Pauta Control 3 MA38B Primavera 2008

1. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $G \subseteq C^0(X)$ el conjunto de las isometrías de X en sí mismo. Sabemos que cuando X es compacto toda función $g : X \to X$ que preserva distancia es biyectiva, y entonces $g \in G$.
   Se dota $C^0(X)$ y G de la topología de la convergencia uniforme cuya métrica la denotamos D. El propósito de este ejercicio es mostrar que G es compacto.

   (a) (1 pt.) Para cada $x \in X$, denote τ_x al funcional de evaluación en X, esto es,

   $$\begin{array}{rccl} \tau_x : & C^0(X) & \longrightarrow & X \\ & f & \longmapsto & \tau_x(f) = f(x) \end{array}$$

   Pruebe que τ_x es continuo.

   (b) (1 pt.) Para cada $x, y \in X$ se define:

   $$F_{x,y} = \left\{ f \in C^0(X) | d(f(x), f(y)) = d(x,y) \right\}$$

   Pruebe que $F_{x,y}$ es cerrado en $C^0(X)$.

   (c) (1 pt.) Concluya que G es cerrado en $C^0(X)$

   (d) (1 pt.) Para cada $x \in X$ pruebe que el conjunto $\{f(x) \in X | f \in G\}$ es relativamente compacto en X.

   (e) (2 pt.) Pruebe que G es compacto en $C^0(X)$

   Sol.

   (a) Es fácil darse cuenta que el funcional τ_x es Lipschitz-continuo de constante 1.

   (b) Para ver que es cerrado, basta tomar límite en la igualdad:

   $$d(f_n(x), f_n(y)) = d(x,y)$$

   y usar la continuidad de la métrica.

   (c) Para ver que es cerrado, notar que:

   $$G = \bigcap_{x,y \in X} F_{x,y}$$

   (d) Note que es directo, pues un cerrado dentro de un compacto es compacto.

   (e) La idea es usar Arzelá-Ascolí para probar esto. Note que puede usar la versión 2 del teorema. Falta ver que la familia G es equicontínua, lo cual es directo pués son isometrías. Basta considerar $\varepsilon = \delta$.

2. Sean X, Y dos espacios métricos compactos. Denotemos E el subespacio vectorial de $C^0(X \times Y; \mathbb{R})$ engendrado por las funciones de variables separadas $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ $\forall f \in C^0(X;\mathbb{R}), \forall g \in C^0(Y;\mathbb{R})$. Denote, genéricamente, D_Z la métrica asociada a la convergencia uniforme en $C^0(Z;\mathbb{R})$.
   Sea $h \in C^0(X \times Y; \mathbb{R})$. Para $y \in Y$, se denota $f_y : X \to \mathbb{R}$ la *aplicación marginal* de h con respecto a la segunda variable, esto es, la aplicación que a x asocia $f_y(x) = h(x,y)$.

   (a) Aplique adecuadamente uno de los teoremas del curso para probar que E es denso en $C^0(X \times Y; \mathbb{R})$.

   Esto mismo se puede probar, alternativamente, como sigue:

   (b) Pruebe que f_y es continua, esto es, $f_y \in C^0(X;\mathbb{R})$.

   (c) Pruebe que la aplicación $y \mapsto f_y$ es continua de Y en $C^0(X;\mathbb{R})$.
   [*Ind.*: Pruebe que $\forall y \in Y$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$; $d(y,z) \le \delta \;\Rightarrow\; D_X(f_y, f_z) \le \varepsilon$ y para ello, calcule $D_X(f_y, f_z)$]

(d) Sea $\varepsilon > 0$. Para $z \in Y$, denote φ_z la función

$$\varphi_z(y) = \max(0, \varepsilon - D_X(f_y, f_z))$$

Muestre que existe una parte finita $J \subset Y$ tal que la función $\sum_{z \in J} \varphi_z$ no se anula.

[*Ind.*: Razone por absurdo y use que como Y es compacto, $\forall \alpha > 0 \; \exists \, J \subset Y, \text{finito}; \; Y \subset \bigcup_{z \in J} B(z, \alpha)$]

(e) Denote $\psi = \sum_{z \in J} \varphi_z$ y, para $z \in J$, defina $g_z = \frac{\varphi_z}{\psi}$.
Muestre que para todo $(x, y) \in X \times Y$ se tiene

$$\left| h(x, y) - \sum_{z \in J} f_z(x) g_z(y) \right| \leq \varepsilon$$

[*Ind.*: Observe que las funciones g_z son no-negativas, de suma 1, y que entonces se tiene

$$h(x, y) - \sum_{z \in J} f_z(x) g_z(y) = \sum_{z \in J} (h(x, y) - f_z(x)) g_z(y)$$

(f) Deduzca que E es denso en $C^0(X \times Y; \mathbb{R})$.

Sol.

(a) Aplicación directa de Stone-Weierstrass.

(b) Directo pues h es continua.

(c) Debemos mostrar que $\forall y \in Y, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(y, \epsilon)$ tq:

$$d(y, z) < \delta \Rightarrow D_X(f_y, f_z) < \epsilon$$

Pero:

$$D_X(f_y, f_z) = \sup_{x \in X} d(f_y(x), f_z(x))) = \sup_{x \in X} d(h(x, y), h(y, z)) = d(h(\bar{x}, y), h(\bar{x}, z))$$

Hay que notar que la función $h(\bar{x}, \cdot)$ es continua en Y, que es compacto, y por lo tanto es uniformemente continua en Y. Luego,

$$\exists \eta_\epsilon > 0; \quad d(y, z) \leq \eta_\epsilon \Rightarrow d(h(\bar{x}, y), h(\bar{x}, z)) \leq \epsilon$$

Ahora eligiendo $\delta = \eta_\epsilon$, tendremos que $\Rightarrow D_X(f_y, f_z) < \epsilon \Rightarrow y \mapsto f_y$ es continua.

(d) Como Y es compacto, entonces:

$$\forall \alpha > 0, \exists \{z_1, ..., z_n\}; \quad Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \alpha)$$

Razonemos por contradicción. Tomemos $\alpha = \epsilon$ y $J = \{z_1, ..., z_n\}$, luego $\exists y \in Y$ tal que:

$$\sum_{z \in J} \varphi_z(y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{z \in J} \max(0, \epsilon - D_X(f_y, f_z)) = 0$$

$$\Rightarrow \forall z \in J \quad \max\{0, \epsilon - D_X(f_y, f_z)\} = 0 \Rightarrow \forall z \in J, \quad \epsilon \leq D_X(f_y, f_z)$$

$$\Leftrightarrow \forall z \in J, \quad f_z \notin B_{D_X}(f_y, \epsilon)$$

(e) Tenemos que:

$$\left| h(x, y) - \sum_{z \in J} f_z(x) g_z(y) \right| = \left| \sum_{z \in J} g_z(y) \left(h(x, y) - f_z(x) \right) \right| \leq \sum_{z \in J} \left| h(x, y) - f_z(x) \right| g_z(y)$$

$$\sum_{z \in J} \left| f_y(x) - f_z(x) \right| g_z(y) \leq \sum_{z \in J} D_X(f_y, f_z) g_z(y) < \sum_{z \in J} \epsilon g_z(y) = \epsilon$$

3. Sean E, F e.v.n.'s. Decimos que un operador lineal $T : E \to F$ es *compacto* si $\overline{T(A)}$ es un compacto (y entonces acotado) de F para todo $A \subset E$ acotado. Denotamos $\mathcal{LK}(E, F)$ al conjunto de todos los operadores compactos de E en F.

   (a) Dado $T : E \to F$ lineal, pruebe que T es compacto si y sólo si $\overline{T(B)}$ es compacto, donde B es la bola unitaria cerrada de E.

   (b) Pruebe que todo operador compacto es continuo. Dé un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto en general.

   [*Ind.*: Para el contraejemplo, recuerde que en un e.v.n. de dimensión infinita la bola unitaria cerrada no es compacta]

   (c) Pruebe que $\mathcal{LK}(E, F)$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$.

   [*Ind.*: Para probar que la suma de aplicaciones compactas es compacta, considere y estudie la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & K_1 \times K_2 & \longrightarrow & K_1 + K_2 \\ & (u, v) & \longmapsto & u + v, \end{array}$$

   con $K_1, K_2 \subset E$ adecuados]

   (d) Suponga ahora que F es Banach. Pruebe que $\mathcal{LK}(E, F)$ es cerrado en $\mathcal{L}(E, F)$.

   [*Ind.*: Use sin demostración que si F completo, entonces se tienen las siguientes equivalencias:

$$T \in \mathcal{LK}(E, F) \Leftrightarrow T(B) \text{ es relativamente compacto} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \{z_i\}_{i=1}^m \subset F;\ T(B) \subset \bigcup_{i=1}^m B(z_i, \varepsilon).\ ]$$

   (e) Pruebe que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $\dim(T(E)) < \infty$ entonces $T \in \mathcal{LK}(E, F)$.

Sol.

(a) $\Rightarrow$: Directa.

$\Leftarrow$: Para probar esto, basta notar que como T es lineal, $T(B(0, R)) = R\ T(B(0, 1))$, así considerando $A \subset E$ acotado, entonces existe R tal que:

$$A \subset B(0, R) \Rightarrow T(A) \subset T(B(0, R)) = R\ T(B(0, 1)) \subset \overline{R\ T(B(0, 1))}$$

Que es compacto, por lo tanto $\overline{T(A)}$ es un cerrado en un compacto.

(b) PDQ: Toda aplicación compacta es acotada, pero dado A acotado, $\Rightarrow T(A) \subseteq \overline{T(A)} \Rightarrow$ es acotado.

(c) Considerando la función φ dada, tendremos que el conjunto suma de imágenes es compacto.

(d) Consideremos una sucesión $(T_n) \subset \mathcal{LK}(E, F)$ tal que $T_n \to T$ uniformemente. Hay que probar que este límite es efectivamente una función compacta. Para esto, consideremos $\varepsilon > 0$, por lo tanto existe N tal que: $D(T_N, T) < \varepsilon$. Como f_N es compacta, existen centros $z_1, ..., z_m \in F$ tal que:

$$f_N(B) \subset \bigcup_{i=1}^m B(z_i, \varepsilon/2)$$

Se tiene claramente lo siguiente:

$$\forall x \in B \exists i \in \{1, ..., m\} \mid ||T(x) - z_i|| < \varepsilon$$

Esto es pues, para z_i adecuado, se tiene:

$$||T(x) - z_i|| \leq ||T(x) - T_N(x)|| + ||T_N(x) - z_i|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Así:

$$T(B) \subset \bigcup_{i=1}^m B(z_i, \varepsilon)$$

(e) Como T es lineal contínua, manda acotados en acotados, por lo tanto $T(B)$ es un acotado, así, existe $R > 0$ tal que: $T(B) \subset B(0, R)$, que es un compacto, pues $T(E)$ tiene dimensión finita. Con esto, $\overline{T(B)}$ está contenido en un compacto, por lo tanto es compacto.

4. Sea E un espacio vectorial normado y F un subespacio vectorial. Sea también $a \in E$ un punto que no pertenece a $\overline{F}$. Denotamos $d = dist(a, F) > 0$.

(a) Considere la funcional

$$\begin{array}{rccc} S: & F \oplus a\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y + \lambda a & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

Pruebe que es una forma lineal bien definida, más aún, muestre que si escribimos $x = y + \lambda a$, con $y \in F$, entonces se tiene la desigualdad

$$||x|| \geq |\lambda| d.$$

(b) Demuestre que S es continua y que $||S|| = \frac{1}{d}$
[*Ind.*: Para la desigualdad que falta considere una sucesión (x_n) tal que

$$d = \lim_{n\to\infty} ||x_n - a||$$

y utilice que S es acotado.]

(c) Usando el Teorema de Hahn-Banach demuestre que existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que

$$T = 0 \text{ en } F, \quad Ta = 1 \quad \text{y} \quad ||T|| = \frac{1}{d}.$$

(d) Consideremos ahora el subespacio de ℓ^∞ definido por

$$F = \left\{ x = (x_k) \in \ell^\infty \mid \sup_{n\geq 0} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\}$$

Sea $e = (e_n) \in \ell^\infty$ donde $e_n = 1\ \forall n$. Demuestre que existe una forma lineal continua $T \in (\ell^\infty)'$ tal que

$$T|_F = 0, \quad Te = 1 \quad \text{y} \quad ||T|| = 1$$

Sol.

(a) Como $a \notin \overline{F}$ entonces la suma directa $F \oplus a\mathbb{R}$ está bien definida y por ende todo elemento $x \in F \oplus a\mathbb{R}$ se puede escribir de manera única como

$$x = y + \lambda a$$

con $y \in F, \lambda \in \mathbb{R}$. Sigue que la expresión S define efectivamente una función.

Sean $x_1, x_2 \in F \oplus a\mathbb{R}$, entonces se tiene que $x_1 = y_1 + \lambda_1 a$ y $x_2 = y_2 + \lambda_2 a$ para ciertos $y_1, y_2 \in F$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y con ello para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x_1 + \alpha x_2 = (y_1 + \alpha y_2) + (\lambda_1 + \alpha\lambda_2)a$$

y por consiguiente

$$S(x_1 + x_2) = \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = Sx_1 + \alpha Sx_2$$

es decir la función S es lineal.

Finalmente notamos que si $\lambda = 0$ entonces la desigualdad es trivial, y en el caso que no

$$||x|| = |\lambda|(\frac{y}{\lambda} + a) \geq |\lambda| d$$

.

(b) De lo anterior podemos concluir que $|Sx| = |\lambda| \leq \frac{1}{d}||x||$ lo cual prueba que S es continua, más aún, se tiene que

$$||S|| = \sup_{x\in F\oplus a\mathbb{R}, x\neq 0} \frac{|Sx|}{||x||} \leq \frac{1}{d}$$

Siguiendo ahora la indicación, sea (x_n) tal que

$$d = \lim_{n\to\infty} ||x_n - a||$$

entonces

$$1 = |S(x_n - a)| \leq ||S|| \cdot ||x_n - a||$$

tomando límite se concluye que $1 \leq d||S||$ que es la desigualdad que nos faltaba.

(c) Notemos que S es tal que cumple las condiciones pedidas, esto es,

$$S = 0 \text{ en } F, \quad Sa = 1 \quad \text{y} \quad ||S|| = \frac{1}{d}$$

ahora uno de los Corolarios de Hahn-Banach dice que para toda función lineal continua de F subespacio vectorial de E normado, existe una extensión lineal continua T que preserva la norma de S.

(d) Basta que probemos que $dist(e, F) = 1$, primero notamos que como la sucesión constante nula está en F entonces

$$dist(e, F) \leq dist(e, 0) = 1$$

supongamos que la desigualdad es estricta, luego existe $\epsilon > 0$ y un $x \in F$ tal que

$$||x - e|| \leq 1 - \epsilon$$

es decir, $|x_n - 1| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así

$$x_n \geq \epsilon$$

lo cual implica que $x \notin F$ lo cual es una contradicción.