Profesor: Jaime Michelow
Auxiliares: Felipe Salamanca
Andrés Hurtado del Nido

INTERPOLACIÓN:

La idea básica detrás de la interpolación es, dado un conjunto de puntos en el espacio de partida relacionados con otros en el espacio de llegada, construir una función (polinomio en nuestro caso) que represente dicha relación. Es decir:

Sea $\{(x_i, y_i)\}_0^n$, una colección de puntos en el plano, donde $x_i \in [a,b] \forall i$ distintos.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

f será una función de interpolación ssi:

$$\Leftrightarrow y_i = f(x_i) \forall i$$

En esta guía sólo se analizarán tres casos:

- Polinomio de Vandermônde.
- Polinomio de Lagrange.
- Polinomio de Newton.

Polinomio de Vandermônde:

El determinante de Vandermônde no es otra cosa que una forma implícita y sencilla de escribir (y encontrar directamente) el polinomio de interpolación.

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 0$$

Y se expresa como $D(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$

Donde $\{(x_i, y_i)\}_0^n$ son los puntos por los cuales debe pasar la interpolación. Y el par (x, y) son la entrada y resultado del polinomio respectivamente.

Veamos un pequeño ejemplo:

Se busca el polinomio de interpolación que pase por los puntos $\{(2,6),(3,1)\}$, con lo que se procede a escribir el polinomio de Vandermônde:

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = 16 - 5x$$

Comprobando el resultado obtenido:

Para $x_1 = 2 \quad \Leftrightarrow y = 16 - 5 \cdot 2 \Leftrightarrow y_1 = 6$

Para $x_2 = 3 \quad \Leftrightarrow y = 16 - 5 \cdot 3 \Leftrightarrow y_2 = 1$

Claramente en el sentido de la aplicación, este polinomio no presenta mayores complicaciones.

Polinomio de Lagrange:

Este no es mas que otro método para encontrar el polinomio de interpolación. La idea es, dado los puntos $\{(x_i, y_i)\}_0^n$ encontrar un polinomio de grado n que sea 1 en x_i y 0 $\forall x_j \; j \neq i$. Es decir, se encuentra un polinomio para cada par de coordenadas y al final, la suma de todos estos polinomios entregará el polinomio que interpole al conjunto total de coordenadas.

Para lograr lo anterior, se define:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$

Donde $L_i(x)$ es de grado n $L_i(x_j) = 0 \; \forall j \neq i$ y $L_i(x_i) \neq 0$ (no vale necesariamente 1). Con esto se define un nuevo polinomio:

$$\hat{L}_i(x) = \frac{L_i(x)}{L_i(x_i)}$$

Es decir un polinomio que entrega un 1 en el punto deseado y cero en cualquier otro de los puntos "con los que se construye el polinomio".

Con lo que finalmente se tiene el polinomio que interpola a todos los puntos:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \hat{L}_i(x)$$

Veamos ahora un ejemplo, busquemos el polinomio que interpole a los puntos $\{(2,6),(3,1)\}$:

Calculamos para la primera coordenada:

$$L_i(x) = (x-3)$$

$$\Rightarrow \hat{L}_i(x) = \frac{(x-3)}{(2-3)} = -(x-3)$$

Análogamente para la segunda coordenada:

$$L_i(x) = (x-2)$$

$$\Rightarrow \hat{L}_i(x) = \frac{(x-2)}{(3-2)} = (x-2)$$

Finalmente se tendrá que el polinomio de Lagrange es:

$$P_n(x) = -6(x-3) + (x-2) = -5x + 16$$

Es decir, el mismo resultado del caso anterior.

Ejercicio propuesto:

Dados los siguiente puntos:

$$\{(-2,25),(-1,7),(1,17),(2,19)\}$$

Encuentre el polinomio de interpolación mediante el Método de Lagrange.

Polinomio de Newton:

El problema del método de Lagrange es que al agregar una nueva coordenada a interpolar, se deben modificar y recalcular todos los términos del polinomio, lo cual es optimizado en el presente método.

La base de todo es considerar los términos:

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$L_0(x) \equiv 1$$

La idea es construir el polinomio para el primer punto con las definiciones anteriores y a partir éste seguir agregando términos para las demás coordenadas. Veamos una breve explicación de esto:

Para la primera coordenada (x_0, y_0), se tiene el polinomio $P_0(x_0) = y_0$, donde:

$$P_0(x) = A_0 L_0(x)$$

Pero por definición $L_0(x) \equiv 1$ y evaluando en el punto $\Rightarrow A_0 = y_0$. El objetivo es, de ahora en adelante, encontrar los valores de las constantes A_i que definirán al polinomio.

Ahora, si se desea agregar una nueva coordenada (x_1, y_1), el nuevo polinomio de interpolación será:

$$P_1(x) = P_0(x) + A_1 L_1(x)$$

donde por definición $L_1(x) = (x - x_0)$ y entonces evaluando el polinomio en (x_1, y_1) se tendrá:

$$P_0(x_1) + A_1 L_1(x_1) = y_1 \Leftrightarrow y_0 + A_1(x_1 - x_0) \Leftrightarrow A_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Con lo que se tendrá definido el polinomio para dichos puntos y así sucesivamente, será posible ir agregando más coordenadas para ser interpoladas por el polinomio. Sin embargo, este método pasa a ser bastante engorroso para una gran cantidad de coordenadas, por lo cual se cuenta con una forma general para escribir el polinomio para $\{(x_i, y_i)\}_0^n$.

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

Donde se puede identificar:

$A_0 = f[x_0]$, $A_1 = f[x_0, x_1]$, $A_2 = f[x_0, x_1, x_2]$,etc..

O de una forma más general:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{j=1}^{n} \left(f[x_0, \ldots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \right)$$

Ahora la interrogante es conocer el valor de $f[x_0,\dots,x_j]$. Para esto se construye la siguiente tabla:

	0	1	2	3	4	5	6
x_0	$f[x_0]$						
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$					
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$				
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$			
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$		
x_5	$f[x_5]$	$f[x_4,x_5]$	$f[x_3,x_4,x_5]$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$	
x_6	$f[x_6]$	$f[x_5,x_6]$	$f[x_4,x_5,x_6]$	$f[x_3,x_4,x_5,x_6]$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]$

Donde $f[x_i]=y_i \qquad i=0,1,2,3,\dots$

A partir del cual se puede encontrar cualquier polinomio de interpolación deseado, es decir, mediante variadas combinaciones de coordenadas, por ejemplo el polinomio que pasa por los puntos $\left\{(x_i,y_i)\right\}_0^3$:

$$P_3(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

O el polinomio que pasa por los puntos $\left\{(x_i,y_i)\right\}_3^6$:

$$P_3(x)=f[x_3]+f[x_3,x_4](x-x_3)+f[x_3,x_4,x_5](x-x_3)(x-x_4)+f[x_3,x_4,x_5,x_6](x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$$

Finalmente para encontrar los valores que nos interesan, se utiliza la fórmula:

$$f[x_r,\dots x_k]=\frac{\left\{f[x_{r+1},\dots,x_k]-f[x_r,\dots,x_{k-1}]\right\}}{(x_k-x_r)}$$

Veamos ahora un par de ejemplos:

i) Encontrar el polinomio de interpolación para los puntos $\left\{(2,6),(3,1)\right\}$:

solución:

Se construye primero la tabla:

	0	1			0	1
x_0	$f[x_0]$		$\Leftrightarrow$	2	6	
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$		3	1	$f[x_0,x_1]$

Falta calcular ahora $f[x_0,x_1]$, pero:

$$f[x_r,\dots,x_k]=\frac{\left\{f[x_{r+1},\dots,x_k]-f[x_r,\dots,x_{k-1}]\right\}}{(x_k-x_r)}\Leftrightarrow f[x_0,x_1]=\frac{\left\{f[x_1]-f[x_0]\right\}}{x_1-x_0}\Leftrightarrow f[x_0,x_1]=\frac{1-6}{3-2}=-5$$

Finalmente:

$$P(x) = 6 - 5(x-2) = -5x + 16$$

Es decir, se ha llegado al mismo resultado mediante diversos métodos.

ii) Agregue la coordenada $\{(5,3)\}$, al polinomio de interpolación hallado anteriormente.

Solución:

Primero que nada, reconstruimos la tabla agregando esta nueva coordenada:

$$\begin{array}{cclc}
 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 6 & & \\
3 & 1 & -5 & \\
5 & 3 & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2]
\end{array}$$

Luego, se calcula la componente faltante:

$$f[x_0, x_1, x2] = \frac{\{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]\}}{x_2 - x_0} = \frac{\left\{\frac{\{f[x_2] - f[x_1]\}}{x_2 - x_1} - \frac{\{f[x_1] - f[x_0]\}}{x_1 - x_0}\right\}}{3} = \frac{\left\{\frac{\{3-1\}}{5-3} - \frac{\{1-6\}}{3-2}\right\}}{3} = \frac{1+5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \; f[x_0, x_1, x2] = 2$$

Donde finalmente se tendrá el siguiente polinomio de interpolación:

$$P(x) = 6 - 5(x-2) + 2(x-2)(x-3) = 2x^2 - 15x + 28$$

Propuesto:

i) Comprobar que el polinomio anterior interpole efectivamente a las coordenadas deseadas.

ii) Usando los tres métodos anteriores interpole la siguiente malla de coordenadas: $\{(2,5),(4,6),(6,1),(7,3)\}$

iii) Compare los resultados obtenidos en la parte anterior y concluya.