Clase Auxilar 2: Resumen Probabilidades Parte II y Métodos de Estimación

Prof. Rodrigo Abt B.
Auxs. H. Olivero Q. - V. Riquelme F.

11 de agosto de 2008

Momentos de una V.A. y Función Generadora de Momentos

Definición:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea X una v.a. se define el momento de orden k de X como:

$$\mu_k = \mathbb{E}(X^k)$$

Definición:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea X una v.a. se define la función generadora de momentos de X como:

$$\Psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Propiedades

- Sea X una v.a. entonces: $\Psi_X^{(n)}(t=0) = \mathbb{E}(X^n)$
- Sea X una v.a. y sea $Y = aX + b$, entonces

$$\Psi_Y(t) = e^{bt}\Psi_X(at)$$

- Si X e Y son vv.aa. entonces

$$\Psi_Y = \Psi_X \Longrightarrow F_X = F_Y$$

- Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ vv.aa. independientes y sea $X = \sum_{i=1}^n X_i$ entonces:

$$\Psi_X = \prod_{i=1}^n \Psi_{X_i}(t)$$

Definiciones

Definición:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad un vector aleatorio es una función medible $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Definición:

Dado un vector Aleatorio $X = (X_1 \ldots, X_n)$ se define su función de distribución conjunta como:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \ldots, X_n \leq t_n) \ \ \forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

Al igual que en el caso de una dimensión se clasifican las variables aleatorias en continuas y discretas extendiendo a $\mathbb{R}^n$ las definiciones que se tienen para $\mathbb{R}$.

Densidad de Probabilidad

Para un vector aleatorio continuo X su densidad de probabilidad esta dada por una función f_X que satisface:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f_X(a_1,\ldots,a_n)da_1\ldots da_n$$

Para el caso en que el vector aleatorio es discreto su "densidad" está dada por una funcíon p_X, con soporte numerable S_X,que satisface:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in S_x,\ a_i\leq t_i} p_X(a_1,\ldots,a_n)$$

Densidades Marginales

Dado un vector aleatorio, se define la densidad marginal de cada una de sus componentes de la siguiente manera:

$$f_{X_i}(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) da_1 \dots da_{i-1} da_{i+1} \dots da_n$$

Si el vector es continuo.
En el caso discreto la definición es la siguiente:

$$p_{X_i}(t) = \sum_{(a_1,\dots,a_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_n) \in S_X} p_X(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Independencia

Definición:

Dado un vector aleatorio X, sus componentes serán variables aleatorias independientes si:

$$F_X(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i)$$

Lo que es equivalente a:

$$\begin{aligned} f_X(t_1, \ldots, t_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i) \text{ (Caso Continuo)} \\ p_X(t_1, \ldots, t_n) &= \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(t_i) \text{ (Caso Discreto)} \end{aligned}$$

Función de un Vector Aleatorio

Sea X un vector aleatorio y sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente regular. Entonces la densidad del vector aleatorio $Y = h(X)$ esta dada por:

$$f_Y(y_1, \ldots, y_n) = f_X(x_1(y), \ldots, x_n(y)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(y)}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n(y)}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Ley de los Grandes Números

Teorema

Ley Débil de los Grandes Números: Si $X_1, X_2, \ldots$ son v.a. i.i.d. con media μ entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\mu\right| \geq \epsilon) = 0 \ (\forall \epsilon > 0)$$

Teorema

Ley Fuerte de los Grandes Números: Si $X_1, X_2, \ldots$ son v.a. i.i.d. con media μ entonces:

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} = \mu) = 1$$

Teorema Central del Límite

Teorema

Si $X_1, X_2, \ldots$ son v.a. i.i.d. con media μ y varianza σ^2. Si n es un número "suficientemente grande", se tiene que:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Estimador de Momentos

Si $(X_i)_{i=1}^n$ es una MAS, entonces el método de los momentos dice que

$$m_k = \mu_k$$

donde $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$, y $\mu_k = \mathbb{E}\left(X^k\right)$. El número k es elegido de acuerdo al número de parámetros a estimar.

Estimador de Máxima Verosimilitud

Si $(X_i)_{i=1}^{n}$ es una MAS de la variable aleatoria X con densidad $f_X(x,\theta)$, se define la función de verosimilitud $L(\vec{x},\theta)$ por:

$$L(\vec{x},\theta) = f_{\vec{X}}(\vec{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i,\theta)$$

Entonces, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ de θ es tal que maximiza $L(\vec{x},\theta)$, o sea:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{argmin}\, L(\vec{x},\theta)$$