Pauta P1 Control 3 MA33A

Parte 1

Nos podríamos haber inspirado en la fórmula del valor inicial (o método del lado izquierdo o la fórmula de Newton Cotes de un punto), puesto que tenemos que:

$y' = f(y)$, si integramos entre t y $t + \Delta t$ por teorema fundamental del cálculo tenemos que:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \int_{t}^{t+\Delta t} f(y(s))ds \approx \Delta t f(y(t))$$

Obs: Es fundamental que tengan claro que la variable de integración es t y no y. La fórmula del valor inicial es la siguiente:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx f(a)(b-a)$$

Parte 2

Para empezar recordemos la definicón de estabilidad:

Si $u_{k+1} = u_k + \Delta t \phi(u_k, t_k)$ es un método numérico para resolver EDO diremos que el método es estable si:

Dados $\vec{y_0}, \vec{z_0} \in \mathbb{R}^N$ y $\vec{\epsilon_0}, \ldots, \vec{\epsilon}_{n-1} \in \mathbb{R}^N$(perturbaciónes de cada iteración) y

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \phi(y_k, t_k)$$

$$z_{k+1} = z_k + \Delta t \phi(z_k, t_k) + \Delta t \vec{\epsilon_k}$$

Se define $\epsilon = \max\limits_{k=0,\ldots,n} ||\vec{\epsilon_k}||$ (perturbación máxima)

Se tiene que

$$||z_k - y_k|| \leq C(||z_0 - y_0|| + \epsilon)$$

con C una constante.

En nuestro caso :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n, t_n)$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t f(z_n, t_n) + \Delta t \epsilon_n$$

Debemos demostrar que existe C tal que (aquí estamos en dimensión 1):

$$|z_n - y_n| \leq C(|z_0 - y_0| + \epsilon)$$

Una hipótesis necesaria es que f sea lipchitz en el primer argumento, esto es:

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tq } |f(x,t) - f(y,t)| \leq K|x-y| \; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ahora vamos a la demostración:

$$y_{n+1} - z_{n+1} = y_n - z_n + \Delta t(f(y_n,t_n) - f(z_n,t_n)) + \Delta t \epsilon_n \Rightarrow \text{(tomando módulo y triangular)}$$

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| = |y_n - z_n + \Delta t(f(y_n,t_n) - f(z_n,t_n)) + \Delta t \epsilon_n| \leq |y_n - z_n| + \Delta t|f(y_n,t_n) - f(z_n,t_n)| + \Delta t|\epsilon_n|$$

Por hipótesis (Lipschitz) y $|\epsilon_n| \leq \epsilon$ tenemos:

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + \Delta t K|y_n - z_n| + \Delta t\epsilon = (1 + K\Delta t)|y_n - z_n| + \Delta t \epsilon$$

Razonando inductivamente:

- $n = 0$
$$|y_1 - z_1| \leq (1 + K\Delta t)|y_0 - z_0| + \Delta t\epsilon$$
- $n = 1$
$$|y_2 - z_2| \leq (1 + K\Delta t)|y_1 - z_1| + \Delta t\epsilon \leq (1 + K\Delta t)\left[(1 + K\Delta t)|y_0 - z_0| + \Delta t\epsilon\right] + \Delta t\epsilon$$
$$= (1 + K\Delta t)^2|y_0 - z_0| + (1 + (1 + K\Delta t))\Delta t\epsilon$$
- $n = 2$
$$|y_3 - z_3| \leq (1+K\Delta t)|y_2 - z_2| + \Delta t\epsilon \leq (1+K\Delta t)\left[(1 + K\Delta t)^2|y_0 - z_0| + (1 + (1 + K\Delta t))\Delta t\epsilon\right] + \Delta t\epsilon$$
$$= (1 + K\Delta t)^3|y_0 - z_0| + (1 + (1 + K\Delta t) + (1 + K\Delta t)^2)\Delta t\epsilon$$
- En general
$$|y_n - z_n| \leq (1 + K\Delta t)^n|y_0 - z_0| + \Delta t\epsilon \sum_{i=0}^{n-1}(1 + K\Delta t)^i$$

Ahora recordando que $\Delta t = \frac{T}{N}$ con $n = 1, \ldots, N$ (N total de iteraciones para alcanzar T),

$$(1 + K\Delta t)^n = \left(1 + \frac{KT}{N}\right)^n \leq \left(1 + \frac{KT}{N}\right)^N \leq e^{KT} \; (\,*\,)$$

Por otro lado :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+K\Delta t)^i = \frac{1-(1+K\Delta t)^n}{1-(1+K\Delta t)} = \frac{1-(1+K\Delta t)^n}{-K\Delta t} = \frac{(1+K\Delta t)^n - 1}{K\Delta t}$$

$$\leq \frac{(1+K\Delta t)^n}{K\Delta t} \leq \frac{e^{KT}}{K\Delta t} \text{ (**)}$$

Reemplazando (*) y (**) en la fórmula general:

$$|y_n - z_n| \leq e^{KT}|y_0 - z_0| + \Delta t \epsilon \frac{e^{KT}}{K\Delta t} = e^{KT}\left[|y_0 - z_0| + \frac{\epsilon}{K}\right]$$

También tenemos que :

$$|y_0 - z_0| + \frac{\epsilon}{K} \leq |y_0 - z_0| + \frac{\epsilon}{K} + \epsilon + \frac{|y_0 - z_0|}{K}$$

(éstos 2 términos son positivos y se usan para obtener la constante) $\Rightarrow$

$$|y_n - z_n| \leq e^{KT}\left(1+\frac{1}{K}\right)(|y_0 - z_0| + \epsilon)\text{, aquí se identifica } C = e^{KT}\left(1+\frac{1}{K}\right)$$

Parte 3

Primero hay que identificar los parámetros: $y_0 = 0, T = 2$ y $f(y,t) = -10y \Rightarrow$
$y_{n+1} = y_n + \Delta t(-10y_n) = (1-10\Delta t)y_n$, razonando inductivamente:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (1-10\Delta t)y_n = (1-10\Delta t)^2 y_{n-1} = (1-10\Delta t)^3 y_{n-2} \\ &= \ldots = (1-10\Delta t)^n y_1 = (1-10\Delta t)^{n+1} y_0 = (1-10\Delta t)^{n+1} \end{aligned}$$

De este modo $y(n\Delta t) \approx y_n = (1-10\Delta t)^n$, veamos ahora la parte de la convergencia:
Si

$$T = 2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2}{N} \Rightarrow y_n = \left(1 - \frac{10\cdot 2}{N}\right)^n = \left(1-\frac{20}{N}\right)^n$$

y_N corresponde a la aproximación de $y(2)$,

$$y_N = \left(1-\frac{20}{N}\right)^N \longrightarrow e^{-20} \text{ si } N \longrightarrow \infty$$

Parte 4

La solución real viene dada por e^{-10t} y la solución numérica viene dada por $y(n\Delta t) \approx y_n = (1-10\Delta t)^n$, se entiende por comportamiento similar que tenga las mismas caracterísiticas de crecimiento y signo , en este caso decreciente y positiva:

positiva:

$$y_n \geq 0 \Rightarrow 1-10\Delta t \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{10} \geq \Delta t$$

decreciente:

$$1-10\Delta t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \Delta t$$

Así la condición de crecimiento siempre se tiene (siempre que se tenga la positividad), así que el paso de tiempo Δt debe ser menor que $0,1$

Veamos que pasa para Δt grande: Si Δt es mayor que $0,1$ tenemos que $1-\Delta t \leq 0$, de este modo la solución numérica oscila ($negativo^n$)

- Si $1-10\Delta t < -1 \Rightarrow 2 < 10\Delta t \Rightarrow 0,2 < \Delta t$, así $1-10\Delta t$ es negativo y en valor absoluto mayor que $1 \Rightarrow (1-10\Delta t)^n$ oscila y diverge.
- Si $0,1 < \Delta t < 0,2$ oscila pero es menor que 1 en valor absoluto , así que converge (a cero obviamente)
- Si $\Delta t = 0,1$ la solución vale 1 en cero y es nula en todas las iteraciones siguientes
- Si $\Delta t = 0,2$ la solución vale 1 y -1 iteración por medio, es decir, oscila pero es constante igual a 1 en valor absoluto