Pauta pregunta 3 control 2

a) Para que el sistema funcione, se necesita que funcionen al menos k componentes. Si llueve (con probabilidad α), cada una de ellas funcionará con probabilidad p_1, de lo contrario, cada componente funcionará con probabilidad p_2, independiente de las otras. Si denotamos por X la variable aleatoria que entrega la cantidad de componentes operativas del sistema, vemos que esta tiene una distribución binomial de parametros n y la probabilidad de que cada componente funcione, lo que depende del día. Así, buscamos

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k \mid lluvia)\mathbb{P}(lluvia) + \mathbb{P}(X \geq k \mid seco)\mathbb{P}(seco)$$

Este término equivale a

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i}\alpha + \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_2^i (1-p_2)^{n-i}(1-\alpha)$$

b)Denotemos los eventos A="aprobar", D="levantarse con el pie derecho"; e I="levantarse con el pie izquierdo". Veamos primero que pasa con un sólo examinador. En este caso, la probabilidad de aprobar puede expresarse como (0.5 puntos)

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(A \mid I)\mathbb{P}(I) = 0.8x0.5 + 0.4x0.5 = 0.6$$

En el caso de tener 3 examinadores, la variable aleatoria X que mide la cantidad de evaluadores que aprueban se comporta como una binomial, de parámetros 3 y 0.8 si se levanta con el pie derecho, y 3 y 0.4 si se levanta con el pie izquierdo. Como aprueba si más de la mitad de los examinadores lo aprueban, buscamos que $X \geq 2$, luego queda (1 punto)

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq 2 \mid D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(X \geq 2 \mid I)\mathbb{P}(I) = \frac{1}{2}(\binom{3}{2}(0.8)^2(0.2) + \binom{3}{3}(0.8)^3) + \frac{1}{2}(\binom{3}{2}(0.4)^2(0.6) + \binom{3}{3}(0$$

donde la probabilidad pedida es 0.624. De esta forma, es más probable aprobar con 3 examinadores que con 1 sólo (0.5 puntos)

c) Veamos el caso base, tomando X_0 y X_1 variables de poisson de parámetros λ_0 y λ_1. Veamos que

$\mathbb{P}(X_0 + X_1 = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_0 + X_1 = k \mid X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = k - i)\mathbb{P}(X_0 = i)$ donde se utiliza la independencia de las variables (0.5 puntos). Dado que ambas siguen una distribución de poisson, esto equivale a

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{k-i}}{(k-i)!}\frac{e^{-\lambda_0}\lambda_0^i}{i!} = \frac{e^{-(\lambda_0+\lambda_1)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_0^i\lambda_1^{k-i} = \frac{(\lambda_0+\lambda_1)e^{-(\lambda_0+\lambda_1)}}{k!},$$

lo que prueba que la suma de ambas variables tiene una distribución de poisson cuyo parámetro es la suma de ambos parámetros (1 punto. El paso inductivo es análogo y tiene la misma distribución de puntaje)