Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 6 MA33A-1
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana
Fecha: 10 de Septiembre del 2008

Cuadratura de Gauss y Ecuaciones No lineales

Problema 1. Los polinomios de Legendre, que se pueden definir con la expresión:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

son ortogonales, o más precisamente, verifican:

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

Además verifican la relación de recurrencia:

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1)xL_n + nL_{n-1}$$

1. Encuentre la fórmula Gaussiana basada en 4 puntos (del intervalo [-1,1]), esto es, encuentre los 4 puntos de evaluación y los 4 coeficientes respectivos. Basta que deje expresado sus cálculos.
2. Usando argumentos de ortogonalidad, demuestre que la precisión de esta fórmula es 7.

Problema 2. Se desea encontrar fórmulas de integración de Gauss con uno y dos puntos para la integral impropia:

$$I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x}f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

1. Calcule las constantes α, β, γ de modo que los polinomios $p(x) = x+\alpha$, $q(x) = x^2+\beta x+\gamma$ sean respectivamentes ortogonales a los espacios P_0 y P_1.
2. Usando el polinomio p, escriba la fórmula con un punto que permita calcular la integral $I(f)$ con la mayor precisión posible ¿Cuál es la precisión de esta fórmula?
3. Usando el polinomio q, escriba la fórmula con dos puntos que permita calcular la integral $I(f)$ con la mayor precisión posible ¿Cuál es la precisión de esta fórmula?

Problema 3. Se desea resolver la ecuación $x^2 = \ln(2x+1)$.

1. Demuestre que esta ecuación posee exactamente 2 soluciones de las cuales una es evidente. La otra solución la denotaremos s. Encuentre un intervalo encerrado entre enteros consecutivos donde se encuentre la raíz s.
2. Estudie la convergencia de los siguientes métodos numéricos, indicando donde escoger x_0.

$$x_{n+1} = \sqrt{\ln(2x_n+1)}$$

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_n^2}-1}{2}$$

.

3. Escriba en forma explícita el método de Newton que permite resolver esta ecuación.