

AUXILIAR N°10. CONDICIONALIDAD Y Vs.As. MULTIDIMENSIONALES

PROFESOR: IVÁN RAPAPORT Z.

AUXILIAR: ABELINO JIMÉNEZ G.

Resumen

Función de Distribución Condicional

Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $A \subseteq \Omega$ tal que $P(A) > 0$. Definimos

$$F_X(\cdot | A) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

de modo que

$$F_X(u | A) = P(X \leq u | A) = \frac{P(X \leq u \wedge u \in A)}{P(u \in A)}$$

Función de Densidad Condicional

$$f_{X|A}(u) = \frac{dF_X(u | A)}{du}$$

Esperanza Condicional

$$E(X | A) = \int u \cdot f_{X|A}(u) du$$

Teorema

Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición de Ω , es decir, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$. Se tiene que

$$F_X(u) = \sum_{i=1}^n F_X(u | A_i) \cdot P(A_i) \text{ y } E(X) = \sum_{i=1}^n E(X | A_i) \cdot P(A_i)$$

Función de Densidad Condicional Discreta

$$p_{X_1|X_2, \dots, X_n}(a_1 | a_2, \dots, a_n) = P(X_1 = a_1 | X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n)$$

Con esta definición se tiene que:

$$p_{X_1|X_2, \dots, X_n}(a_1 | a_2, \dots, a_n) = \frac{p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(a_1, a_2, \dots, a_n)}{p_{X_2, \dots, X_n}(a_2, \dots, a_n)}$$

Se lee “densidad condicional discreta de $X_1 = a_1$ dado $X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n$ ”

Propiedad

$p_{X_1|X_2, \dots, X_n}(a_1 | a_2, \dots, a_n)$ es función de densidad, para $(a_2, \dots, a_n)$ fijos. Esto pues

$$\sum_{a_1 \in I_1} p_{X_1|X_2, \dots, X_n}(a_1 | a_2, \dots, a_n) = 1$$

Teorema

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \\ = \sum_{(a_2, \dots, a_n) \in I_2 \times \dots \times I_n} p_{X_1 | X_2, \dots, X_n}(a_1 | a_2, \dots, a_n) \cdot p_{X_2, \dots, X_n}(a_2, \dots, a_n)$$

Función de Densidad Condicional Continua

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \quad y \in \mathbb{R}$$

Propiedad

$$P(Y \in A | X = u) = \int_A f_{Y|X}(y | u) dy \quad \text{y} \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{Y|X}(y | x) \cdot f_X(x) dx$$

Ejercicios

1. Sean X, Y va. con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(s, h) = \begin{cases} k(1-h) & 0 < s \leq h < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- a) Calcular k
b) Encontrar las marginales de X e Y .
c) Calcular las densidades condicionales $X | Y = y$ e $Y | X = x$
2. Considere el vector aleatorio (X, Y) tomando valores en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$ con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- a) Encuentre las densidades marginales $f_X(x), f_Y(y)$.
b) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x | y), f_{Y|X}(y | x)$
c) Calcule $P(Y \leq y | X = x)$
d) Calcule $E(X | Y = y)$
3. Un banco tiene N cajeros, el n -ésimo cajero se demora un tiempo exponencial de parámetro λ_n en atender un cliente. La cola única del banco se sabe que tiene una distribución de Poisson de parámetro β . Suponiendo que la probabilidad de que una persona cualquiera en la cola sea atendida por el n -ésimo cajero es proporcional a λ_n , calcule el valor esperado del tiempo que transcurre para una persona cualquiera desde que ingresa a la cola hasta que es finalmente atendida.