

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
MA55F – TÉCNICAS DE ANÁLISIS VARIACIONAL



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Inclusiones Diferenciales Informe del Curso

Profesores : Rafael Correa
 : Héctor Ramírez
Autor : Andrés Fielbaum
Fecha : 05/12/2008

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo consiste en el informe sobre el curso "Differential Inclusions", dictado por el profesor Lionel Thibault, en el contexto de la Escuela en Análisis Variacional, desarrollado en el Departamento de Ingeniería Matemática en Noviembre de 2008.

Una inclusión diferencial es un problema del estilo

$$(ID) \quad \dot{x}(t) \in F(t, x)$$

en donde F es una multiaplicación, es decir una función cuyo recorrido son las partes de un conjunto (el problema será planteado en forma más rigurosa en el desarrollo de este informe).

Antes de empezar entonces con el desarrollo de este curso acerca de inclusiones diferenciales, es útil revisar en que contextos aparecen, para así convencerse de que es interesante estudiarlas.

Así, estas ecuaciones aparecen, por ejemplo, en teoría de control; si tenemos el sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), u \in U, x(0) = x_0$$

el problema puede ser re-escrito como una inclusión diferencial. Para esto, definamos $F(t, x) = \bigcup_{u \in U} \{f(t, x(t), u(t))\}$, con lo que el problema de control es equivalente a la inclusión $\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), x(0) = x_0$.

Similarmente, una EDO implícita, es decir, de la forma

$$f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

puede ser reducida a la inclusión diferencial $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, donde $F(t, x) = \{v : f(x, t, v) = 0\}$.

Este tipo de problemas tienen además aplicaciones en macroeconomía y en física (por ejemplo, en problemas de tipo granular), en procesos estocásticos en finanzas, en eléctrica, y en general en problemas que no se conocen lo suficientemente bien como para plantear simplemente una EDO (por ejemplo si no se sabe exactamente como depende la evolución del sistema del estado mismo en que se encuentra, si es que hay múltiples dinámicas esperables, etc).

Pasando entonces ahora al tema mismo, el informe consiste básicamente en dos grandes temas:

1. **Revisión del curso mismo:** En esta parte del informe se desarrollará un breve resumen del curso de Lionel Thibault, con las principales definiciones, resultados y algunas demostraciones. Principalmente se buscará dar sentido al problema (ID) , es decir, qué significará exactamente decir que x es solución. Para esto primero se hará un breve estudio sobre multiaplicaciones medibles y sobre la integral de Bochner para funciones a espacios de Banach cualquiera. Con esto, se podrá formalizar el problema (ID) , para finalmente enunciar un primer teorema sobre existencia de soluciones.
2. **Problemas Abiertos:** En esta parte del informe, la idea es revisar algunos problemas abiertos interesantes que involucren inclusiones diferenciales.

2. REVISIÓN DEL CURSO

Para comenzar, revisemos algunas definiciones: En general (T, τ) será un espacio medible (i.e., τ es una σ -álgebra sobre T), (X, d) será un espacio métrico completo. Sea $f : T \rightarrow X$, y notemos por \mathcal{E}_X la topología inducida en X por d , $\mathcal{B}(X)$ la σ -álgebra boreliana en X . Entonces:

- f se dirá τ -medible (o simplemente medible si no hay ambigüedad posible) si $f^{-1}(V) \in \tau \forall V \in \mathcal{E}_X$.
- f se dirá Bochner τ -medible (o simplemente Bochner medible) si es medible y $f(T)$ es separable.
- f se dirá τ -simple (o solamente simple) si es medible y $f(T)$ es finita.
- f se dirá τ -contable (o simplemente contable) si es medible y $f(T)$ es contable (i.e., de cardinal menor o igual que el de los naturales).

En adelante, siempre supondremos que X es separable, a menos que se indique lo contrario.

2.1. Medibilidad de Multiaplicaciones. La idea es extender el concepto para multiaplicaciones. Entonces para $F : T \rightrightarrows X$ multiaplicación, decimos que es τ -medible (o simplemente medible) ssi $F^{-1}(V) \in \tau \forall V \in \mathcal{E}_X$, donde $F^{-1}(A) = \{t \in T : F(t) \cap A \neq \emptyset\}$ (cualquiera sea $A \subseteq X$).

Dos propiedades interesantes son las siguientes:

1. Si $G : T \rightrightarrows X$ es otra multiaplicación, con $G(t) = adh(F(t))$, entonces F será medible ssi G lo es
2. La unión numerable de multiaplicaciones medibles, así como la suma finita (en el contexto X Banach) de multiaplicaciones medibles, resulta ser una multiaplicación medible.

El siguiente teorema da un criterio de medibilidad utilizando la función distancia d :

Teorema: Sea $F : T \rightrightarrows X$ una multiaplicación. Entonces F es τ -medible $\Leftrightarrow \forall x \in X$, la función $t \mapsto d(x, F(t)) \in \mathbb{R}$ es τ -medible.

Demostración:

\Rightarrow : Basta probar que $\forall r > 0$, el conjunto $A_{x,r} = \{t \in T : d(x, F(t)) < r\} \in \tau$. Pero $A_{x,r} = F^{-1}(B(x, r))$, luego $\in \tau$, por ser F medible.

\Leftarrow : Sea $V \in \mathcal{E}_X$. De la separabilidad del espacio, es posible escribir $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, q_n)$. Luego $F^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-1}(B(x_n, q_n)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{x_n, q_n} \in \tau$.

En adelante, la mayor parte de los resultados tomarán como hipótesis adicional que $\forall t \in T, F(t)$ es un conjunto cerrado. A las multiaplicaciones que verifican esta hipótesis adicional, las llamaremos en adelante c.v.-multiaplicaciones (de "closed valued"). Antes de la siguiente proposición, definamos para F multiaplicación, $dom F = \{t \in T : F(t) \neq \emptyset\}$.

Proposición: Sea $F : T \rightrightarrows X$ una c.v.-multiaplicación medible. Entonces F admite una selección medible, i.e., $\exists f : dom F \rightarrow X$ función medible tal que $\forall t \in T, f(t) \in F(t)$.

Una observación interesante sobre esta proposición es que la hipótesis de ser c.v. se utiliza pues el resultado al que se llegan en la demostración es que $d(f(t), F(t)) = 0$, luego se requiere que este conjunto sea cerrado para garantizar que $f(t)$ pertenece a él.

El siguiente teorema entrega una caracterización para la medibilidad de c.v. multiaplicaciones. Haremos la demostración de este teorema pues se aprecia la importancia de la hipótesis de que la multiaplicación sea a valores cerrados.

Teorema (Representación de Castang): Sea $F : T \rightrightarrows X$ una c.v.-multiaplicación. Entonces ella es medible $\Leftrightarrow \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $f_n : dom F \rightarrow X$ funciones medibles tq $\forall t \in T, F(t) = adh(\{f_n(t) : n \in \mathbb{N}\})$. En tal caso, a $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le llamaremos la representación de Castang de F .

Demostración:

\Leftarrow : Sea $V \in \mathcal{E}_X$. Luego $F^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(V) \in \tau$

\Rightarrow : Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ denso numerable en X . Para $k, j \in \mathbb{N}$, definamos $G_{k,j}(t) = \begin{cases} F(t) \cap B(x_k, 2^{-j}) & \text{si } t \in F^{-1}(B(x_k, 2^{-j})) \\ F(t) & \text{si no} \end{cases}$.

Sea $F_{k,j}(t) = adh(G_{k,j}(t))$. Con esto, $F_{k,j}$ es c.v., $dom F_{k,j} = dom F$ y se verifica que resultan medibles. Luego, por la proposición anterior, $\exists f_{k,j}$ medible selección de $F_{k,j}$. Afirmación: $F(t) = adh\{f_{k,j}(t) : k, j \in \mathbb{N}\}$. En efecto, claramente se tiene \supseteq , por ser F c.v. Para la otra inclusión, sea $t \in T, x \in F(t), \epsilon > 0$. Sean $j, k \in \mathbb{N}$ tq $2^{-j} < \frac{\epsilon}{2}, d(x_k, x) < 2^{-j}$. Luego $t \in F^{-1}(B(x_k, 2^{-j})) \Rightarrow F_{k,j}(t) = adh(F(t) \cap B(x_k, 2^{-j}))$; pero como $f_{k,j}(t) \in F_{k,j}(t)$, se tendrá que $d(f_{k,j}(t), x) \leq d(f_{k,j}(t), x_k) + d(x_k, x) \leq 2^{-j} + 2^{-j} \leq \epsilon$.

La idea es ahora relacionar la medibilidad de multiaplicaciones con aspectos que tienen más que ver con el análisis convexo propiamente tal. En este contexto, X será un Banach separable. Recordemos entonces las dos importantes funciones siguientes: para $C \subseteq X$, $\sigma_C : X^* \rightarrow \mathbb{R}$, con $\sigma_C(x^*) = \sup_{x \in C} \langle x^*, x \rangle$, y

$$\chi_C : X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } \chi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

Proposición: Sea $F : T \rightrightarrows X$ una multiaplicación, con $\text{dom} F = T$ y tal que $\forall t \in T, F(t)$ es débil compacto y convexo. Entonces F es medible $\Leftrightarrow \forall x^* \in X^*, \sigma_{F(\cdot)}(x^*)$ es medible.

Demostración: (la haremos en el caso reflexivo, es decir, con X^* fuerte-separable (pues recordemos que X es separable), pese a que esta hipótesis no es necesaria)

\Rightarrow : Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la representación de Castang de F . Luego $\sigma_{F(t)}(x^*) = \sup_{x \in F(t)} \langle x^*, x \rangle = \sup_{n \in \mathbb{N}} \langle x^*, f_n(t) \rangle$ (donde la última igualdad se tiene por la continuidad de x^*). Luego, como las f_n son todas medibles, x^* es continua (y por lo tanto, medible), la composición de medibles es medible, y como el supremo numerable de medibles es medible, se concluye lo buscado.

\Leftarrow : Sea $(u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ fuerte-denso numerable en B_{X^*} . Como $F(t)$ es débil compacto para cada t , se tiene que $\sigma_{F(t)}(\cdot)$ es una función fuerte continua. Además se sabe que en general, si C es un convexo cerrado no vacío, $d(x, C) = \sup_{x^* \in B_X^*} [\langle x^*, x \rangle - \sigma_C(x^*)]$. Luego, en este caso, por la continuidad ya discutida, se tendrá que $d(x, F(t)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} [\langle u_n^*, x \rangle - \sigma_{F(t)}(u_n^*)]$, de lo que se concluye que $d(x, F(\cdot))$ es medible. Por el teorema que caracterizaba la medibilidad vía la función distancia, se concluye que F es medible.

Esta demostración resulta interesante, pues utiliza argumentos de análisis convexo, en particular propiedades de la función $\sigma_C(x^*)$.

En el caso en que X es un e.v. de dimensión finita, se tiene un criterio más simple para la medibilidad de multiaplicaciones.

Proposición: Si X es e.v. de dimensión finita, $F : T \rightrightarrows X$ es una c.v.-multiaplicación, se tiene que ella es medible $\Leftrightarrow \forall K \subset X$ compacto $F^{-1}(K) \in \tau \Leftrightarrow \forall C \subset X$ cerrado $F^{-1}(C) \in \tau$.

Los siguientes resultados tienen que ver con la relación entre la medibilidad de una multiaplicación con la medibilidad de su grafo en el espacio producto. Para ello, definamos entonces $grF = \bigcup_{t \in T} \{t\} \times F(t)$. La primera **proposición**, bastante simple indica que si $F : T \rightrightarrows X$ es una c.v.-multiaplicación, entonces $grF \in \tau \otimes \mathcal{B}(X)$.

Para el siguiente importante teorema, consideremos ahora una medida μ que sea σ -finita sobre (T, τ) . En adelante asumiremos que τ es una σ -álgebra completa, es decir, $B \in \tau, \mu(B) = 0, A \subseteq B \Rightarrow A \in \tau$. Esto es necesario pues en general se tiene que si $G \in \tau \otimes \mathcal{B}(X)$, entonces $\Pi_T(G)$ (la proyección sobre T) $\in \bar{\tau}$, es decir, a la menor σ -álgebra completa que contiene a τ .

Teorema: Supongamos τ completa, y sea $F : T \rightrightarrows X$ una c.v.-multiaplicación. Entonces son equivalentes:

1. F es medible
2. $GrF \in \tau \otimes \mathcal{B}(X)$
3. $F^{-1}(B) \in \tau \forall B \in \mathcal{B}(X)$
4. $F^{-1}(C) \in \tau \forall C \subset X$ cerrado

Una observación importante es que la completitud de τ sólo es necesaria para 2. \Rightarrow 3. De todos modos, esa es justamente la implicancia que se deseaba encontrar, pues se tiene entonces que en este contexto basta que el grafo de una multiaplicación sea medible para que la multiaplicación misma también lo sea. Veamos entonces la *demostración* de esta implicancia: Sea $B \in \mathcal{B}(X)$, luego $F^{-1}(B) = \Pi_T(GrF \cap [T \times B]) \in \tau$. Un **corolario** directo del teorema anterior es el siguiente: Si τ es completa, y tenemos una familia finita o numerable de multiaplicaciones medibles $(F_j)_{j \in J}$, entonces tanto $G(t) = \bigcap_{j \in J} F_j(t)$ como $H(t) = \bigcup_{j \in J} F_j(t)$ son medibles (pues sus grafos lo serán).

2.2. Inclusiones Diferenciales. Empecemos ahora la revisión de las inclusiones diferenciales propiamente tales. Para ello, es necesario primero manejar una noción de integrales en espacios vectoriales:

2.2.1. Integral de Bochner. Consideremos nuevamente (T, τ, μ) espacio de medida σ -finito, X un espacio de Banach. Para f simple, es decir, $f(t) = \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{1}_{A_j}(t)$, diremos que es integrable ssi $\mu(A_j) < \infty \forall j$. En este caso, se define

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^k a_j \mu(A_j)$$

y se demuestra que no depende de la representación escogida de f .

Para $f : T \rightarrow X$, diremos que es Bochner μ -integrable (dado que en este informe sólo trabajaremos con esta integral, llamaremos a estas funciones simplemente integrables) ssi es Bochner medible y $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples e integrables tal que $\int_T \|f_n(t) - f(t)\| d\mu \rightarrow 0$. En este caso, definimos

$$\int_T f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n d\mu$$

(que existe gracias a la completitud del espacio). Se demuestra además que ser integrable es equivalente a ser Bochner medible y a que $\|f\| : T \rightarrow \mathbb{R}$ sea integrable.

2.2.2. Punto de Lebesgue. Definimos, en analogía con \mathbb{R} , los espacios $\mathcal{L}_X^p(T, \tau, \mu) = \{f : f \text{ es Bochner medible y } \|f\|^p \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T, \tau, \mu)\}$. Si no hay ambigüedad posible, los notaremos simplemente \mathcal{L}_X^p .

Del mismo modo, definimos $L_X^p := \mathcal{L}_X^p / \sim_p$, donde \sim_p es la relación de equivalencia dada por $f \sim_p g \Leftrightarrow \|(\|f - g\|_X)\|_{L_{\mathbb{R}}^p} = 0$. Con esto, el espacio L_X^p es un espacio de Banach si se le dota de la norma $\|f\|_p = \|(\|f\|_X)\|_{L_{\mathbb{R}}^p}$.

Se tienen los siguientes resultados:

- Si $p \in (1, \infty)$, entonces $(L_X^p)^* \cong L_{X^*}^q$, donde q es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- Si X es reflexivo, entonces $(L_X^1)^* \cong L_{X^*}^\infty$

Consideremos ahora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $\nu, \rho : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow X$ medidas vectoriales, i.e., que verifican

1. $\nu(\emptyset) = 0$ (ídem para ρ)
2. $\nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n), \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tau$ disjuntos de a pares (ídem para ρ)

Diremos entonces que ν es diferenciable con respecto a ρ en $a \in \mathbb{R}^N$ ssi

$$\lim_{\rho(C) \rightarrow 0, C \in \mathcal{C}(a)} \frac{\nu(C)}{\rho(C)}$$

existe en X , y se nota $\frac{d\nu}{d\rho}(a)$, donde $\mathcal{C}(a)$ es el conjunto de cubos que contienen a a y que están contenidos en Ω .

Cuando $X = \mathbb{R}, \rho = \lambda$ (la medida de Lebesgue), se tienen resultados interesantes:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, ν una medida con signo, en $\mathcal{B}(\Omega)$ siendo $|\nu|$ su variación total. Entonces la medida de Lebesgue λ satisface:

1. $\frac{d\nu}{d\lambda}(x) \exists \lambda$ -ctp, y define una función medible.
2. $\forall B \in \mathcal{B}(\Omega), \int_B |\frac{d\nu}{d\lambda}| d\lambda \leq |\nu|(B)$
3. $\nu(B) = \int_B \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda$ medible ssi ν es continua con respecto a λ , i.e., $\lambda(A_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \nu(A_n) \rightarrow 0$
4. Si ν es singular con respecto a λ , es decir, $\exists A \in \mathcal{B}(\Omega)$ con $\lambda(A) = 0$ y tal que $\forall B \in \mathcal{B}(\Omega), \nu(B) = \nu(A \cap B)$, entonces $\frac{d\nu}{d\lambda} = 0$ λ -ctp

Volvamos ahora al contexto de inclusiones diferenciales. Consideremos I un intervalo, X un Banach separable, $f : I \rightarrow X$ integrable y definamos $\forall A \in \mathcal{B}(I), \nu(A) = \int_A f(t) d\lambda(t)$. Los puntos donde $\frac{d\nu}{d\lambda}$ existe se llaman puntos de Lebesgue.

Supongamos ahora que existe una función ϕ que verifica $\forall s, t \in I$

$$\phi(t) - \phi(s) = \int_s^t f(r) dr$$

En tal caso, ϕ se llama primitiva de f , y se verifica que ϕ' existe ctp y que en estos puntos $\phi'(r) = f(r)$.

El teorema siguiente extiende un conocido teorema en el caso real, y caracteriza las funciones que son primitivas de alguien:

Teorema: Sea $\phi : I \rightarrow X$, donde X es reflexivo. Entonces ϕ es primitiva de alguna función ssi ϕ es localmente absolutamente continua, i.e., $\forall [c, d] \subset I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para toda familia numerable de intervalos disjuntos $\{(c_k, d_k)\}$ contenidos en $[c, d]$, se tiene que $\sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} |\phi(b_k) - \phi(a_k)| < \epsilon$.

2.2.3. Definición de la Inclusión Diferencial. Sea X Banach separable, $T \in (0, \infty), \tau = \mathcal{B}(T), F : I \times X \rightrightarrows X$ una multiaplicación, donde $I = [0, T]$. Consideremos el problema:

$$(ID) \begin{cases} \dot{u} \in F(t, u(t)) & \lambda - ctp \\ u(0) = a \end{cases}$$

Una función $u : I \rightarrow X$ se dice solución de (ID) si $u(0) = a$ y es primitiva de una función llamada \dot{u} satisfaciendo la inclusión.

Directamente del teorema anterior se deduce que si X es reflexiva, entonces u solución de $(ID) \Rightarrow u$ absolutamente continua (notemos que absolutamente continua y no localmente absolutamente continua, pues está definida sobre un compacto).

Antes de enunciar el principal resultado de existencia, veremos un teorema que viene ser algo así como la generalización del teorema de Luzin de funciones medibles (que, a grandes rasgos, dice que en espacios adecuados, toda función medible, al restringirla sobre un compacto cualquiera, basta restringirla a un compacto un poco más pequeño (en el sentido de la medida) para que quede continua). Para ello, definamos primero la semicontinuidad superior de multiaplicaciones. Así, $G : Y \rightrightarrows Z$ multiaplicación, donde Y, Z son espacios topológicos, se dirá semicontinua superior (s.c.s.) en $y_0 \in Y$ ssi $\forall W \subseteq Z$ abierto tq $G(y_0) \subseteq W, \exists V \subseteq Y$ abierto tq $y_0 \in V \wedge \bigcup_{v \in V} G(v) \subseteq W$.

Teorema: Sea (T, τ, μ) un espacio medible de Radon, y sean X, Y espacios métricos compactos. Sea $F : T \times X \rightrightarrows Y$ una c.v.-multiaplicación $\tau \otimes \mathcal{B}(X)$ -medible, tq $\text{dom} F = T \times X$ y que verifica $F(t, \cdot)$ s.c.s. $\forall t \in T$. Entonces $\forall \epsilon > 0 \exists S \subseteq T$, con $\mu(T/S) < \epsilon$ y tal que $F|_{S \times X}$ es s.c.s.

Veamos ahora la última proposición, que trata acerca de existencia de soluciones de la inclusión diferencial:

Proposición: Sea $F : [0, T] \times X \rightrightarrows X$ una c.v.-multiaplicación, tq $\text{dom} F = T \times X, F(t, x)$ es convexo $\forall t, x$. Suponer además que:

1. $\forall t \in [0, T], F(t, \cdot)$ es s.c.s.
2. $\forall x \in X, F(\cdot, x)$ es Lebesgue-medible
3. $\exists c > 0, K \subseteq B_X(0, 1)$ convexo compacto tq $F(t, x) \subset c(1 + \|x\|)K$

Entonces existe u solución de (ID) tal que

- $u(t) - a \in cT(1 + \rho)K \forall t$
- $\dot{u}(t) \in c(1 + \rho)K \forall t$

Donde $\rho = 1 + \|a\|e^{cT}$, siendo a la condición inicial. Además u resulta ser Lipschitz de constante $c(1 + \rho)$.

La demostración la omitiremos, pues tiene bastantes pasos más bien técnicos. Sin embargo, es interesante el hecho de que la demostración es relativamente similar a la del Teorema de Peano: así, va construyendo aproximaciones poligonales, las que luego convergerán (salvo subsucesión) uniformemente gracias al Teorema de Arzela Ascoli; tal límite sera la solución de (ID) .

3. PROBLEMAS ABIERTOS

Antes de revisar esta sección, recordemos una definición. Sea entonces $C \subset X$, siendo X e.v.n. Se definen entonces para $x \in C$:

1. El cono tangente a C en x , dado por $T_C(x) = \{h \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(x+th, C)}{t} = 0\}$ (que resulta ser un cono)
2. El cono normal, dado por $N_C(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle \leq 0 \forall h \in T_C(x)\}$ (que también resulta ser un cono).

Estos conos aparecen frecuentemente en problemas de optimización, pues están ligados fuertemente a las condiciones de optimalidad de primer orden. En particular, se tiene el siguiente resultado:

Proposición: Si x es un mínimo local de $J|_C$, donde $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función Frechet-diferenciable, entonces $-J'(x) \in N_C(x)$.

Luego resultan interesantes los casos particulares de inclusiones diferenciales, donde en la multiaplicación F aparece un cono normal. Una propiedad importante es que los conos normales siempre son convexos cerrados, por lo que muchos de los teoremas y proposiciones antes vistos valen.

Un ejemplo particular y que no ha sido estudiado es el siguiente:

Sea X un Hilbert, $A : X \rightrightarrows X$ una multiaplicación monótona (i.e., $\forall x, y \in \text{dom} A, \forall v \in A(x), w \in A(y), \langle v - w, x - y \rangle \geq 0$) maximal (i.e., no existe otra multiaplicación monótona tal que su grafo contenga en forma estricta al de A). Sea $C : \mathbb{R} \rightrightarrows X$ una c.v.-multiaplicación tal que $\forall t, C(t)$ es un conjunto prox-regular, es decir, tal que la proyección sobre $C(t)$, para cualquier punto del espacio, es única. El problema consiste en estudiar la inclusión diferencial:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -A(u(t)) - N_{C(t)}(u(t)) \\ u(0) = a \in C(0) \end{cases}$$

Se sabe que en los siguientes casos hay solución única: si $A = 0$, o si $C(t) = X \forall t$ (pues en ese caso $N_C(t)(u) = \{0\} \forall u$), pero el caso general es aún un problema abierto.

Una observación interesante es que un ejemplo de multiaplicación monótona maximal puede ser el subdiferencial de una función convexa $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (identificando los elementos de X^* con los de X mediante el teorema de representación de Riesz).