

# CLASE AUXILIAR: VARIABLE COMPLEJA

MICHAEL KOWALCZYC & EMILIO VILCHES 19 DE OCTUBRE DE 2008

20 DE OCTUBRE DE 2008

**P1.** Calcular:

a)

$$\int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

b)

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z^3 - 1)}$$

**P2.** Mostrar que si  $a > 0$ , entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

**P3.** Probar que si  $0 < \alpha < 1$  entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\alpha\pi/2)}$$

**P4.** Encuentre el número de ceros de  $p(z) = z^5 + z^3 + 5z^2 + 2$  (contando multiplicidad) en el anillo  $1 < |z| < 2$ .

**P5.** Pruebe que si  $1 < \lambda < \infty$ , la función  $f_\lambda(z) = z + \lambda - e^z$  tiene solo un cero en el semiplano  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , y este cero está sobre el eje real.

**P6.** Sea  $|\alpha| > e$ .

a) Mostrar que la ecuación

$$\alpha z e^z = 1$$

tiene exactamente una raíz en  $|z| < 1$ . Si además  $\alpha > e$  esta raíz es real y positiva.

b) Calcular

$$\int_{|z|=1} \left( \frac{1}{\alpha z e^z - 1} \right) dz$$

**P7.** Encuentre el número de ceros de  $p(z) = z^5 + 15z + 1$  (contando multiplicidad) en el anillo  $\frac{3}{2} < |z| < 2$ .