

# Cálculo Numérico MA-33A

## Lista de Problemas de Ecuaciones no Lineales

**Problema 1.** Realice una iteración del metodo de Newton-Raphson para el sistema no lineal  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $x^2 - y^2 = 1$ , partiendo del punto  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ . Grafique en el plano las ecuaciones a resolver y los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ .

**Problema 2.** Para resolver la ecuación  $x^2 - a = 0$  para  $a > 0$  se proponen los tres problemas de tipo punto fijo. Muestre que cada uno es equivalente al problema original, y compare las convergencia de los algoritmos iterativos correspondientes: (a)  $x = x + c(x^2 - a)$  para algún  $x \neq 0$ . (b)  $x = a/x$ . (c)  $x = (x + a/x)/2$ .

**Problema 3.** Demuestre que  $x_{n+1} = \cos x_n$  define una sucesión linealmente convergente para cualquier  $x_0$  en  $\mathbb{R}$  y que su límite esta en  $(0, \pi/2)$ .

**Problema 4.** Suponga que para una cierta función  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  la sucesión generada como  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  converge linealmente hacia  $\bar{x}$ . Considere tres iteraciones sucesivas  $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$  y suponga que existe  $C$  tal que

$$\begin{aligned}x_{n+1} - \bar{x} &\approx C(x_n - \bar{x}) \\x_{n+2} - \bar{x} &\approx C(x_{n+1} - \bar{x}).\end{aligned}$$

Calcule una estimación de  $\bar{x}$  a partir de  $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ . Verifique que esta estimación puede ser considerada como un nuevo método iterativo de la forma  $y_{n+1} = \psi(y_n)$  donde

$$\psi(y) = \frac{y\phi(\phi(y)) - \phi^2(y)}{y - 2\phi(y) + \phi(\phi(y))}.$$

Demuestre que todo punto fijo de  $\psi$  es tambien un punto fijo de  $\phi$ .

Recíprocamente, si  $\bar{x}$  es un punto fijo  $\phi$  y  $\phi'(\bar{x}) \neq 1$  entonces  $\bar{x} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \psi(x)$

Aplique este metodo a las iteraciones del Problema 3 y compare los resultados de ambos métodos.

**Problema 5.** Muestre que

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$$

converge con rapidez de orden 3 hacia  $\sqrt{a}$ .