MA34B-**Estadística - Pauta Control 2**
Profesor:Rodrigo Abt

P1
a) Consideremos:

$$f_n(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\theta}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!}$$

Además, como $\ln(\cdot)$ es creciente, maximizar $f_n \Leftrightarrow$ maximizar $\ln(f_n)$

$$\begin{aligned} \ln(f_n(x|\theta)) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\theta) - n\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) \\ \frac{\partial \ln(f_n(x|\theta))}{\partial \theta} &= \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Con $\hat{\theta}$ el estimador de Máxima Verosimilitud.

b) Veamos que es consistente:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\bar{x}) = \theta$$

Luego es insesgado.

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}) = \mathbb{V}(\bar{x}) = \frac{\theta}{n}$$

Así es consistente, puesto que:

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}) \to 0, \quad n \to \text{ínf}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ECM}(\hat{\theta}, \theta) \to 0$$

Lo que implica convergencia en probabilidad.
Para ver la eficiencia basta ver que se alcanza la cota de Cramer-Rao.

P3

1) Si $X \sim \exp(\lambda)$, tenemos que su distribución es:

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

la esperanza y la varianza estan dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Si consideramos una muestra $X_i, i = 1, \ldots, 30$, de promedio $\bar{X} = 5$ aos y definimos:

$$Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$$

Busquemos ahora un intervalo de confianza al 95 % para λ. Recordemos que de el T.C.L. tenemos que (dado que $n = 30$ es suficientemente grande):

$$\bar{X} \sim N(\mathbb{E}(\bar{X}), \mathbb{V}(\bar{X})), \text{ ie } \quad \bar{X} \sim N(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{n\lambda^2})$$

Análogamente:

$$\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}} \sim N(0, 1)$$

Como $Y = n\bar{X}$:

$$Z := (\lambda \bar{X}\sqrt{n} - \sqrt{n}) = \frac{Y - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} \sim N(0, 1)$$

Luego, y considerando la simetria de una $N(0, 1)$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(a \leq Z \leq b) &=& \ 0{,}95 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}(-b \leq Z \leq b) &=& \ 0{,}95 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}(|Z| \leq b) &=& \ 0{,}95 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}(Z^2 \leq b^2) &=& \ 0{,}95 \\
\Leftrightarrow \quad & Z^2 &\leq& \ 1{,}96^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (\lambda \bar{X}\sqrt{n} - \sqrt{n})^2 &\leq& \ 1{,}96^2
\end{aligned}$$

Que corresponde a una ec. cuadratica para λ, del tipo: $a\lambda^2 + b\lambda + c \leq 0$, con $a > 0$. Luego nos interesan los $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, con λ_i, las raices. Resolviendo, llegamos a:

$$\lambda \in [0{,}128,\ 0{,}271]$$

2)En esta parte, hay que utilizar para $T = 2\lambda Y$ su f.g.m.:

$$\begin{aligned} \Psi_T(t) &= \mathbb{E}(e^{tT}) &= \mathbb{E}(e^{2\lambda Y t}) \\ &= \Psi_Y(2\lambda t) &= \Psi_X^n(2\lambda t) \\ &= \left(\tfrac{\lambda}{\lambda - 2t\lambda}\right)^n &= \left(\tfrac{1}{1-2t}\right)^n \end{aligned}$$

que corresponde a la f.g.m. para una Chi-cuadrado de $2n$ rados de libertad.

3)De la parte anterior sabemos que $T \sim \chi^2_{60}$. Luego buscamos a, b tales que $\mathbb{P}(a \leq T \leq b) = 0{,}95$. Pero como una χ^2_{60} no es simetrica respecto del origen, imponemos:

$$\mathbb{P}(a \leq T) = 0{,}025$$
$$\mathbb{P}(T \leq b) = 0{,}975$$

De las tablas obtenemos que $a = 40{,}5$ y $b = 83{,}3$: $T \in [40{,}5,\ 83{,}3]$, y como $T = 2\lambda Y$

$$\Rightarrow \lambda \in [0{,}135,\ 0{,}275]$$
$$\mathbb{P}(0{,}135 \leq \lambda \leq 0{,}275) = 0{,}95$$