Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 12 MA33A-1
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana
Fecha: 12 de Noviembre del 2008

Errores

Problema 1. Para evaluar la función $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ se proponen las dos implementaciones numéricas siguientes:

a. $F_1 = SQRT(x \oplus 1) \ominus SQRT(x)$

b. $F_2 = 1 \oslash (SQRT(x \oplus 1) \oplus SQRT(x))$

1. Evalue numéricamente ambas expresiones para el valor particular $x = 1000$.En estas evaluaciones, considere que todos los cálculos se realizan en el sistema numérico $\mathbb{F}(10, 4, -\infty, \infty)$ usando el modelo de aritmética de punto flotante estandar ($a \circledast b = fl(a * b)$ y $SQRT(x) = fl(\sqrt{x})$).
   Obs: Algunos varoles "exactos" útiles para el cálculo son:
   - $\sqrt{1000} = 31{,}62277660168...$
   - $\sqrt{1001} = 31{,}63858403911...$
   - $\frac{1}{63{,}24} = 0{,}015812776723...$
   - $\frac{1}{63{,}25} = 0{,}015810276679...$
   - $\frac{1}{63{,}26} = 0{,}015807777426...$
   - $\frac{1}{63{,}27} = 0{,}015805278963...$
2. Realice un análisis teórico para obtener cotas de los errores relativos de redondeo esperados para cada una de las implementaciones anteriores. Compare estas cotas con los error efectivamente obtenido en (a).
   Obs: En este análisis, suponga que tanto x como $x - 1$ son elementos de $\mathbb{F}(10, 4, -\infty, \infty)$y por lo tanto la operación $x \oplus 1$ es exacta.

Problema 2. Se desea evaluar numéricamente la expresión

$$e(x) = x - \frac{x^2}{x+1}$$

cuando x es grande. Para ello se trabaja en el sistema numérico $\mathbb{F}(\beta, p, -\infty, \infty)$ y se proponen las 2 implementaciones siguientes:

$$E_1(x) = x \ominus [(x \otimes x) \oslash (x \oplus 1)]$$

$$E_2(x) = (....) \oslash (x \oplus 1)$$

1. Complete lo que falta en la implementación $E_2(x)$. ¿Cuál implementación, a priori, debiera entregar un mejor resultado numérico de la expresión $e(x)$? Calcule a mano, los valores de $E_1(699)$ y $E_2(699)$, trabajando en $\mathbb{F}(10, 3, -\infty, \infty)$, es decir usando un cálculo de 3 cifras signicativas (redondeando los resultados intermedios).
   Obs: Se sabe que $699^2 = 488601$
2. Obtenga una cota teórica del error relativo obtenido al aproximar $e(x)$ por $E_1(x)$ usando la teoría estándar de propagación de errores en $\mathbb{F}(\beta, p, -\infty, \infty)$.
3. Obtenga ahora una cota teórica del error relativo obtenido al aproximar $e(x)$ por $E_2(x)$. ¿Cuanto vale esta cota en su cálculo realizado en (a)?