

Universidad de Chile.  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.  
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 11 MA33A-1  
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz  
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana  
Fecha: 29 de Octubre del 2008

### Métodos Iterativos: Gauss-Seidel y Jacobi

**Problema 1.** Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + 2y - 2z &= 1 \\x + y + z &= 2 \\2x + 2y + z &= 3\end{aligned}$$

1. Escriba el método de Jacobi que resuelve el sistema anterior en forma iterativa. Pruebe el método haciendo tres iteraciones partiendo del punto  $x^0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
2. Calcule el radio espectral de la matriz  $J$  de iteración del método de Jacobi y demuestre que el método es convergente.
3. Escriba el método de Gauss-Seidel que resuelve el sistema en forma iterativa. Calcule el radio espectral de la matriz  $G$  de iteración de este método e indique que ocurre con la convergencia del método.

**Problema 2.**

1. Demuestre que si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces  $\rho(\alpha A + \beta I) = \alpha \rho(A) + \beta$ .

2. Considere la matriz tridiagonal  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , de  $n \times n$  y el vector  $b \in \mathbb{R}^n$ . Determine explícitamente la matriz de iteración  $J$  del método del Jacobi para resolver  $Ax = b$ .

3. Sabiendo que  $\rho(A) = \left\{ 2 \left( 1 - \cos \left( \frac{k\pi}{n+1} \right) \right); k = 1, \dots, n \right\}$ , usar a) para calcular  $\|J\|_2$  y demostrar que el método de Jacobi en este caso converge.
4. En el caso particular  $n = 5$ , determine cuantas iteraciones  $k$  deben realizarse con el método de Jacobi para reducir un error inicial  $\|e_0\|_2 = 1$  al valor  $\|e_k\|_2 \leq 10^{-10}$ . Indicación: considere que  $\log_{10} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx -\frac{1}{16}$ .