Auxiliar N°4. Variables Aleatorias (Discretas)

Profesor: Iván Rapaport Z.

Auxiliar: Abelino Jiménez G.

Resumen

Definición

Una **variable aleatoria** es una función tal que

$$X \; : \; \Omega \; \to \; \mathbb{R}$$

Una **función de distribución** F es aquella que:

- $F \; : \; \mathbb{R} \; \to [0,1]$
- F creciente. ie $a \leq b \quad \Rightarrow \quad F(a) \leq F(b)$
- F es continua por la derecha. ie $F(a^+) = F(a) \;\; \forall \; a \in \mathbb{R}$, donde $F(a^+) = \underset{h \to 0^+}{lim} F(a+h)$
- $F(-\infty) = 0$, donde $F(-\infty) := \underset{a \to -\infty}{lim} F(a)$
- $F(\infty) = 1$, donde $F(\infty) := \underset{a \to \infty}{lim} F(a)$

Observación Si X es una variable aleatoria, entonces se define la función de distribución de la variable aleatoria de la siguiente manera:

$$F(a) = P(X \leq a)$$

Variables Aleatorias Discretas

Será toda variable aleatoria que toma a lo más un número contable de valores posibles.

Sea $A = \{a \in \mathbb{R} \; / \; P(X = a) > 0\}$. Si X es una variable aleatoria discreta, entonces

$$\sum_{a \in A} P(X = a) = 1$$

Esperanza

Sea X variable aleatoria discreta, se define la esperanza de X como:

$$E(X) = \sum_{a\ :\ P(X=a)>0} a \cdot P(X = a)$$

Propiedades

- Si $X\ :\ \Omega\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ y $\Phi\ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si X es discreta con valores $\{a_i :\ i \in I\}$ y $p_i = P(X = a_i)$ entonces $E(\Phi(X)) = \sum_{i \in I} \Phi(a_i) \cdot p_i$
- Si $X = \alpha$, entonces $E(X) = \alpha$
- Si $X,\ Y$ son variables aleatorias, entonces $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$
- Si $X \geq 0$, entonces $E(X) \geq 0$

Varianza

Si X es una variable aleatoria, se define la varianza de X como:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

Propiedades

- Si $X = \alpha$ entonces $Var(X) = 0$
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$

Ejercicios

1. Sea $A = \{1,\ 2,\ 3\}$. Se realiza el siguiente experimento. se extrae al azar un subconjunto de A de manera equiprobable.
   (a) Encuentra (Ω, F, P).
   (b) Se define la variable aleatoria $X\ :\ \Omega\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ como:

$$X(\omega) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in \omega} i & \omega \neq \emptyset \\ 0 & \omega = \emptyset \end{cases}$$

   (c) Calcula la Esperanza y la Varianza de X.

2. Se hacen n lanzamientos independientes con un dado ordinario de 6 lados. Calcule la probabilidad que:
   (a) El mayor de los números obtenidos sea k con $k \in \{1, ..., 6\}$.
   (b) El menor de los números obtenidos sea k con $k \in \{1, ..., 6\}$.

3. Tres puntos son escogidos al azar e independientemente en el intervalo [0,1]. Sea X el número de puntos que pertenecen al intervalo [0,c] donde $c \in [0,1]$ es un número real fijo. Se pide determinar para cada $i \in \{0,1,2,3\}\ : P(X=i)$

4. Una urna contiene seis cartas enumeradas de 1 hasta 6; se extraen sucesivamente cartas de la urna y sin reposición. Considera el experimento (A) consistente en determinar en qué extracción aparece la primera carta con número par. Se pide que:
(a) Modela el experimento (A) como la evaluación de cierta variable aleatoria X definida en cierto espacio probabilístico.
(b) Determia para cada $n \in \{1,...,6\}:\ P(X=n)$.

5. Considera el experimento (B) de tirar dos veces e independientemente un dado y a continuación sumar los resultados obtenidos en cada tirada. Se le pide que:
Determinar en (B) la probabilidad de que ocurra el suceso "la suma de los resultados obtenidos en cada tirada es par".