

Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento Ingeniería Matemática
Noviembre 2008

INFORME FINAL MA55F:

ALGUNOS PROBLEMAS ABIERTOS EN MONOTONÍA MAXIMAL

CURSO DE DARIUSZ ZAGRODNY

Alumno : Cristóbal Guzmán P.
Profesores : Rafael Correa
Hector Ramirez

Índice

1. Introducción	3
1.1. Definiciones y Resultados Básicos	3
2. Principales Resultados	5
2.1. Convexidad de la cerradura del dominio y recorrido para operadores Maximales Monótonos	5
2.2. Funciones de Fitzpatrick	5
3. Problemas Abiertos	8

1. Introducción

1.1. Definiciones y Resultados Básicos

El marco de trabajo será un espacio de Banach X no necesariamente reflexivo y su dual X^* . Para ambos espacios se considerarán distintas topologías según sea conveniente. Vamos a las definiciones:

Definición 1.1. *Un subconjunto $S \subseteq X \times X^*$ se dirá monótono si*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in S$$

Se dirá que S es maximal monótono si es monótono y no posee ninguna extensión propia monótona. Definimos el dominio y rango de S como

- $D(S) = \{x \in X \mid \exists x^* \in X^*, (x, x^*) \in S\}.$
- $R(S) = \{x^* \in X^* \mid \exists x \in X, (x, x^*) \in S\}.$

Para una multiaplicación $T : X \rightrightarrows 2^{X^}$ las definiciones anteriores valen si se considera $S = Gr(T) \subseteq X \times X^*$.*

Algunos ejemplos de operadores y conjuntos monótonos:

- Todo operador lineal positivo definido sobre un espacio de Hilbert $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (donde se hace la identificación de \mathcal{H} con su dual).
- El subdiferencial de una función convexa sci propia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial f : X \rightrightarrows X^*$.

Ahora veamos un resultado que nos permite caracterizar conjuntos monótonos maximales

Teorema 1.1. *(Criterio del Cuadrado Perfecto para M.M.)*

Sea X Banach reflexivo y $S \subseteq X \times X^$ monótono. Entonces S es maximal monótono ssi para todo $(w, w^*) \in X \times X^*$ existe $(x, x^*) \in S$ tal que*

$$\|x - w\|^2 + \|x^* - w^*\|^2 + 2\langle x - w, x^* - w^* \rangle = 0$$

La demostración de este resultado no es difícil, pero requiere introducir ciertos conceptos de dualidad mín-máx que extenderían innecesariamente el informe, por lo que se recomienda ver [2] para los detalles. A continuación se verá una generalización para el caso no reflexivo.

Teorema 1.2. *(Criterio del Cuadrado Perfecto Generalizado para M.M.)*

Si $S \subseteq X \times X^$ es $\|\cdot\|$ -cerrado, monótono y satisface que para todo $(\bar{w}, \bar{w}^*) \in X \times X^*$ existen $\epsilon_n \searrow 0$ y $(w_n, w_n^*) \in S$ acotada tales que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\bar{w}^* - w_n^*\|^2 + \|\bar{w} - w_n\|^2 + 2\langle \bar{w}^* - w_n^*, \bar{w} - w_n \rangle \leq \epsilon_n$$

entonces S es maximal monótono.

Demostración. Supongamos que existe una extensión estricta de S , S' monótona y tomemos un elemento (\bar{w}, \bar{w}^*) en tal extensión. Entonces, por hipótesis existe $(w_n, w_n^*) \in S$ acotada tal que

$$\|\bar{w}^* - w_n^*\|^2 + \|\bar{w} - w_n\|^2 \leq \|\bar{w}^* - w_n^*\|^2 + \|\bar{w} - w_n\|^2 + 2\langle \bar{w}^* - w_n^*, \bar{w} - w_n \rangle \leq \epsilon_n.$$

La primera desigualdad proviene de que S' es extensión monótona de S . Luego $w_n \rightarrow \bar{w}$ y $w_n^* \rightarrow \bar{w}^*$, lo que sumado a que S es cerrado muestra que necesariamente $(\bar{w}, \bar{w}^*) \in S$, lo cual es una contradicción. \square

Una definición apropiada para estudiar conjuntos m.m. es la de operador NI

Definición 1.2. (*Operadores de Ínfimo Negativo*)

Un conjunto $S \subseteq X \times X^*$ es de tipo NI ssi para todo $(x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**}$ se tiene que

$$\inf_{(s, s^*) \in S} \langle \phi(s) - x^{**}, s^* - x^* \rangle \leq 0$$

donde $\phi : X \rightarrow X^{**}$ es la inyección canónica en el bidual.

Algunos ejemplos de operadores NI

- Si X es reflexivo y S es maximal monótono, entonces es de tipo NI. De aquí se observa que la definición no es muy interesante en el caso reflexivo.
- El subdiferencial de una función convexa sci propia es maximal monótono y de tipo NI.
- Si $C^* \subseteq X^*$ es compacto y $R(S) \subseteq C^*$, con S maximal monótono; entonces es de tipo NI.
- Si $C \subseteq X$ es compacto y $D(S) \subseteq C$, con S maximal monótono; entonces es de tipo NI con $R(S) = X^*$.
- Si $C \subseteq X$ es débil compacto y $D(S) \subseteq C$, con S maximal monótono; entonces es de tipo NI con $R(S) = X^*$.

2. Principales Resultados

2.1. Convexidad de la cerradura del dominio y recorrido para operadores Maximales Monótonos

Es sabido que no siempre la cerradura del dominio o el recorrido de un conjunto maximal monótono son convexos, lo que es un resultado indeseable para trabajar con estos operadores, es por esto que la búsqueda de hipótesis razonables para las cuales un operador monótono cumpla lo mencionado ha sido una interesante pregunta abierta por muchos años. La pregunta más natural es por qué se utiliza la adherencia para estudiar la convexidad, y la respuesta es que aun en ejemplos muy sencillos se puede ver que por ejemplo $D(S)$ no es convexo.

Ejemplo 2.1. *El subdiferencial de la función convexa sci propia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_2| \vee (1 - \sqrt{1 - x_1^2}), & \text{si } |x_1| \vee |x_2| \leq 1 \\ +\infty, & \text{si no} \end{cases}$$

tiene un dominio no convexo. En efecto $D(\partial F) = B_{\|\cdot\|_\infty}((0, 0), 1) \cup [(-1, -1), (1, -1)] \cup [(-1, 1), (1, 1)]$; y sin embargo, $D(\partial F) = \overline{B_{\|\cdot\|_\infty}((0, 0), 1)}$.

La primera respuesta afirmativa, para el caso reflexivo, se debe a R.T. Rockafellar en 1969

Teorema 2.1. *Sea X reflexivo y $S : X \rightarrow 2^{X^*}$ m.m.. Entonces*

$$\overline{D(S)} = \overline{\text{conv} D(S)}$$

$$\text{int} D(S) = \text{int}(\text{conv} D(S))$$

Este Teorema fue extendido para el caso no reflexivo en algunas clases de funciones, pero la versión más general ha sido recientemente probada por Zagrodny en [3]

Teorema 2.2. *Sea X un espacio de Banach real y $S \subseteq X \times X^*$ un conjunto maximal monótono no vacío y de tipo NI. Entonces $\overline{D(S)}$ y $\overline{R(S)}$ son conjuntos convexos.*

Si bien esta versión se ve satisfactoria, de la demostración del paper se ve que lo único necesario para probar la convexidad es una implicancia sobre subdiferenciales de funciones de Fitzpatrick, lo que desvía la pregunta abierta hacia la clase de funciones que satisfacen la implicancia. A continuación se definen los conceptos básicos para contextualizar esta pregunta.

2.2. Funciones de Fitzpatrick

Una forma interesante de estudiar operadores monótonos es representando la multiaplicación por una función convexa. A continuación vemos como hacer esto

Definición 2.1. (*Función de Fitzpatrick de S*)

Dado $S \subseteq X \times X^*$ definimos $\psi_S : X \times X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$\psi_S(w, w^*) = \sup_{(s, s^*) \in S} \{ \langle w^*, s \rangle + \langle s^*, w \rangle - \langle s^*, s \rangle \}$$

Para el caso de S m.m. ψ_S suele ser llamada la función de Fitzpatrick.

Se observa que ψ_S es siempre convexa sci dado que se construye como supremo de funciones lineales afines. Además si S es monótono y $(w, w^*) \in S$ entonces

$$\begin{aligned} \psi_S(w, w^*) &= \sup_{(s, s^*) \in S} \{ \langle w^*, s \rangle + \langle s^*, w \rangle - \langle s^*, s \rangle \} \\ &= \sup_{(s, s^*) \in S} \{ \langle w^* - s^*, s - w \rangle \} + \langle w^*, w \rangle \\ &= - \inf_{(s, s^*) \in S} \{ \langle w^* - s^*, w - s \rangle \} + \langle w^*, w \rangle \end{aligned}$$

ínfimo que vale 0 pues S es monótono y $(w, w^*) \in S$. En conclusión $\psi_S(w, w^*) = \langle w^*, w \rangle$.

Recordamos la definición del mapa de dualidad, que desde ahora llamaremos $T : X \rightrightarrows X^*$, el cual tiene por evaluaciones $T(x) = \partial (\| \cdot \|^2 / 2) (x)$; es decir, el conjunto de funcionales de soporte de x .

A continuación veremos cual es la relación entre una multiaplicación y su función de Fitzpatrick

Definición 2.2. (*Fitzpatrickización de S*)

Dado $S \subseteq X \times X^*$ definimos la multiaplicación $S_\psi : X \rightrightarrows X^*$ como $Gr(S_\psi) = D(\psi_S)$.

Esta nuevo conjunto no será siempre monótono, pero satisface tener un grafo convexo. Más aún observando que

$$D(S_\psi) = \pi_X D(\psi_S) \quad \text{y} \quad R(S_\psi) = \pi_{X^*} D(\psi_S)$$

se concluye que tanto su dominio como recorrido son convexos. Es posible probar que ambos conjuntos son extensiones de $D(S)$ y $R(S)$ respectivamente. Estudiemos qué ocurre con estos conjuntos en el siguiente

Ejemplo 2.2. Para el mapa de dualidad T vemos que si $(x, x^*) \in X \times X^*$ y $(s, s^*) \in Gr(T)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle s, x^* \rangle + \langle x, s^* \rangle - \langle s, s^* \rangle &\leq \|s\| \|x^*\| + \|x\| \|s^*\| - \frac{1}{2} \|s\|^2 - \frac{1}{2} \|s^*\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|x^*\|^2). \end{aligned}$$

Luego, se tiene que $\psi_T(x, x^*) \leq \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|x^*\|^2)$ y se concluye que

$$Gr(T_\psi) = D(\psi_T) = X \times X^*.$$

Este ejemplo muestra que aun para S maximal monótono, la Fitzpatrickización de S puede ser mucho más grande que S . Es por esto que la Fitzpatrickización no es la herramienta perfecta para responder al problema de la convexidad de la cerradura del dominio y recorrido para operadores maximales monótonos.

A continuación veremos una primera aplicación de la función de Fitzpatrick para estudiar maximalidad

Teorema 2.3. *(Condición suficiente para monotonía maximal)*

Si $S \subseteq X \times X^*$ satisface que para todo $(\bar{w}, \bar{w}^*) \in X \times X^*$ existen sucesiones $\epsilon_n \searrow 0$ y $(w_n, w_n^*) \subseteq S$ acotada y tales que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \psi_{S-(\bar{w}, \bar{w}^*)}(w_n - \bar{w}, w_n^* - \bar{w}^*) + \psi_T(w_n - \bar{w}, w_n^* - \bar{w}^*) \leq \epsilon_n,$$

entonces S es maximal monótono.

Este Teorema no se encuentra en ningún paper actualmente, debido a que fue probado en un trabajo en progreso de Zagrodny que pronto estará disponible. Ésto se menciona debido a que puede tener errores en el enunciado, según conversaciones con Yboon García.

Notese que para utilizar este último teorema es necesario obtener cotas sobre la suma de las funciones de Fitzpatrick involucradas, por lo que es necesario buscar formas de acotar estos términos. Por definición

$$(a^*, a^{**}) \in \partial\psi_S(w, w^*) \Leftrightarrow \langle a^*, w \rangle + \langle a^{**}, a^* \rangle = \psi_S(w, w^*) + \psi_S^*(a^*, a^{**})$$

entonces si $\psi_S^*(w, w^*) \geq \langle a^{**}, a^* \rangle$ tenemos que $\psi_S(w, w^*) \leq \langle a^*, w \rangle + \langle a^{**}, w^* \rangle - \langle a^{**}, a^* \rangle$, con lo cual podemos asegurar que la suma $\psi_S(\cdot, \cdot) + \psi_T(\cdot, -\cdot)$ es suficientemente pequeña. Finalmente veamos un caso para el cual se cumpla lo supuesto:

Teorema 2.4. *Sea X Banach y $S \subseteq X \times X^*$ un conjunto monótono no vacío de tipo NI. Luego si $(a^*, a^{**}) \in \partial\psi_S(w, w^*)$ tendremos que*

1. $\psi_S^*(a^*, a^{**}) \geq \langle a^{**}, a^* \rangle$
2. $\psi_S(w, w^*) \leq \langle a^*, w \rangle + \langle a^{**}, w^* \rangle - \langle a^{**}, a^* \rangle$.

Demostración. *Para que (w, w^*) tenga subdiferencial no vacío, al menos debe estar en el dominio, por lo que $\psi_S(w, w^*)$ es finito y por definición*

$$\begin{aligned} \psi_S^*(a^*, a^{**}) &= \sup_{(h, h^*) \in X \times X^*} \{ \langle a^*, h \rangle + \langle a^{**}, h^* \rangle - \psi_S(h, h^*) \} \\ &\geq \sup_{(h, h^*) \in X \times X^*} \{ \langle \phi(h), a^* \rangle + \langle a^{**}, h^* \rangle - \langle h^*, h \rangle \} \\ &\geq \langle a^{**}, a^* \rangle - \inf_{(h, h^*) \in X \times X^*} \langle a^{**} - \phi(h), a^* - h^* \rangle \\ &\geq \langle a^{**}, a^* \rangle. \end{aligned}$$

con lo cual se prueba la primera parte. La segunda es directa de lo anterior. \square

Se sospecha que la implicancia

$$(a^*, a^{**}) \in \partial\psi_S(w, w^*) \quad \Rightarrow \quad \psi_S(w, w^*) \leq \langle a^*, w \rangle + \langle a^{**}, w^* \rangle - \langle a^{**}, a^* \rangle$$

es válida para una clase más grande de conjuntos, sin embargo dar una respuesta afirmativa o negativa a esta conjetura permanece como un importante problema abierto en el área. La implicancia de arriba toma importancia debido a que es la que caracteriza el resultado de convexidad de Zagrodny, que ya se mencionó es el más general al respecto.

3. Problemas Abiertos

Ya en las partes anteriores se expusieron 2 problemas abiertos sobre monotonía maximal: la convexidad de la cerradura de dominio y recorrido de un conjunto maximal monótono, que ha permanecido abierto por más de 30 años, y cuya versión más general fue recientemente resuelta por Zagrodny; y el estudio de condiciones para la famosa implicancia de la función de Fitzpatrick. También se mostró la relación entre estos 2 problemas.

Otro problema abierto interesante surge en las técnicas de aproximación de operadores maximales monótonos. Fitzpatrick y Phelps probaron que todo operador maximal monótono puede ser aproximado por una sucesión de operadores monótonos con rango acotado (convergencia en el sentido de Painleve-Kuratowski). Posteriormente se probó que si X tiene un dual separable, un m.m. puede ser aproximado por operadores m.m. de tipo NI. El problema abierto consiste en probar o refutar si esta convergencia de conjuntos implica la convergencia de sus funciones de Fitzpatrick en el sentido de Mosco. Ya se han visto las bondades de las funciones de Fitzpatrick en el análisis de monotonía maximal, en particular la posibilidad de utilizar el análisis convexo con este fin; por lo que la utilidad de un resultado de este estilo es evidente.

Otra arista en el tema consiste en estudiar la aproximación probada por Fitzpatrick y Phelps para espacios más generales que aquellos que poseen dual separable o reflexivos: por ejemplo para espacios Asplund, cuya estructura guarda íntima relación con la separabilidad.

Referencias

- [1] Stephen Simons: *From Hahn-Banach to Monotonicity*; Lecture Notes in Mathematics; Springer; 2008.
- [2] Stephen Simons: *Minimax and Monotonicity*; Lecture Notes in Mathematics; Springer; 1999.
- [3] Dariusz Zagrodny: *The Convexity of the Closure of the Domain and the Range of a Maximal Monotone Multifunction of type NI*; Set-Valued Analysis; 2008.