Resolución N°2. Axiomas de Probabilidades

Profesor: Iván Rapaport Z.

Auxiliar: Abelino Jiménez G.

Ejercicios Resueltos

1. Cierta enfermedad se transmite en forma genética de los padres a los hijos, del siguiente modo:

   - Si sólo el padre presenta la enfermedad, el hijo tendrá probabilidad β de presentarla ($\beta \in (0,1)$).
   - Si sólo la madre presenta la enfermedad, el hijo tendrá probabilidad α de presentarla ($\alpha \in (0,1)$).
   - Si ambos padres la presentan, el hijo la presentará con probabilidad 1.

   Además, cada uno de los padres tiene probabilidad p de presentar la enfermedad, en forma independiente entre ellos ($p \in (0,1)$).

   (a) Si un tipo está enfermo, ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermedad le haya sido transmitida sólo por la madre?

   (b) Si hay dos hermanos, y uno de ellos está enfermo, ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hermano también esté enfermo?

   Solución

   (a)

   Definamos los siguientes eventos:

   M: sólo la madre está enferma.

   F: sólo el padre está enfermo.

   A: ambos (padre y madre) están enfermos.

   H: hijo está enfermo

   Según la información del enunciado se tiene lo siguiente:

   $P(H \mid M) = \alpha$

   $P(H \mid F) = \beta$

   $P(H \mid A) = 1$

   Además se sabe que se tiene que la probabilidad de que la madre esté enferma (que es distinto a decir que "sólo la madre está enferma") es p, al igual que el padre en forma independiente.

Así se tiene que

$$P(M) = P(madre\ enferma\ y\ padre\ no\ enfermo) = P(madre\ enferma) \cdot P(padre\ no\ enfermo)$$

esto último por independencia[1]. Pero

$$P(madre\ enferma) = p$$

$$P(padre\ no\ enfermo) = 1 - p$$

luego

$$P(M) = p \cdot (1 - p)$$

Análogamente se tiene que

$$P(F) = p \cdot (1 - p)$$

Bajo el mismo análisis de independencia se tiene que
Se nos pide calcular $P(M \mid H)$.
Se tiene que

$$P(M \mid H) = \frac{P(H \mid M) \cdot P(M)}{P(H)}$$

Luego, lo único que falta por calcular es $P(H)$. Para ello, ocuparemos probabilidades totales.

$$P(H) = P(H \mid M) \cdot P(M) + P(H \mid F) \cdot P(F) + P(H \mid A) \cdot P(A)$$

Entonces se tiene

$$P(H) = \alpha \cdot p \cdot (1 - p) + \beta \cdot p \cdot (1 - p) + 1 \cdot p^2$$

Finalmente se tiene que:

$$P(M \mid H) = \frac{\alpha \cdot p \cdot (1 - p)}{\alpha \cdot p \cdot (1 - p) + \beta \cdot p \cdot (1 - p) + p^2}$$

[1] Si bien no se ha visto independencia en cátedra, esta es una aplicación sencilla del concepto (Nivel de enseñanza media).

(b)

Se nos pide calcular $P(H_2 \mid H_1)$.

Sabemos que

$P(H_2 \mid H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap H_2)}{P(H_1)}$

pero de la parte (a) sabemos que

$$P(H_1) = \alpha \cdot p \cdot (1-p) + \beta \cdot p \cdot (1-p) + p^2$$

por otra parte, usando probabilidades totales, se tiene:

$$P(H_1 \cap H_2) = P(H_1 \cap H_2 \mid M) \cdot P(M) + P(H_1 \cap H_2 \mid F) \cdot P(F) + P(H_1 \cap H_2 \mid A) \cdot P(A)$$

pero, por independencia

$$P(H_1 \cap H_2 \mid M) = \alpha^2$$

$$P(H_1 \cap H_2 \mid F) = \beta^2$$

$$P(H_1 \cap H_2 \mid A) = 1$$

luego

$$P(H_1 \cap H_2) = \alpha^2 \cdot p \cdot (1-p) + \beta^2 \cdot p \cdot (1-p) + p^2$$

Finalmente se tiene:

$$P(H_2 \mid H_1) = \frac{\alpha^2 \cdot p \cdot (1-p) + \beta^2 \cdot p \cdot (1-p) + p^2}{\alpha \cdot p \cdot (1-p) + \beta \cdot p \cdot (1-p) + p^2}$$

2. Pedro quiere enviar una carta a María. La probabilidad de que Pedro escriba la carta es 0.8; la probabilidad de que el correo no la pierda es 0.9 y la probabilidad de que el cartero la entregue es 0.9. Si María no recibió la carta, ¿Cuál es la probabilidad condicional de que Pedro no la haya escrito?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

Pe: Pedro escribió la carta.

C_O: Correo no pierde la carta.

C_A: Cartero entrega la carta.

M: María recibe la carta.

Es importante observar que se tiene una serie de sucesos encadenados, de modo que las probabilidades que se presentan deben ser consideradas de la siguiente forma:

$P(Pe) = 0,8$

$P(C_O \mid Pe) = 0,9$

$P(C_A \mid C_O \cap Pe) = 0,9$

Además, para que María reciba la carta, debe darse todo lo anterior, es decir

$$M = Pe \cap C_O \cap C_A$$

Se nos pide calcular $P(Pe^C \mid M^C)$.

Por definición se tiene que

$$P(Pe^C \mid M^C) = \frac{P(Pe^C \cap M^C)}{P(M^C)}$$

Observemos que, dado que $M = Pe \cap C_O \cap C_A$, entonces $M \subseteq Pe$, lo que implica que $Pe^C \subseteq M^C$, es decir $Pe^C \cap M^C = Pe^C$, luego

$$P(Pe^C \mid M^C) = \frac{P(Pe^C)}{P(M^C)}$$

Usando las propiedades conocidas y la caracterización de M, se tiene que

$$P(Pe^C \mid M^C) = \frac{1 - P(Pe)}{1 - P(M)} = \frac{1 - 0,8}{1 - P(Pe \cap C_O \cap C_A)}$$

pero

$$P(Pe \cap C_O \cap C_A) = P(C_A \mid Pe \cap C_O) \cdot P(Pe \cap C_O) = P(C_A \mid Pe \cap C_O) \cdot P(C_O \mid Pe) \cdot P(Pe)$$

es decir

$$P(Pe \cap C_O \cap C_A) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,8$$

se tiene finalmente que

$$P(Pe^C \mid M^C) = \frac{1-0,8}{1-0,9\cdot 0,9\cdot 0,8}$$

3. Una jarra contiene n cuadrados en blanco. Una persona saca al azar uno: si está en blanco, lo marca y luego lo repone, repitiendo esto hasta sacar uno marcado que es cuando finaliza. Calcula para cada $k \in \{1,...,n+1\}$ la probabilidad de ocurrencia del suceso "la persona finaliza en la k-ésima extracción".

   Solución

   Definamos los siguientes eventos.

   A_k: hasta la extracción k-ésima han salido cuadros blancos.

   B_k: en la extracción k-ésima sale un cuadro blanco.

   C$_k$: en la extracción k-ésima sale un cuadro marcado.

   De esta manera, la relación que se puede establecer entre los eventos definidos son:

$$B_k = C_k^C$$

$$C_k = C_k \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} B_j = C_k \cap A_{k-1}$$

   Además sabemos que, si han salido i-1 cuadros blancos, entonces la probabilidad de sacar un cuadro blanco en la i extracción es:

$$\frac{n-i+1}{n}$$

   es decir:

$$P(B_i \mid A_{i-1}) = \frac{n-i+1}{n}$$

   Análogamente se tiene

$$P(C_i \mid A_{i-1}) = \frac{i-1}{n}$$

   Por otra parte, se tiene que

$$P(C_k) = P(C_k \cap A_{k-1}) = P(C_k \mid A_{k-1})P(A_{k-1})$$

es decir

$$P(C_k) = \frac{k-1}{n} P(A_{k-1})$$

De modo que el cálculo de $P(C_k)$ se reduce a calcular $P(A_{k-1})$.
Observemos que

$$A_j = B_j \cap A_{j-1}$$

Así se tiene que

$$P(A_j) = P(B_j \cap A_{j-1}) = P(B_j \mid A_{j-1}) \cdot P(A_{j-1})$$

es decir

$$P(A_j) = \frac{n-j+1}{n} \cdot P(A_{j-1})$$

Según la característica del experimento, se tiene que

$$P(A_1) = 1$$

Así se tiene que

$$P(A_2) = \frac{n-2+1}{n} \cdot P(A_1) = \frac{n-1}{n} \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n!}{n^2(n-2)!}$$

inductivamente, se puede probar que

$$P(A_j) = \frac{n!}{n^j(n-j)!}$$

Así se tiene que

$$P(C_k) = \frac{k-1}{n} P(A_{k-1}) = \frac{k-1}{n} \cdot \frac{n!}{n^{k-1}(n-k+1)!}$$

Finalmente se tiene

$$P(C_k) = \frac{(k-1) \cdot n!}{n^k(n-k+1)!}$$