Auxiliar N°2. Axiomas de Probabilidades

Profesor: Iván Rapaport Z.

Auxiliar: Abelino Jiménez G.

Resumen

Axiomas

(A1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(A2) $P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$

(A3) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia disjunta de eventos. Entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propiedades

(1) σ-Subaditividad.
Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de eventos. Entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(2) Aditividad.
Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de eventos disjuntos. Entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) Crecimiento.
Sean $A,\ B$ eventos. Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

(4) Subaditividad.
Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de eventos. Entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(5) Propiedad del Complemento.

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

(6) Propiedad de la Unión.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad Condicional

Definición.

Sean A, B eventos. La probabilidad de A condicionado por B está dada por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propiedades.

(1) Sea $A \subseteq B$, entonces

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = 1$$

(2) Fórmula de Bayes.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Ejercicios

1. Cierta enfermedad se transmite en forma genética de los padres a los hijos, del siguiente modo:

   - Si sólo el padre presenta la enfermedad, el hijo tendrá probabilidad β de presentarla ($\beta \in (0,1)$).
   - Si sólo la madre presenta la enfermedad, el hijo tendrá probabilidad α de presentarla ($\alpha \in (0,1)$).
   - Si ambos padres la presentan, el hijo la presentará con probabilidad 1.

   Además, cada uno de los padres tiene probabilidad p de presentar la enfermedad, en forma independiente entre ellos ($p \in (0,1)$).

   (a) Si un tipo está enfermo, ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermedad le haya sido transmitida sólo por la madre?

   (b) Si hay dos hermanos, y uno de ellos está enfermo, ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hermano también esté enfermo?

2. Pedro quiere enviar una carta a María. La probabilidad de que Pedro escriba la carta es 0.8; la probabilidad de que el correo no la pierda es 0.9 y la probabilidad de que el cartero la entregue es 0.9. Si María no recibió la carta, ¿Cuál es la probabilidad condicional de que Pedro no la haya escrito?

3. Una jarra contiene n cuadrados en blanco. Una persona saca al azar uno: si está en blanco, lo marca y luego lo repone, repitiendo esto hasta sacar uno marcado que es cuando finaliza. Calcula para cada $k \in \{1, ..., n+1\}$ la probabilidad de ocurrencia del suceso "la persona finaliza en la k-ésima extracción".

4. En un programa de televisión 1 de 4 cajas contiene las llaves de un fabuloso auto último modelo y las otras 3 están vacías. El concursante escoge una de las 4 cajas, el animador le ofrece un premio de consuelo si se retira ahora, cosa que el concursante rechaza. De las cajas que el concursante no escogió el animador abre 2 que resultan estar vacía. El animador le ofrece un mejor premio de consuelo por retirarse ahora, el concursante rehusa pero pide cambir su elección de caja por la que quedó cerrada de las que no había escogido. ¿Hizo lo correcto? Suponga que el animador sabe donde está la llave y quiere mantener el suspenso.

5. Prueba la desigualdad de Bonferroni:

$$P(A_1 \cap \ A_2 \cap ... \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - (n-1)$$

6. Considere un espacio con medida de probabilidad P. Sean A, B dos eventos con probabilidad no nula. Se dice que B repele a A si P(A|B)<P(A), y que B atrae a A si no se cumple que B repele a A. Demuestre que si B atrae a A, entonces A atrae a B y B repele a A^C.

7. *** Una promotora ha llamado a su casa informando que ha sido seleccionado para participar del siguiente concurso. En una caja se encuentran 100 números reales desconocidos. Para ganar el gran premio, usted debe seleccionar el mayor de todos los número de la caja. El juego tiene la siguiente regla: usted debe sacar un número de dicha caja, observarlo y decidir si quedarse con él o desecharlo (el número que desechó, no podrá volver a elegirlo). Si decide quedarse con el número seleccionado el juego se acaba y el juez comprueba si es o no el número mayor. Si lo desecha, puede escoger otro número al azar, repitiendo el protocolo anterior. Finalmente usted debe presentar algún candidato que considere que es el mayor número. Encuentre algún método de selección que asegure tener al menos un 25 % de probabilidad de ganar el concurso.