Auxiliar N°11. Transformación de Vs As Multidimensionales
Función Generadora de Momentos

Profesor: Iván Rapaport Z.

Auxiliar: Abelino Jiménez G.

Resumen

Transformación de Variables

Sean $X_1,\ X_2,...,X_n$ variables aleatorias con distribución absolutamente continua y densidad conjunta $f_{X_1,...,X_n}$.
Sean $Y_1,\ Y_2,...,Y_n$ variables aleatorias tales que

$$Y_i\ = \Psi_i(X_1,\ X_2,...,X_n) \quad i=1,...,n$$

donde $\Psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función a derivadas parciales continuas.
Entonces , si definiendo $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como $\Psi(x_1,...,x_n) = (\Psi_1(x_1,...,x_n),...,\Psi_n(x_1,...x_n))$, se tiene que Ψ es biyección, entonces se tiene

$$f_{Y_1,...,Y_n}(y_1,...,y_n) = f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)\cdot \mid det\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}\left(\Psi^{-1}(y)\right)\right)\mid^{-1}$$

Función Generadora de Momentos

Sea X v.a., definimos su función generadora de Momentos como

$$M_X(s) = E(e^{sX})$$

Propiedades

- $M_X(0) = 1$
- Si X e Y son independientes, entonces $M_{X+Y}(s) = M_X(s)\cdot M_Y(s)$
- $M_X^{(n)}(s) = E(X^n\cdot e^{sX}) \Rightarrow M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$

Ejercicios

1. Sea X va. exponencial de parámetro λ e Y v.a. con distribución Uniforme[0,2π]. Asumiendo que X e Y son independientes, calcula la distribución conjunta de

$$U = \sqrt{X}\cdot cosY \quad V = \sqrt{X}\cdot sinY$$

   Muestra además que U y V son variables aleatorias independientes

2. Sean X, Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro λ. Calcula e identifica la distribución de

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

3. Sea X variable aleatoria, con $M_X(t)$ su función generadora de momentos. Muestra que

$$\frac{d}{dt} ln(M_X(t)) \mid_{t=0} = E(X)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} ln(M_X(t)) \mid_{t=0} = Var(X)$$

4. Muestra que la función generadora de momentosde la distribución $normal(\mu, \sigma^2)$ corresponde a $M(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. Con esto, calcula su esperanza y varianza.