Auxiliar N°7. Transformación de V.A. y Suma de V.A. Independientes

Profesor: Iván Rapaport Z.

Auxiliar: Abelino Jiménez G.

Resumen

Transformación de Variables.

Propiedad

Sea $X\ : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua y sea D el campo de variabilidad de X. Sea $\Psi : D \to \mathbb{R}$ una función derivable e inyectiva, entonces $Y = \Psi(X)$ es una v.a. continua con densidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{\mid \Psi'(\Psi^{-1}(y)) \mid} \cdot f_X(\Psi^{-1}(y))$$

Aplicación 1

Sea X v.a. continua con densidad f_X. Sea $Y = \alpha + \beta X$. Se tiene que Y es una v.a. continua con densidad:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\mid \beta \mid} \cdot f_X\left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right)$$

Aplicación2

Sea $X \sim N(0,1)$. Sea $Y = \mu + \sigma X$, con $\sigma > 0$. Entonces $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Recíprocamente, si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\frac{1}{\sigma}(Y - \mu) \sim N(0,1)$.

Suma de Variables Aleatorias Independientes

Definición

X_1 *y* X_2 v.a. independientes si

$$P(X_1 \leq a_1,\ X_2 \leq a_2) = P(X_1 \leq a_1) \cdot P(\ X_2 \leq a_2) \quad \forall a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$$

Suma de Vs.As. Discretas Independientes

Sean X *y* Y v.a. independientes tomando valores en $\mathbb{Z}$ con densidades discretas P_X y P_Y respectivamente, i.e.

$$P_X(k) = P(X = k), \qquad P_Y(k) = P(Y = k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

entonces $X + Y$ toma valores en $\mathbb{Z}$ y su densidad discreta verifica:

$$P_{X+Y}(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_X(j) \cdot P_Y(k-j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_Y(j) \cdot P_X(k-j)$$

Suma de Vs.As. Continuas Independientes

Sean X y Y v.a. independientes, continuas, con densidades respectivas f_X y f_Y. Entonces $X+Y$ es v.a. continua y con densidad:

$$f_{X+Y} = f_X \star f_Y$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y(z-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) \cdot f_X(z-u)du$$

Ejercicios

1. Sea X una v.a. con densidad $f_X(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}$ para $u > 0$ y $f_X(u) = 0$ si $u \leq 0$.

   - Defina la variable aleatoria $Y = \sqrt{X}$, es decir, $Y(\omega) = \sqrt{X(\omega)}$, donde $\sqrt{\cdot}$ es la raíz positiva. Encuentra la función de densidad de f_Y de la variable Y.
   - Sea L una variable aleatoria independete de Y y tal que $P(L=1) = \frac{1}{2} = P(L=-1)$. Probar que la variable aleatoria $Z = L \cdot Y$ es una Normal (0,1).

2. Si $Y \sim Uniforme[0,5]$¿Cuál es la probabilidad de que ambas raíces de la ecuación

   $$4x^2 + 4xY + Y = 0$$

   sean reales?

3. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con funciones densidad discreta dadas por:

   $$P(X=k) = P(Y=k) = (1-p)^k, \quad k \in \{0,1,2,...\}$$

   - Encuentre la densidad discreta de X+Y en {0,1,2,...}
   - Demuestre que:

   $$P(X=k \mid X+Y=n) = \frac{1}{n+1} \quad k,n \in \{0,1,2...\},\ k \leq n.$$

4. Sean X e Y variables aleatorias independientes, ambas con distribución uniforme $[\theta - \dfrac{1}{2}, \theta + \dfrac{1}{2}]$. Demuestre que la distribución de $X - Y$ no depende de θ.