

Pauta P1 Control 2 MA34A

a) Denotemos por G la respuesta dada por Gonzalo, O la respuesta dada por Orlando y R la respuesta correcta. Nos piden $\mathbb{P}(R = d \mid G = d, O = d)$. Utilizando la fórmula de Bayes, esto equivale a (0.5 puntos por este desarrollo)

$$\mathbb{P}(G = d, O = d \mid R = d) \frac{\mathbb{P}(R = d)}{\mathbb{P}(O = d, G = d)}$$

Analizamos cada término

$\mathbb{P}(G = d, O = d \mid R = d) = \mathbb{P}(G = d \mid R = d)\mathbb{P}(O = d \mid R = d)$, por independencia condicional de las respuestas (las respuestas no son independientes, puesto que ambas dependen de cuál es la respuesta correcta, pero el mentir o decir la verdad si lo es). Luego, este término es el producto de las probabilidades de decir la verdad, ie $\frac{4}{5} \frac{8}{9} = \frac{32}{45}$ (0.8 puntos). Si dijeron que las respuestas eran independientes, no tienen puntaje)

$\mathbb{P}(R = d) = \frac{1}{9}$, dado que hay 9 posibles respuestas (0.5 puntos)

$\mathbb{P}(O = d, G = d) = \sum_{\text{respuesta}=x} \mathbb{P}(O = d, G = d \mid R = x)\mathbb{P}(R = x)$, utilizando

probabilidades totales y la partición de las posibles respuestas, donde $\mathbb{P}(R = x) = \frac{1}{9}$ por el argumento anterior. Para $x = d$, el término de la suma está calculado. Para x una respuesta que no sea d , se tiene que $\mathbb{P}(G = d, O = d \mid R = x) = \mathbb{P}(G = d \mid R = x)\mathbb{P}(O = d \mid R = x)$ por la independencia condicional de las respuestas, y si la respuesta correcta es x cada uno de sus auxiliares favoritos tiene 8 posibles maneras de mentirles (una por cada respuesta incorrecta), y la alternativa d es una de esas 8 posibilidades. Luego, mentir diciendo la alternativa d equivale a $\frac{1}{8}$ de la probabilidad de mentir, o sea $\frac{1}{8} \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{8} \frac{1}{9}$ en cada caso. Recapitulando, la probabilidad de que ambos les digamos d es $(\frac{32}{45} + 8 \frac{1}{40} \frac{1}{72}) \frac{1}{9} = \frac{257}{3240}$ (¿Por qué no es sólo $\frac{1}{81}$, ya que es una combinación de respuestas de las 81 combinaciones posibles de respuestas?) (1.0 puntos)

Luego, la probabilidad pedida (0.2 puntos por dejar expresado, no era necesario calcular)

$$\frac{\frac{32}{45} \frac{1}{9}}{\frac{257}{3240}} = \frac{256}{257}$$

b) El hecho de que Gonzalo haya mentido sólo permite inferir que la respuesta es incorrecta, y así eliminarla de los casos favorables de respuesta correcta (0.5 puntos). Para la respuesta dada por Orlando nuevamente utilizamos probabilidades totales particionando sobre las posibles respuestas, luego

$\mathbb{P}(O = a) = \sum_{x=\text{respuesta}} \mathbb{P}(O = a \mid R = x)\mathbb{P}(R = x)$ (1.0 punto). Para $x=a$, el

término de la sumatoria equivale a $\frac{8}{9} \frac{1}{8}$ (decir la verdad y que a sea verdadera), si $x=e$ el término es 0, y si x es cualquier otra de las 7 alternativas responder a equivale a una de las ocho posibilidades de mentir, luego el sumando queda $\frac{1}{8} \frac{1}{9} \frac{1}{8}$ (1.0 puntos). Finalmente, se tiene

$\mathbb{P}(O = a) = \frac{1}{9} + 7 \frac{1}{8} \frac{1}{9} \frac{1}{8} = \frac{71}{576}$ (0.5 puntos)

Como este resultado no es tan asqueroso como el anterior, podemos analizarlo un poco: veamos que la probabilidad de que Orlando les dé como respuesta la e ,

que ya saben que es falsa, es $\frac{1}{8} \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$ (pues es una de las 8 alternativas que tiene Orlando para mentir, sea cual sea la respuesta correcta). Así, la probabilidad de que Orlando NO les diga la e es $\frac{71}{72}$, y si no tenemos información adicional sobre la respuesta a priori la probabilidad de que les diga una en particular (la a) de las ocho que quedan es $\frac{1}{8} \frac{71}{72} = \frac{71}{576}$, que es lo que calculamos arriba.