in X^* : \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leq 0 \right\}$$

- El cono *básico* o de Mordukhovich en  $\bar{x}$  es

$$N(\bar{x}; \Omega) := \text{Limsup}_{x \rightarrow \bar{x}} \hat{N}(x; \Omega)$$

- La *cod derivada de Fréchet* en  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{gr} F$

$$\hat{D}^* F(\bar{x}, \bar{z})(z^*) := \left\{ x^* \in X^* : (x^*, -z^*) \in \hat{N}((\bar{x}, \bar{z}), \text{gr} F) \right\}$$

- La *cod derivada normal/básica* en  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{gr} F$

$$D^* F(\bar{x}, \bar{z})(z^*) := \{ x^* \in X^* : (x^*, -z^*) \in N((\bar{x}, \bar{z}), \text{gr} F) \}$$

- El *epígrafo* de  $F$

$$\text{epi} F := \{ (x, z) \in X \times Z : z \in F(x) + \Theta \}$$

- La *función epigráfica*  $\mathcal{E}_F : X \rightrightarrows Z$  dada por

$$\mathcal{E}_F(x) := \{ z \in Z : z \in F(x) + \Theta \}$$

- El *subdiferencial de Fréchet* de  $F$  en  $(\bar{x}, \bar{z})$

$$\hat{\partial} F(\bar{x}, \bar{z}) := \left\{ x^* \in X^* : x^* \in \hat{D}^* \mathcal{E}_F(\bar{x}, \bar{z})(z^*), -z^* \in N(0; \Theta), \|z^*\| = 1 \right\}$$

- El *subdiferencial normal/básico* de  $F$  en  $(\bar{x}, \bar{z})$

$$\partial F(\bar{x}, \bar{z}) := \{ x^* \in X^* : x^* \in D^* \mathcal{E}_F(\bar{x}, \bar{z})(z^*), -z^* \in N(0; \Theta), \|z^*\| = 1 \}$$

- Un espacio de Banach se dirá de *Asplund* si cada uno de sus subespacios separables tiene un dual separable.

**Teorema 2 (principio variacional subdiferencial mejorado para multiaplicaciones)** Sea  $F : X \rightrightarrows Z$  entre espacios de *Asplund*, cumple las mismas hipótesis del Teorema 1, pero además  $F$  es epicerrada. Luego, para todo  $\varepsilon > 0, \lambda > 0, \xi \in \Theta \cap (-\Theta)$  con  $\|\xi\| = 1$ , y un  $\varepsilon\xi$ -minimizador  $(x_0, z_0) \in \text{gr} F$  existe  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \text{gr} F$  tal que  $\|\bar{x} - x_0\| \leq \lambda$  y

$$\hat{\partial} F(\bar{x}, \bar{z}) \cup \frac{\varepsilon}{\lambda} \mathbb{B}^* \neq \emptyset$$

**Dem.** Ver [2]. ■

## 2.2. Existencia de Pareto minimizadores relativos

Como se mencionó anteriormente, uno de los principales temas del curso era estudiar la existencia de minimizadores.

**Definición (Pareto minimizadores relativos para multiaplicaciones)** Dado  $F : X \rightrightarrows Z$ ,  $Z$  Banach parcialmente ordenado por un cono  $\Theta \subset Z$ , decimos que:

- i. Si  $ri\Theta \neq \emptyset$ ,  $(\bar{x}, \bar{z}) \in grF$  es un MINIMIZADOR RELATIVO para  $F$  si

$$(\bar{z} - ri\Theta) \cup F(X) = \emptyset$$

- ii. Si  $iri\Theta \neq \emptyset$ ,  $(\bar{x}, \bar{z}) \in grF$  es un MINIMIZADOR RELATIVO INTRINSECO para  $F$  si

$$(\bar{z} - iri\Theta) \cup F(X) = \emptyset$$

- iii. Si  $qri\Theta \neq \emptyset$ ,  $(\bar{x}, \bar{z}) \in grF$  es un MINIMIZADOR QUASI RELATIVO para  $F$  si

$$(\bar{z} - qri\Theta) \cup F(X) = \emptyset$$

**Definición (condición refinada de Palais-Smale del subdiferencial para multiaplicaciones)** Una multiaplicación  $F : X \rightrightarrows Z$ , satisface la condición refinada de Palais-Smale si cualquier sucesión  $\{x_k\} \subset domF$  tal que

$$\exists z_k \in F(x_k), x_k^* \in \partial F(x_k, x_k^*) \text{ con } \|x_k^*\| \rightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow \infty$$

contiene una subsucesión convergente, con la condición de que  $\{x_k\} \subset Z$  sea quasicotada por abajo.

**Definición (condición de monotonía límite fuerte)** Dada  $F : X \rightrightarrows Z$  y un punto  $\bar{x} \in domF$ ,  $F$  satisface la condición de monotonía límite fuerte en  $\bar{x}$  si para cualquier secuencia de pares  $(x_k, z_k) \subset grF$  con  $x_k \rightarrow \bar{x}$  cuando  $k \rightarrow \infty$  se tiene que

$$[z_{k+1} \leq v_k, v_{k+1} \leq v_k, \forall k \in \mathbb{N}] \Rightarrow [\exists \bar{z} \in \text{Min } F(\bar{x}) \text{ con } \bar{z} \leq v_k, k \in \mathbb{N}]$$

y además  $\bar{z} \leq \bar{v}$  si  $v_k \rightarrow \bar{v}$  y el cono  $\Theta$  es cerrado.

**Teorema 3 (existencia de minimizadores relativos intrínsecos para multiaplicaciones)** Sea  $F : X \rightrightarrows Z$  entre espacios de Asplund, epicerrada, quasicotada por abajo, y que satisface la condición de monotonía límite fuerte en  $domF$ . Asumamos además que se tiene la condición refinada de Palais-Smale y que  $\Theta \cap (-\Theta) \neq \emptyset$ . Luego  $F$  admite un minimizador relativo intrínseco si  $iri\Theta \neq \emptyset$ .

**Dem.** La idea de la demostración es aplicar de forma inductiva la versión mejorada del principio variacional de Ekeland y generar una sucesión  $(x_k, z_k) \in grF$ , para luego probar que la sucesión  $\{x_k\}$  contiene una subsucesión que converge a un minimizador relativo intrínseco para  $F$ . Para justificar lo último es necesario usar la condición de Pale-Smale, el principio variacional subdiferencial mejorado para multiaplicaciones, la condición de monotonía límite y un principio extremal de conjuntos que no se detallará en este trabajo. Para más detalles ver [2]. ■

### 3. Problemas abiertos

Gracias a las inclusiones

$$ri\Theta \subseteq iri\Theta \subseteq gri\Theta$$

$$int\Theta \subseteq iri\Theta$$

se concluye que bajo la hipótesis del Teorema 3 que si  $ri\Theta \neq \emptyset$  entonces existe un minimizador relativo para  $F$ , y si  $int\Theta \neq \emptyset$  entonces existe un Pareto minimizador débil para  $F$ .

Si se tuviese un teorema de existencia de de minimizadores quiasi relativos, se tendrían aun más implicancias útiles como las anteriores, ya que  $iri\Theta \subseteq gri\Theta$ . El problema de existencia de minimizadores quiasi relativos para  $F$ , como el mismo profesor Mordukhovich lo dijo, es el “gran problema abierto” relativo a optimización multiobjetivo.

### Referencias

- [1] Jonathan M. Borwein Qiji J. Zhu, *Techniques of Variational Analysis*, Springer, 2005.
- [2] Truong Q. Bao and Boris S. Mordukhovich, Relative Pareto minimizers for multiobjective problems: existence and optimality conditions.