<u>Auxiliar N°5. Algunas Distribuciones Discretas</u>

Profesor: Iván Rapaport Z.

Auxiliar: Abelino Jiménez G.

Resumen

Distribución de Bernoulli

Una variable aleatoria X se dice Bernoulli de parámetro p, lo que se denota $X \sim Bernoulli(p)$, con $p \in [0,1]$, si

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

Distribución de Binomial

Una variable aleatoria X se dice binomial de parámetro $(n,\ p)$, lo que se denota $X \sim B(n,p)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0,1]$ si

$$\forall k \in \{0, ...n\}, \quad P(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$$

Ejercicios

1. Considere el juego siguiente. Un jugador lanza una moneda hasta que sale una cara, si salió cara en la etapa n entonces obtiene un beneficio n^2. Calcula el valor esperado del beneficio del juego.

2. Se tiene una urna que contiene N bolas numeradas de 1 a N respectivamente. Se sacan n bolas de la urna ($n \leq N$) y se ve el valor máximo de las n bolas.
   Encuentre la distribución de la variable aleatoria que toma el valor de dicho máximo y su valor esperado.

3. Sea X una variable aleatoria binomial de parámetro $(n,\ p)$. Demuestra que $E(X) = np$ y $Var(X) = n(1-p)p$.

4. Sean $X_1, ...,\ X_n$ variables aleatorias independientes tales que para cierto $\mu \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$E(X_i - \mu) = 0 \qquad E[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2 < +\infty$$

$$E[(X_i - \mu)^3] = \nu^3 \qquad E[(X_i - \mu)^4] = \tau^4 < +\infty$$

Se definen las variables aleatorias :

$$\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Determinar $E(\overline{X}),\ Var(\overline{X}),\ E(S^2)$

5. Una variable aleatoria X se dice positiva, si $P(X \in \mathbb{R}_+) = 1$. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias indénticamente distribuidas y positivas. Sin importar cuál sea su distribución, muestra que:

$$E\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right) = \frac{k}{n}$$