

Control 2 MA54G

15 de Noviembre de 2008

4:00hrs

Prof.: Joaquín Fontbona

Problema II

- a) R: Para la primera pregunta, sólo falta verificar que los incrementos son independientes. (OJO: como no se ha probado que el proceso (B_t) es Gaussiano, no basta probar que los incrementos son independientes por pares o que son no correlacionados).

En efecto para $t_0 \leq \dots \leq t_m$, y con $N_j \sim \mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1})$ normales independientes y g_j funciones medibles acotadas,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g_m(B_{t_m} - B_{t_{m-1}}) \cdots g_1(B_{t_1} - B_{t_0})) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(g_m(B_{t_m} - B_{t_{m-1}}) | \mathcal{F}_{t_{m-1}}) \cdots f_1(B_{t_1} - B_{t_0})) \\ \mathbb{E}(N_m) \mathbb{E}(g_{m-1}(B_{t_{m-1}} - B_{t_{m-2}}) \cdots g_1(B_{t_1} - B_{t_0})) &= \dots \text{ (iterando)} \\ \dots &= \mathbb{E}(N_m) \cdots \mathbb{E}(N_1) = \mathbb{E}(g_m(B_{t_m} - B_{t_{m-1}})) \cdots \mathbb{E}(g_1(B_{t_1} - B_{t_0}))\end{aligned}$$

La segunda pregunta es trivial de la propiedad de Markov del m.B.

- b) R: Se sabe de clases que es martingala local. Es trivialmente acotada en intervalos compactos porque B_t aparece en senos y cosenos. Se vio en clases para una mart. local, M_t , si $\sup_{t \in [0, T]} |M_t|$ es integrable entonces M_t es una martingala. Se aplica esto o bien se verifica a mano que la mart. loc. exponencial es martingala, tomando la suc. (T_n) de t.de.p localizante y usando conv. dominada para pasar al límite cuando $n \rightarrow \infty$.

La fórmula se verifica fácilmente de lo anterior.

- c) R: Por la parte anterior,

$$\tilde{\mathbb{E}}_A(\exp\{i\lambda(B_{t+s} - B_t)\}) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(\exp\{i\lambda(B_{t+s} - B_t)\} | \mathcal{F}_t) \mathbf{1}_A)}{\mathbb{E}(A)} = \exp\{-\frac{\lambda^2}{2}s\}.$$

Es decir, μ_A tiene la función característica de $N \sim \mathcal{N}(0, s)$ así que es igual a esa ley. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(f(B_{t+s} - B_t) \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(f(N)) \mathbb{P}(A).$$

Tomando $A = \Omega$ y $t = 0$, se obtiene que $\mathbb{E}(f(B_s)) = \mathbb{E}(f(N))$. Esto da la ley de los incrementos, y reinyectando esto en la ecuación anterior, se obtiene la igualdad pedida:

$$\mathbb{E}(f(B_{t+s} - B_t) \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(f(B_s)) \mathbb{P}(A).$$

Como f es cualquier función medible acotada, lo anterior dice exactamente que $B_{t+s} - B_t$ es independiente de $\mathcal{F}_t$, y todo queda probado.

- d) R: aplicando Ito se obtiene por las hipótesis que

$$X_t := \exp\{i\lambda \cdot B_t + \frac{\|\lambda\|^2}{2}t\} = 1 + i\lambda \int_0^t X_s dB_s.$$

El hecho que es acotada es como en la parte b), y establecido que es martingala, la fórmula pedida se obtiene con algunas manipulaciones algebraicas simples.

- e) R: Sea $\tilde{\mathbb{P}}_A$ como antes. Si μ_A denota ahora la medida de probabilidad inducida en $\mathbb{R}^d$ por el vector

$$(B_{t+s}^{(1)} - B_t^{(1)}, \dots, B_{t+s}^{(d)} - B_t^{(d)})$$

bajo $\tilde{\mathbb{P}}_A$, entonces por la parte anterior

$$\tilde{\mathbb{E}}_A(\exp\{i\lambda \cdot (B_{t+s} - B_t)\}) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(\exp\{i\lambda \cdot (B_{t+s} - B_t)\} | \mathcal{F}_t) \mathbf{1}_A)}{\mathbb{E}(A)} = \prod_{j=1}^d \exp\{-\frac{\lambda_j^2}{2}s\},$$

lo que significa que el vector en cuestión es un vector normal centrado de matriz de covarianza $sI_{d \times d}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(f_1(B_{t+s}^{(1)} - B_t^{(1)}) \cdots f_d(B_{t+s}^{(d)} - B_t^{(d)})) \mathbf{1}_A = \mathbb{E}(f_1(N^{(1)})) \cdots \mathbb{E}(f_d(N^{(d)})) \mathbb{P}(A),$$

donde $N^{(1)}, \dots, N^{(d)}$ son i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, s)$.

Tomando $A = \Omega$ y $t = 0$, $\mathbb{E}(f_1(B_s^{(1)}) \cdots f_d(B_s^{(d)})) = \mathbb{E}(f_1(N^{(1)})) \cdots \mathbb{E}(f_d(N^{(d)}))$, y tomando $f_j = 1$ para todos los j menos $j = k$,

$$\mathbb{E}(f_k(B_s^{(k)})) = \mathbb{E}(f_k(N^{(k)})).$$

Reinyectando esto en lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_1(B_{t+s}^{(1)} - B_t^{(1)}) \cdots f_d(B_{t+s}^{(d)} - B_t^{(d)})) \mathbf{1}_A &= \mathbb{E}(f_1(B_s^{(1)})) \cdots \mathbb{E}(f_d(B_s^{(d)})) \mathbb{P}(A) \\ &= \mathbb{E}(f_1(B_s^{(1)}) \cdots f_d(B_s^{(d)})) \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los incrementos de las distintas coordenadas en el intervalo $[t, t+s]$ son i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, s)$ e independientes de $\mathcal{F}_t$. Esto implica directamente que cada $B^{(k)}$ es un $\mathcal{F}_t$ m.B. Por un argumento iterativo similar al de la demostración de la parte a), tomando $g_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = \prod_{k=1}^d g_{j,k}(B_{t_j}^{(k)} - B_{t_{j-1}}^{(k)})$ para funciones $g_{j,k}$ medibles acotadas, vemos que todos los incrementos $(B_{t_j}^{(k)} - B_{t_{j-1}}^{(k)})$, con $k = 1, \dots, d$ y $j = 1, \dots, m$ son independientes. Esto implica que los $B^{(k)}$, $k = 1, \dots, d$ son procesos independientes.

- f) R: un cálculo directo muestra que $\langle B \rangle_t = \langle B' \rangle_t = t$, y $\langle B, B' \rangle_t = 0$, y se aplica lo anterior.

Notar que la aplicación $(x, y) \mapsto (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y, \sin(\theta)x - \cos(\theta)y)$ es una rotación en ángulo θ . La interpretación geométrica es fácil si por ejemplo se toma primero θ_s constante: al rotar un m. Browniano 2-dimensional, se obtiene un m. Browniano 2-dimensional. En el caso general, podemos decir que si la rotación se hace “infinitesimalmente”, incluso siendo el ángulo aleatorio (pero adaptado a los Brownianos!) se sigue obteniendo un m. Browniano 2-dimensional.