Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 9 MA33A-1
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana
Fecha: 15 de Octubre del 2008

**EDO**

**Problema 1**. [Problema 3, Control 2, Primavera 2007]. Para la ecuación diferencial (problema de valor inicial) $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ se propone el método de un paso dado por $y_{n+1} = y_n + \Delta t \phi(y_n, t_n, \Delta t)$, donde $\phi(y_n, t_n, \Delta t) = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$, con:
$k_1 = f(y)$
$k_2 = f\left(y + \frac{\Delta t}{2} k_1\right)$
$k_3 = f(y + \Delta t k_1)$

- Determine el error local del método y verifique que es consistente.

**Problema 2**. [Problema 1, Control 3, Primavera 2007]. Para la ecuación diferencial $y' = f(y, t)$, $y(0) = y_0$ se propone el método de un paso dado por $y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n, t_n)$ (Euler!).

1. Interprete este método como aplicación de un método de integración numérica para integrar la ecuación diferencial. Explique.
2. Explique en que consiste la condición de estabilidad para este método. Demuestre que este método es estable, agregando las hipótesis que considere necesarias.
3. Encuentre la expresión que se obtienen para $y_n$ ($\approx y(n\Delta t)$) en el problema $y' = -10y$, $y(0) = 1$. Si el intervalo de integración de la ecuación es [0,2], demuestre directamente que la solución que entrega el método numérico converge hacia el valor exacto de la solución en $t = 2$, $y(2) = e^{-20}$ cuando $\Delta t \longrightarrow 0$. Basta que trabaje con pasos de tiempo $\frac{2}{N}$.
4. A partir de que valores para $\Delta t$, las soluciones numéricas (para la ecuación de la parte anterior) tienen un comportamiento 'similar' al de la solución exacta (explicite que se entenderá por comportamiento 'similar') y que comportamiento tienen las soluciones numéricas si $\Delta t$ se toma más grande. Explique en detalle. Use gráficos esquemáticos para explicar su análisis.

**Problema 3**. Se tiene la siguiente EDO: $u'(t) = F(t, u(t))$, en (0,T) con $u'(0) = u_0$.

1. Usando la fórmula de integración del punto medio demuestre que toda solución satisface:

$$u(t+h) = u(t) + A \cdot h \cdot u'\left(t + \frac{h}{2}\right) + O\left(h^{\alpha}\right)$$

   Determinando los valores de $A$ y $\alpha$. Para implementar un método numérico inspirado en la ecuación anterior, es necesario estimar el término $u'\left(t + \frac{h}{2}\right) = F\left(t + \frac{h}{2}, u\left(t + \frac{h}{2}\right)\right)$ con un error del orden $O(h^{\alpha-1})$.

2. Sabiendo que la función $F$ es Lipschitz respecto al segundo argumento, demuestre que si $\tilde{u}$ fuese una aproximación de $u\left(t + \frac{h}{2}\right)$ tal que:

$$\left|\tilde{u} - u\left(t + \frac{h}{2}\right)\right| \leq O(h^{\alpha-1})$$

   Entonces $F\left(t + \frac{h}{2}, \tilde{u}\right)$ sería una aproximación de $u'\left(t + \frac{h}{2}\right)$ con un error del orden $O(h^{\alpha-1})$.

3. Usando los métodos vistos en clases, escriba una estimación $\tilde{u}$ de $u\left(t + \frac{h}{2}\right)$ con el error deseado.

4. Inspirandose en los cálculos previos, escriba el método numérico correspondiente en la forma:

$$u_{k+1} = u_k + h\phi(t_k, u_k, h)$$

   Diga explicitamente cual es la función $\phi$. ¿Es consistente el método?¿Cuál es su orden?

5. Para estudiar la estabilidad del método comienze por demostrar que la función $\phi$ es Lipschitz respecto al segundo argumento y use este hecho para concluir que el método es estable (use una partición equiespaciada donde $h = \frac{T}{N}$).

6. Escriba explicitamente la solución numérica entregada por este método al aplicarlo a la ecuación diferencial test: $u'(t) = -mu(t)$, donde $m > 0$ y $u(0) = 1$. Indique como tomar $h$ para que la solución numérica:

   - Sea positiva.
   - Tenga carácter disipativo.