Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 10 MA33A-1
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana
Fecha: 22 de Octubre del 2008

Norma y Condicionamiento de Matrices

Problema 1. El condicionamiento de una matriz se define como $\kappa(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$, donde la norma matricial es cualquier norma subordinada.

1. Demuestre que: $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\left\|b-\tilde{b}\right\|}{\|b\|}$ en donde $\tilde{b}$ es el lado derecho perturbado y $\tilde{x}$ es la solución respectiva.
2. Suponga que A es una matriz simétrica y que v_k $k = 1,..,n$ es una base de vectores propios con valores propios λ_k todos NO nulos. Usando $b = v_i$ y $\tilde{b} = v_i + \epsilon v_j$ con $\epsilon > 0$ (por lo tanto $\left\|b - \tilde{b}\right\| = \epsilon$) encuentre los índices i y j para los cuales el error relativo en x (al perturbar b) sea máximo. Compare con las cotas anteriores.

Solución del Problema 1.

1. Sabemos que $Ax = b$ (1) y $A\tilde{x} = \tilde{b}$ (2).
   Restando (1)-(2) obtenemos:
   $$A(x - \tilde{x}) = b - \tilde{b}$$
   Ahora premultiplicando por A^{-1}, tenemos:
   $$x - \tilde{x} = A^{-1}(b - \tilde{b})$$
   Aplicando una norma cualquiera y usando la propiedad del producto de normas se obtiene:
   $$\|x - \tilde{x}\| = \left\|A^{-1}(b - \tilde{b})\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \left\|b - \tilde{b}\right\| \ \ (3)$$
   Aplicando una norma cualquiera a (1) y usando la misma propieda anterior se tiene:
   $$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \ \ (4)$$
   Multiplicando (3) y (4) se tiene:
   $$\|x - \tilde{x}\| \|b\| \leq \|A\| \|x\| \left\|A^{-1}\right\| \left\|b - \tilde{b}\right\|$$
   Osea:
   $$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\left\|b - \tilde{b}\right\|}{\|b\|}$$
   Finalmente usando la definición de condicionamiento se llego a los que se quería demostrar:
   $$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\left\|b - \tilde{b}\right\|}{\|b\|}$$

2. Es sabido que $Av_i = \lambda_i v_i$ y además que $Av_j = \lambda_j v_j$. Como los vectores son ortonormales $\|v_k\| = 1$ para cualquier k. Con esto presente se parte a resolver.
   Escribiendo de otra forma lo primero, se tiene $A\left(\frac{v_i}{\lambda_i}\right) = v_i$, lo cual es válido pues $\lambda_i \neq 0$. De aquí identificamos $x = \frac{v_i}{\lambda_i}$, pues por enunciado $b = v_i$. De manera análoga se tiene que $A\left(\frac{v_i}{\lambda_i} + \epsilon\frac{v_j}{\lambda_j}\right) = v_i + \epsilon v_j$, de donde $\tilde{x} = \frac{v_i}{\lambda_i} + \epsilon\frac{v_j}{\lambda_j}$ puesto que en el enunciado nos dicen que $\tilde{b} = v_i + \epsilon v_j$.

Ahora el error relativo se puede escribir como: $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\left\| -\epsilon \frac{v_j}{\lambda_j} \right\|}{\left\| \frac{v_i}{\lambda_i} \right\|} = \epsilon \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_j|}$.

Como nos piden el máximo error entonces Max $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} = \epsilon \frac{Max\ |\lambda_i|}{Min\ |\lambda_j|}$.

Finalmente usando la cota anterior $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \epsilon\kappa(A)$. Usando la norma 2 $\|\cdot\|_2$, por propiedad vista en clases se tiene que $\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$, de donde obtenemos finalmente la desigualdad $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \epsilon \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ la cual es misma la cota encontrada en la parte anterior.