Auxiliar 9: Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor: Marco Alfaro S.
Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Gonzalo Contador R.

24 de Octubre de 2008

P1. Determine el valor de $Cov(aX+b, cY+d)$ en función de $Cov(X,Y)$.

P2.
a) Suponga que la duración de una llamada telefónica es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{10}$. Si alguien llega inmediatamente antes que usted a un teléfono público, encuentre la probabilidad de tener que esperar:

i) Más de 10 minutos.
ii) Entre 10 y 20 minutos.

b) Considere una oficina de correos que es atendida por dos empleados. Suponga que cuando Mr. Smith entra a la oficina, descubre que Ms. Jones está siendo atendida por uno de los dos empleados y Mr. Brown por el otro. Suponga también que a Mr. Smith se le dijo que su atención empezará tan pronto Jones o Brown se marche. Si la cantidad de tiempo que un empleado gasta con un cliente está distribuido exponencialmente con parámetro λ, ¿cuál es la probabilidad de que, de los tres clientes, Mr. Smith sea el último en dejar la oficina de correos?

c) Suponga que la cantidad de kilómetros que un auto puede recorrer antes de que se muera su batería, está exponencialmente distribuida con un valor medio de 10.000 kilómetros. Si auto ya ha recorrido 20.000 kilómetros y una persona quiere hacer un viaje de 5.000 kilómetros, ¿cuál es la probabilidad de que pueda completar el viaje sin tener que reemplazar la batería?

P3. La densidad conjunta de X e Y está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X/Y.

P4. Considere un círculo de radio R y suponga que un punto dentro del círculo se elige aleatoriamente de modo que todas las regiones dentro del círculo de igual área, tienen la misma probabilidad de contener al punto (en otras palabras, el punto está uniformemente distribuido dentro del círculo). Si el centro del círculo denota el origen, y definimos X e Y como las coordenadas del punto elegido, se sigue que, como (X,Y) tiene la misma probabilidad de estar en cualquier punto del círculo, la función de densidad conjunta de X e Y está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{si } x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

para algún valor de c.

a) Determine c.
b) Encuentre las funciones de densidad marginal de X e Y.
c) Calcule la probabilidad de que D, la distancia del origen al punto seleccionado sea menor o igual que a.
d) Encuentre $\mathbb{E}[D]$.