

Control 3, MA46B 2006/2
Prof. Salomé Martínez
Prof. Aux. Gonzalo Dávila
Tiempo: 4 hrs.

1. Considere

$$S(t)f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}f),$$

el semigrupo asociado a la ecuación de Schrödinger. Sea $\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^s(\mathbb{R}^n))$ es el espacio de las transformaciones lineales continuas de $H^s(\mathbb{R}^n)$ en $H^s(\mathbb{R}^n)$, con la norma $|||L||| = \sup_{\|\phi\|_{H^s}=1} \|L\phi\|_{H^s}$. Demuestre que para $t_1 \neq t_2$ se tiene que $|||S(t_1) - S(t_2)||| = 2$. Concluya que $S \notin C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^s(\mathbb{R}^n)))$.

2. Para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definimos $u(t) = S(t)f$, donde $S(t)$ es el semigrupo definido en el problema anterior.
- a) Considere en $L^2(\mathbb{R}^n)$ la transformación

$$S_0(t)g = \frac{e^{\frac{-|x|^2}{4it}}}{(2it)^{n/2}} \mathcal{F}(f)(x/2t).$$

Demuestre que para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $S_0(t)g = S(t)(e^{\frac{|x|^2}{4it}}g(x))$. **Ind.:** Para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $t \neq 0$ tenemos que

$$S(t)u = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4it}} g(y) dy.$$

- b) Pruebe que para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\|S(t)((e^{\frac{|x|^2}{4it}} - 1)g(x))\|_{L^2} \leq \frac{C}{t}$$

con C dependiendo de g .

- c) Pruebe que para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - S_0(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

3. Suponga que $(1 + |x|^2)f \in L^1(\mathbb{R})$ y $u(t) = K(t) * f$ es la solución de la ecuación del calor, donde

$$K(t)(x) = \frac{e^{\frac{-|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}.$$

Expandiendo la transformada de Fourier de f en cero apropiadamente, encuentre una expansión asintótica para $u(t)$ cuyo error esté acotado por $Ct^{-(n+2)/2}$ con C constante dependiendo de f .

4. Sea Ω un dominio suave y acotado de \mathbb{R}^n . Suponga que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisface $Lu = f$ en Ω y $u = 0$ en $\partial\Omega$, con $L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ un operador uniformemente elíptico en Ω con $|a_{ij}|$ acotados en Ω , para todo i, j . Sea $x_0 \in \partial\Omega$. Diremos que w es una barrera en x_0 si $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisface $Lw \leq -1$ en Ω , $w(x_0) = 0$ y $w \geq 0$ en $\partial\Omega$. Demuestre que existe una constante que depende de f tal que

$$\|\nabla u(x_0)\| \leq C \left| \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \right|.$$