Control 1 Análisis Funcional

27 de Septiembre 2006

Profesor: Raúl Manásevich

Auxiliares: Cristóbal Guzman y Felipe Olmos

P1.- Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita y $T : E \to E$ un operador lineal contínuo. Sea $a > 0$ y $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de valores propios de T tales que :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, |\lambda_n| > a$
- $\forall\, n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}\,,\, \lambda_{n_1} \neq \lambda_{n_2}$

Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión de vectores de norma 1, tales que $Te_n = \lambda_n e_n$

(i) Definimos para $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

Demuestre que U_n es un conjunto linealmente independiente para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Definimos para $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n =< e_1, \ldots, e_n >$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $v_n \in E_n$ tal que:

$$\| v_n - z \| > \frac{1}{2} \quad \forall\, z \in E_{n-1}$$

(iii) Sean $1 \leq p < n$ con n y $p \in \mathbb{N}$, muestre que :

$$Tv_n - Tv_p = \lambda_n v_n - \tilde{w} \quad \text{con } \tilde{w} \in E_{n-1}$$

(iv) Concluya a partir de lo anterior que T no es compacto.

P2.- Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita y $T : E \to E$ un operador lineal compacto.

(i) Demuestre que $0 \in \sigma(T)$

(ii) Demuestre que si $\lambda \neq 0$ entonces $\lambda \in \rho(T)$ ó $\lambda \in \sigma_p(T)$. En el último caso demuestre que el espacio propio correspondiente a λ es de dimensión finita.

(iii) Demuestre que $\sigma(T)$ es numerable y que si no es finito los elementos de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ se pueden ordenar en una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$$

y que :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

HINT: Use el resultado del **P1**

P3.- Sea H espacio de Hilbert complejo y $T : H \to H$ un operador lineal contínuo. Definimos:

$$\tilde{\sigma} = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \exists\, u_n \,,\; \| u_n \|= 1 \,,\; \lim_{n\to\infty} \| (T-\lambda)u_n \|= 0\}$$

Demuestre que :

(i) $\tilde{\sigma} \subseteq \sigma(T)$

(ii) Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \tilde{\sigma}$ se tiene que :

$$\exists\, C > 0 \quad \text{t.q.} \quad C \| (\lambda - T)u \| \geq \| u \| \;\; \forall\, u \in H$$

y que $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$

(iii) Si T es autoadjunto entonces $\sigma(T)$ es real y que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $Im(\lambda) \neq 0$ entonces $\lambda \in \rho(T)$

(iv) Si T es autoadjunto entonces

$$\sigma = \tilde{\sigma}$$

P4.- Sea E espacio de Banach y $T : E \to E$ un operador tal que $\| Tx \|=\| x \|$ (es decir T es una *isometría*). Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

$$D = \{\lambda \;:\; |\lambda| < 1\} \quad C = \{\lambda \;:\; |\lambda| = 1\}$$

(i) Pruebe que :

- $\sigma_p(T) \subseteq C$
- $\sigma(T) \subseteq \bar{D}$
- Para $\lambda \in D$:

$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T)(E) = E$$

(ii) Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D \cap \rho(T)$ una sucesión tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \quad \text{con } \lambda \in D$$

Pruebe que $\lambda \in \rho(T)$

HINT: Pruebe que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\| R(\lambda_n, T) \| \leq \frac{1}{1 - |\lambda_n|}$$

y use el siguiente resultado:

Sea $T \in LC(E,E)$ con E Banach. Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \rho(T)$ convergente a λ. Entonces si $(||R_{\lambda_n}||)$ es acotada, se tiene que $\lambda \in \rho(T)$

(iii) Pruebe que $D \cap \rho(T)$ es cerrado y abierto en D . Deduzca que o bien es vacío o igual a D.

(iv) Pruebe que sólo se puede tener uno de los siguientes casos

- $\sigma(T) \subseteq C$
- $\sigma(T) = \bar{D}$

Pruebe que el último caso se tiene sí y sólo sí T es sobreyectiva.

(iv) Suponga $E = \ell^p$ con $p \in [1,\infty]$ y T definido por:

$$T(u_1, u_2, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots)$$

(es decir T es el *shift a la derecha*). Demuestre que $\sigma(T) = \bar{D}$ y que $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Tiempo : xx Horas