Cálculo Numérico MA-33A

Lista de Problemas de Matrices, Normas y Condicionamiento

Problema 1. Encontrar estimaciones de los condicionamientos de las matrices siguientes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/n \end{pmatrix}$ (R: $\kappa(A) \geq n$)

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (R: $\kappa(A) \geq 2^{n-1}$)

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (R: $\kappa(A) \geq n2^{n-1}$)

Problema 2. Demuestre que toda matriz A verifica

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

Problema 3. Se dice que una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es mágica si sus coeficientes son los naturales $1, 2, \ldots, n^2$ (cada uno usado solo una vez) dispuestos de modo que la suma de cada fila y cada columna es constante e igual a s.

(a) Calcule el valor de la suma s en términos de n.
(b) Calcule las normas $\|A\|_1$ y $\|A\|_\infty$
(c) Demuestre la desigualdad $\|A\|_2 \leq s$.
(d) Demuestre finalmente que $\|A\|_2 = s$. (Ind: $x = (1, \ldots, 1)^T$ es un vector propio de A).

Problema 4. Considere la aplicación $A \in M_n(\mathbb{R}) \to \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$.

(a) Demuestre que esta aplicación define una norma en el espacio de las matrices pero que no es una norma subordinada. (Ind: Alguna propiedad de norma subordinada falla).
(b) Demuestre que si Q es una matriz ortogonal entonces $\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$.
(c) Pruebe que si A es una matriz simétrica y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son sus valores propios entonces $\|A\|_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$
(d) Pruebe que para toda matriz simetrica A se cumple $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \|A\|_2 \sqrt{n}$.

Problema 5. Sea $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\}$, es decir, el conjunto de las matrices no invertibles.

(a) Demostrar que si A es invertible entonces $d(A, S) \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
(b) Demostrar que si A es diagonal invertible entonces se obtiene la igualdad $d(A, S) = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

(c) Extender el resultado anterior al caso A simétrica.
(d) Se sabe que en general la igualdad anterior es valida para toda matriz invertible. Verificar entonces que para toda matriz invertible A se cumple que

$$d(\frac{A}{\|A\|}, S) = \frac{1}{\kappa(A)}$$

Problema 6. Sea $x \neq 0$ la solucion del sistema $Ax = b$. Sea y una solución aproximada del sistema anterior, en el sentido que $Ay - b = r$ donde $r \neq 0$. Demuestre que

$$\frac{\|r\|}{\|A\|\,\|x\|} \leq \frac{\|x - y\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|A\|\,\|x\|}$$

Problema 7. Sea A una matriz invertible y sea E una matriz tal que $\|E\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

(a) Demuestre que $A + E$ es invertible y que

$$\left\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\right\| \leq \frac{\|E\|\,\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}E\|} \leq \frac{\|E\|\,\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\|\,\|E\|}$$

(b) Demuestre que

$$\kappa(A+E) \leq \frac{1 + E_R(A)}{1 - E_R(E)\kappa(A)}\kappa(A)$$

Problema 8. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v^T v = 1$. Considere la matriz $H = I - 2vv^T$.

(a) Demuestre que H es simétrica y ortogonal.
(b) Calcule los valores y vectores propios de H. Deducir que $\det(H) = -1$.

Problema 9.

Sea A una matriz invertible y C_0 una aproximación de A^{-1}, es decir, $AC_o = I - R_0$ con $||R_0|| < 1$.

(a) Pruebe que C_0 es invertible.

Considere el siguiente esquema iterativo:

$$\begin{cases} C_{n+1} &= C_n(I + R_n) \\ R_{n+1} &= I - AC_{n+1} \end{cases}$$

(b) Pruebe que existe K tal que $||A^{-1} - C_{n+1}|| \leq K||R_{n+1}||$.
(c) Pruebe que $R_{n+1} = R_n^2$.
(d) Pruebe que $C_n \to A^{-1}$.

Problema 10. Considere el sistema $Ax = b$ donde la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

esto es, se trata de una matriz bi-diagonal, excepto por el coeficiente $a_{11} = 1$.

(a) Escriba explicitamente el algoritmo de eliminación de Gauss para este caso
(b) Cálcule el numero de operaciones.

Problema 11. Sea A simetrica, definida positiva.

(a) Existe algún valor de $w \in \mathbb{R}$ tal que $||I - wA|| < 1$?

Problema 12. (Control #3, 2000-2)

Notemos x a la solución del sistema $Ax = b$ y $\hat{x}$ a la solución del sistema perturbado $A\hat{x} = b + \delta b$.

a.- Pruebe la desigualdad $\frac{||x-\hat{x}||}{||x||} \leq \kappa(A)\frac{||\delta b||}{||b||}$. (Recuerde que $\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$).

b.- Pruebe la desigualdad $\frac{||\delta b||}{\kappa(A) \cdot ||b||} \leq \frac{||x-\hat{x}||}{||x||}$.

Problema 13. (Control #3, 2000-2)

Considere una matriz invertible $A \in M_n(\mathbb{R})$ que posee la propiedad $a_{ij} = 0$ para $j < i - 1$, es decir, A es nula bajo su segunda diagonal. Se sabe que esta matriz es factorizable como $A = LDU$ donde L es triangular inferior con unos en la diagonal, D es diagonal y U es triangular superior con unos en la diagonal. Suponiendo que L tiene también la propiedad, $l_{ij} = 0$ para $j < i - 1$, (es decir, es bi-diagonal), se pide:

a.- Usando la factorización mencionada (y sus propiedades) indique como calcular la solución de $Ax = b$, detallando los algoritmos que requiera. Estudie el número de operaciones requeridas, contando separadamente, sumas-restas por un lado, y productos-divisiones, por otro lado.

b.- A partir de la expresión que resulta para $(LDU)_{ij}$, deduzca el algoritmo de cálculo de L, D y U. Cuente el número de operaciones.