

Pauta Control 3 MA34A

P1.-

a) Para calcular la densidad de X , se integra sobre el dominio de definición de las otras variables. Así

$$f_X(x) = \int_0^1 \int_0^\infty 2e^{-x-2y} dy dz = e^{-x} [-e^{-2y}]_0^\infty [z]_0^1 = e^{-x}$$

b) Se tiene que $\frac{Y}{Z} > 1$ si y sólo si $Y > Z$. Así

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{Z} > 1\right) = \int_0^1 \int_z^\infty \int_0^1 2e^{-x-2y} dx dy dz = \int_0^1 [-e^{-2y}]_z^\infty dz = \int_0^1 e^{-2z} dz = \frac{1 - e^{-2}}{2}$$

c) Análogo a lo anterior, se tiene que $X \in (2, \infty)$, $Y \in (X, \infty)$, $Z \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 < X < Y) &= \int_0^1 \int_2^\infty \int_x^\infty 2e^{-x-2y} dy dx dz \\ &= \int_2^\infty e^{-x} [-e^{-2y}]_x^\infty dx = \int_2^\infty e^{-3x} dx \\ &= \left[-\frac{e^{-3x}}{3} \right]_2^\infty = \frac{e^{-6}}{3} \end{aligned}$$

P2.- Lo primero que debemos hacer es calcular el parámetro de la exponencial, digamos λ . Si denotamos por X el tiempo de espera, tenemos que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 7$ minutos (por enunciado). Así, $X \sim \text{exponencial}(\frac{1}{7})$. Luego, la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(X > 185 \mid X > 180) = \frac{\mathbb{P}(X > 185)}{\mathbb{P}(X > 180)} = \frac{e^{-\frac{185}{7}}}{e^{-\frac{180}{7}}} = e^{-\frac{5}{7}}$$

P3.- a) Utilizando la bilinealidad de la covarianza, $\text{Cov}(X + Y, X - Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, Y)$. Dado que $\text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y)$, anulamos los términos centrales. Así, $\text{Cov}(X + Y, X - Y) = \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) = 0$ por enunciado.

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

b) Se tiene que $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$, utilizando la linealidad de la esperanza.

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

Para la varianza, notamos que $\mathbb{V}(\bar{X}) = \mathbb{V}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$

para calcular la varianza de la suma, tenemos que $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$, donde las covarianzas son todas 0 por independencia

de los X_i . Luego $V(\bar{X}) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$. Así, se tiene que cuando n es muy grande la variable aleatoria promedio converge al valor constante $\mathbb{E}(X_i)$, pues la varianza tiende a 0, de manera que para muchas variables aleatorias con igual distribución, la probabilidad de que el promedio se aleje del valor esperado tiende a 0.

P4.a) Se puede argumentar que la distribución normal es absolutamente continua, mientras que las notas siguen una distribución discreta. Además, en la práctica, la probabilidad de obtener una nota menor a 1,0 o mayor a 7,0 es 0, mientras que la normal arroja probabilidades mayores que cero para estos eventos.

b) Si llamamos X a la nota obtenida, tenemos que la variable aleatoria $Z = \frac{X - 4,5}{0,7}$ tiene una distribución normal de media 0 y varianza 1. Así, $\mathbb{P}(X > 5,9) = \mathbb{P}(Z > 2) = 0.0228$ según la tabla.

c) En esta parte se pide encontrar c tal que $\mathbb{P}(X < c) = 0.1$, lo que equivale a $\mathbb{P}(Z < \frac{c-4,5}{0,7}) = 0.1$. Utilizando la simetría de la normal en torno a su media, tenemos que lo anterior equivale a $\mathbb{P}(Z > \frac{4,5-c}{0,7}) = 0.1$. Según la tabla, esto se obtiene para $\frac{4,5-c}{0,7} = 1.28$, o bien $c = 3.604$. Luego, la nota bajo la cual se encuentra el 10% de los alumnos es 3.6.