

AUXILIAR N°12. CONVERGENCIA DE V.S.A.S

PROFESOR: IVÁN RAPAPORT Z.

AUXILIAR: ABELINO JIMÉNEZ G.

Resumen

Desigualdad de Markov

Si X es una variable aleatoria que toma valores no negativos, entonces

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad \forall a > 0$$

Desigualdad de Chebyshev

Si X es una variable aleatoria con esperanza finita μ y varianza σ^2 , entonces

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Ley débil de los grandes números

Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, donde $E(X_i) = \mu \quad \forall i$. Entonces,

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Teorema Central del Límite

Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, donde $E(X_i) = \mu \quad \forall i$ y varianza σ^2 . Entonces,

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Ley Fuerte de los Grandes Números

Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, donde $E(X_i) = \mu \quad \forall i$. Entonces,

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Ejercicios

1. Se sabe que en cada medición de la temperatura en un dormitorio, el resultado obtenido es una variable aleatoria de media 0 y varianza 100. Si se consideran n mediciones y el valor promedio de ellas, determine el valor de n de manera que la probabilidad de que $-0,01 < \bar{X} < 0,01$ sea mayor que 0,99.

2. Suponga que el número de unidades producidas diariamente en la fábrica A es una variable aleatoria con esperanza 20 y desviación estándar 3, mientras que el número producido en la fábrica B es una variable aleatoria con esperanza 18 y desviación estándar 6. Asumiendo independencia, encuentre una cota superior para la probabilidad de que son más las unidades producidas por B que por A en un día.
3. Si $E(X) = 75$, $E(Y) = 75$, $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 12$, $Cov(X, Y) = -3$ encuentra una cota superior para
 - a) $P(|X - Y| > 15)$
 - b) $P(X > Y + 15)$
 - c) $P(Y > X + 15)$
4. Para poner en servicio una máquina se requiere de dos pasos. El tiempo necesario para el primer paso se distribuye como variable aleatoria exponencial con esperanza 0.2 horas y el tiempo para el segundo paso con una exponencial independiente de esperanza 0.3 horas. Si un operador tiene que poner en servicio 20 máquinas, aproxima la probabilidad de que el operador haga el trabajo completo en 8 horas.